Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 12, 2013, pp. 31 - 35

5

Développement en série et stabilité forte du système $M/M/1/N$

Z. HAMOUDI[a] et D. AÏSSANI[b]

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : hamoudi_zina@yahoo.fr
[b] email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode de stabilité forte et la méthode du développement en série au système de files d'attente $M/M/1/N$, nous avons illustré l'application des deux méthodes sur des exemples numériques.

Mots clés : Développement en séries, Distribution stationnaire, Matrice de déviation, Stabilité forte, Système de files d'attente.

5.1 Introduction

L'étude de la stabilité occupe une place remarquable dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques, ainsi que dans celle des systèmes stochastiques. La méthode de stabilité forte (ou méthode des opérateurs de la théorie de stabilité) a été élaborée par D. Aïssani et N. Kartashov au début des années 80. L'essence de cette méthode est que l'ergodicité uniforme par rapport à une norme donnée est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition du système étudié. L'application de la méthode du développement en série pour la distribution stationnaire consiste à écrire la distribution stationnaire du système perturbé sous forme d'une série qui dépend de la distribution stationnaire du système idéal, des matrices de transition des systèmes idéal et perturbé, et de la matrice de déviation du système idéal. Dans ce travail, on se propose d'appliquer la méthode de stabilité forte et la méthode du développement en série au système de files d'attente $M/M/1/N$. La perturbation concerne le flot des arrivées (le système $G/M/1/N$ est donc le système perturbé).

5.2 Les système $M/M/1/N$ et $G/M/1/N$

Considérons un système de files d'attente $G/M/1/N$. Les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi générale F de moyenne $1/\lambda$ et le temps de service est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre μ.
Soit Y'_n : le nombre de clients se trouvant dans le système $G/M/1/N$ juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. Les probabilités de transition sont données par $(Q = (q_{i,j})_{i,j\in E})$ où $E = \{0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$. Considérons en même temps un système de files d'attente $M/M/1/N$ où les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi exponentielle E_λ de moyenne $1/\lambda$ et la durée de service est exponentielle de paramètre μ.
Soit Y_n : le nombre de clients se trouvant dans le système $M/M/1/N$ juste avant l'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client. Les probabilités de transition sont données par $(P = (p_{i,j})_{i,j\in E})$.
Désignons par π_P et π_Q les distributions stationnaires des chaînes Y_n et Y'_n, et par Π_P et Π_Q les projecteurs stationnaires des chaînes Y_n et $Y^{'}_n$.

5.3 Développement en série du système $M/M/1/N$

5.3.1 Développement en série de π_P

Lemma 5.1 *Soit la chaîne de de Markov induite Y_n du système $M/M/1/N$. Alors $\exists\ N < \infty$ tel que :*

$$\|P^n - \Pi_P\|_v \leq c\beta^n,$$

$\forall\ n \geq N$, avec $c < \infty$ et $\beta < 1$.

Lemma 5.2 *Soit la chaîne de de Markov induite Y_n du système $M/M/1/N$ et D_P la matrice de déviation qui lui est associée. Alors D_P est finie.*

Lemma 5.3 *Soit π_P (resp. π_Q) la distribution stationnaire de la chaîne Y_n (resp. Y'_n), et D_P la matrice de déviation qui lui est associé. Alors, sous la condition (C), la série*

$$\pi_Q = \pi_P \sum_{n=0}^{\infty}((Q-P)D_P)^n, \tag{5.1}$$

converge vers le vecteur stationnaire π_Q.

5.3.2 Bornes de perturbation pour la distribution stationnaire

Théorème 5.1 *Soit π_P la distribution stationnaire pour la matrice de transition P (π_Q la distribution stationnaire pour la matrice de transition Q), et soit Π_P le projecteur stationnaire pour la matrice de transition P (Π_Q est le projecteur stationnaire pour la matrice de transition Q). Si :*

$$\|(P-Q)D\|_v \leq \eta < 1, \tag{5.2}$$

alors

$$\|\pi_Q - \pi_P\|_v \leq \|\pi_P\|_v \frac{\eta}{1-\eta}, \tag{5.3}$$

où
$\eta = \|(P-Q)\|_v \frac{1}{1-\|T\|_v}(1 - \|\Pi_P\|_v)$.

Théorème 5.2 *Soit Y_n la chaîne de Markov induite du système $M/M/1/N$ ayant la matrice de transition P, et Y_n' la chaîne de Markov induite du système $G/M/1/N$ de matrice de transition Q. Si*

$$\|(P-Q)D\|_v \leq \eta < 1, \tag{5.4}$$

alors

$$\|\pi_Q - \pi_P\|_v \leq \|\pi_P\|_v \frac{\eta}{1-\eta}, \tag{5.5}$$

où
$\eta = \frac{(1+\beta)W}{1-\psi}(1 + \|\pi_P\|_v), \quad W = \int_0^\infty |F - E_\lambda|(dt),$

$$\psi = \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu - \dfrac{\mu}{\beta}}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N\right), \quad \|\pi_P\|_v = \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1})}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}.$$

5.3.3 Application numérique

Considérons un système de files d'attente E_α/M/1/N. on prend $N = 6$ et on suppose que les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont la densité est de la forme suivante :

$$g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} & \text{si } t \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi exponentielle E_μ de paramètre $\mu = 8$. On pose $\lambda = 5$ et $\alpha = 2$. Pour différentes valeurs de α et pour une précision $\epsilon = 0.001$, le programme que nous avons conçu calcule la distribution stationnaire π_Q du système E_α/M/1/N (système perturbé)

.

$\alpha = 2$		$\alpha = 3$		$\alpha = 4$	
π_Q	ν	π_Q	ν	π_Q	ν
0.3720241	0.3004547	0.4113790	0.6321934	0.3470184	0.8036947
0.2344126	0.2222756	0.1919496	0.2331022	0.0742075	0.1577860
0.1515023	0.1643935	0.1207620	0.0859455	0.1051198	0.0309773
0.1004190	0.1214270	0.0914442	0.0316760	0.1319887	0.0060810
0.0678310	0.0891462	0.0734356	0.0116376	0.1308508	0.0011922
0.0456699	0.0635610	0.0600007	0.0041763	0.1152372	0.0002303
0.0281411	0.0387420	0.0510288	0.0012690	0.0955775	0.0000386

5.4 Stabilité forte du système $M/M/1/N$

Théorème 5.3 *Supposons que $\lambda/\mu < 1$, alors pour tout β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, la chaîne de Markov induite Y_n est fortement v-stable pour une fonction $v(l) = \beta^l$.*

Théorème 5.4 *Soient P et Q les noyaux de transition des chaînes de Markov induites des systèmes $M/M/1/N$ et $G/M/1/N$. Alors, pour tout β tel que : $1 < \beta < \mu/\lambda$, on a :*

$$\|P - Q\|_v \leq (1 + \beta)W;$$

où $W = \int_0^\infty |F - E_\lambda|(dt)$.

5.4.1 Inégalités de stabilité

Théorème 5.5 *Supposons que la chaîne de Markov induite Y_n du système $M/M/1/N$ soit fortement v-stable et que :*

$$W < \frac{(1-\psi)}{C(1+\beta)}; \tag{5.6}$$

alors

$$\|\pi_P - \pi_Q\|_v \leq \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1})(1+\beta)CW}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)(1-\psi-(1+\beta)WC)}; \tag{5.7}$$

pour tout β tel que $1 < \beta < \mu/\lambda$, avec :

$$C = \frac{(1-\rho)(1-(\rho\beta)^{N+1}) + (1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho\beta)} \; et \; \psi = \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu - \dfrac{\mu}{\beta}}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda+\mu)}\right)^N\right).$$

5.5 Application numérique

Considérons un système de files d'attente $G/M/1/N$. on prend $N = 5$ et on suppose que les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires indépendante et identiquement distribuées dont la densité est de la forme suivante :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}, & \text{Si } x \geq 0; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Les durées de service sont des variables aléatoires identiquement distribuées, suivant une loi exponentielle E_μ de paramètre $\mu = 12$.
Le programme que nous avons conçu calcule la borne supérieure de l'erreur d'approximation. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

β	$\|\pi_P - \pi_Q\|_v$	β	$\|\pi_P - \pi_Q\|_v$
1.01	0.8165805	1.8	1.7373977
1.02	0.8173503	2	2.4102178
1.03	0.8185240	2.2	3.6328277
1.1	0.8365192	2.4	6.4214516
1.2	0.8861564	2.6	18.3466771
1.3	0.9591606	2.7	98.5631519
1.4	1.0546126	2.71	168.7781551
1.6	1.3229628	2.7236071	4118.2563611

On remarque que l'erreur $\|\pi_P - \pi_Q\|_v$ croît en fonction de β et elle atteint des valeurs très grandes à la frontière de la borne supérieure de l'intervalle $[1.01, 2.7236071]$. Pour $\beta = 1.01$, l'estimation minimale de l'erreur est $\|\pi_P - \pi_Q\|_v = 0.8165805$.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons appliqué les méthodes stabilité forte et développement en série au système de files d'attente $M/M/1/N$ après une perturbation du flot des arrivées ($G/M/1/N$).