Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 12, 2013, pp. 17 - 24

3

Estimation non paramétrique dans l'étude de stabilité forte d'un modèle de risque

A. TOUAZI[a], Z. BENOUARET[b], S. ADJABI[c] et D. AÏSSANI[d]

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
[a] email : touazi_atik@hotmail.fr
[b] email : benouaret z@yahoo. fr
[c] email : adjabi@hotmail.com
[d] email : lamos bejaia@hotmail.com

Résumé In this work, we interesse in the estimation of probability density f of the amount of claims, with modified gamma kernel estimator, in order to study the strong stability method in the classical risque model $\mathbf{P}/\mathbf{G}$ (exponential distribution between two consecutive arrival and general distribution of claim amount). we use the simulation approach in order to evaluate numerically the approximation error between the $\mathbf{P}/\mathbf{P}$(exponential distribution between two consecutive arrival and exponential distribution of claim amount) and $\mathbf{P}/\mathbf{G}$ risk model.

keywords : Nonparametric estimation, Risk models, Probability of ruin, Strong stability, Simulation.

Dans ce travail, nous estimons la densité de probabilité du montant de réclamation, en utilisant le noyau Gamma modifié, pour l'étude de stabilité forte du modèle de risque classique $\mathbf{P}/\mathbf{P}$ (loi d'inter-sinistre et du montant de réclamation sont exponentielle). L'approche simulation sera utiliser afin d'évaluer numériquement l'erreur d'approximation entre les probabilités de ruine du modèle de risque idéale $\mathbf{P}/\mathbf{P}$ et du modèle de risque perturbé $\mathbf{P}/\mathbf{G}$ (loi exponentielle d'inter-sinistre et loi générale du montant de réclamation).
Mots clés : Estimation non paramétrique, Modèles de risque, Probabilités de ruine, Stabilité forte, Simulation.

3.1 Introduction

Dans le domaine des assurances, la probabilité de ruine est la mesure de risque la plus étudiée dans la littératures. En général, cette mesure est très difficile ou même impossible à évaluer d'une manière explicite, c'est pourquoi on a recours à différentes méthodes d'approximation pour estimer cette caractéristique. La méthode de stabilité forte, qui a été élaborer par Aissani et Kartashov (1983) [4, 3], connaît un large champs d'application en théorie de ruine après le travail de Kalashnikov (2000) [5], où l'auteur a présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine. Dans ce sens, plusieurs travaux ont était réalisés sur différents modèles : le modèle de risque avec investissement (Rusaityte en 2001[6]) ; les modèles de risque semi-markoviens sans investissement (Enikeeva et al en 2001 [2]) et le modèle de risque classique à deux dimensions (Benouaret et Aissani en 2007 [7]).

Pour une étude théorique, différentes lois de probabilité peuvent servir à modéliser le nombre et le montant des réclamations. Réellement, la détermination de ces lois de probabilités ne peut être obtenue qu'à partir d'un échantillon d'observations et ça nécessite l'utilisation des techniques d'estimation fonctionnelle.

Cette article consistera à étudier, en utilisant l'estimation non paramétrique par la méthode du noyau, la stabilité forte des probabilités de ruine dans un modèle de risque. En supposant que le nombre de réclamations suit une loi de Poisson, nous clarifions, par l'application de la méthode de stabilité forte, les conditions d'approximation d'un modèle de risque de distribution inconnue des montants de réclamations par le modèle de risque où le montant de réclamations suit une loi exponentielle, avec une estimation de l'erreur de cette approximation.

3.2 Méthode de stabilité forte dans le modèle de risque classique

Dans cette section, nous donnons un bref résumé sur les résultats théoriques obtenus par l'application de la méthode de stabilité forte dans un modèle de risque [5].

3.2.1 Description du modèle de risque classique

Le modèle de risque classique à une dimension est décrit par le processus suivant :

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \qquad t \geq 0, \tag{3.1}$$

où :

- u est le surplus initial.
- c représente le taux de prime constant par unité de temps.
- $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ représentant le nombre de réclamations (sinistres).
- $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées où Z_i est Le montant du $i^{ème}$ sinistre, de fonction de distribution F et de moyenne μ finie.

Parmi différentes mesures de risque, nous nous intéressons à la probabilité de ruine qui représente la probabilité que la compagnie d'assurance tombe en état d'insolvabilité.

Definition 1. *Nous appelons probabilité de ruine en temps fini t, la fonction donnée par*

$$\Psi(u,t) = \mathbb{P}(\exists s \in [0,t]/X(s) < 0), \quad \forall u \geq 0.$$

– *En temps infini, elle est définie comme suit :*

$$\Psi(u,\infty) = \mathbb{P}(\exists s \geq 0/X(s) < 0) = \Psi(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Malheureusement, l'évaluation des probabilités de ruine n'est exacte que dans quelques modèles. Dans ce sens, la plus part des résultats obtenus sur cette caractéristique sont seulement des approximations. D'où l'intérêt d'obtenir des bornes de stabilité.

3.2.2 Stabilité forte

Le critère de stabilité forte appliqué par Kalashnikov (2000) dans un modèle de risque à une dimension est le suivant [3, 4] :

Théorème 3.1 *Soit v une fonction poids fixée.Considérons une chaîne de Markov de noyau de transition P, tel que $\|P\|_v < \infty$ et possède une distribution stationnaire unique π. Supposons aussi qu'il existe une fonction non-négative h et une mesure de probabilité α tel que P peut être décomposé comme suit :*

$$P(u,.) = T(u,.) + h(u)\ \alpha(.); \tag{3.2}$$

où

$$\|\pi\|_h > 0, \qquad \|\alpha\|_h > 0; \tag{3.3}$$

et

$$\|T\|_v \leq \rho < 1. \tag{3.4}$$

Alors toute chaîne de Markov de noyau de transition P' :

$$\Delta = \|P - P'\|_v < \Delta_0 \equiv \frac{(1-\rho)^2}{1-\rho+\rho\ \|\alpha\|_v}. \tag{3.5}$$

possède une distribution stationnaire unique π' et de plus,

$$\|\pi - \pi'\|_v \leq \frac{\Delta\|\alpha\|_v}{(1-\rho)(\Delta_0 - \Delta)}. \tag{3.6}$$

Approximation par le modèle de risque classique

Le modèle de risque classique (P/P) est fortement stable par rapport à la fonction poids $v(x) = e^{\epsilon x}, x \geq 0$ [5]. Dans cette partie, nous utilisons l'aspect quantitatif de la méthode de stabilité forte afin d'estimer l'erreur d'approximation du modèle de risque (P/G) par le modèle (P/P).

Notons par $a = (\lambda, c, F)$, (respectivement $a' = (\lambda', c', F')$) le vecteur de paramètres du modèle de risque idéale (respectivement perturbé).

L'estimation de la déviation entre les noyaux de transition, obtenue par Kalashnikov [5] est donnée par la formule suivante :

$$\|P - P'\|_v \leq 2\ \mathbb{E}\ e^{\epsilon Z} |\ln \frac{\lambda c'}{\lambda' c}| + \|F - F'\|_v. \tag{3.7}$$

Sous la condition suivante qui représente le domaine de perturbation des paramètres :

$$u(a, a') \leq (1 - \rho)^2; \tag{3.8}$$

où

$$u(a, a') = 2\ \mathbb{E}\ e^{\epsilon Z} |\ln \frac{\lambda c'}{\lambda' c}| + \|F - F'\|_v; \tag{3.9}$$

nous avons l'inégalité de stabilité suivante :

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{\mu(a, a')}{(1-\rho) \quad \big((1-\rho)^2 - \mu(a, a');\big)} \tag{3.10}$$

où $\rho(\epsilon) = \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z - c\ \theta))$, θ est une variable aléatoire qui représente les inter-arrivées des réclamations suivants une loi exponentielle de paramètre λ.

Notons par Γ la borne supérieur donnée par l'inégalité de stabilité forte (3.10),

$$\Gamma = \frac{\mu(a, a')}{(1-\rho) \quad \big((1-\rho)^2 - \mu(a, a').\big)} \tag{3.11}$$

Cas particulier : Perturbation du montant de réclamation

Dans cette étude, nous tenons seulement compte de la perturbation de la loi des montants de réclamation. Cette considération va nous permettre d'étudier la sensibilité de la borne de stabilité par rapport au choix de l'estimateur. C'est-à-dire, les paramètres λ et c sont les mêmes pour les deux modèles (P/P et P/G).

D'où, la déviation entre les noyaux de transition devient :

$$\|P - P'\|_v \leq \|F - E_\mu\|_v; \tag{3.12}$$

où : F est la distribution inconnue du montant de réclamation du modèle P/G et E_μ est la distribution exponentielle du montant de réclamation du modèle P/P.
On obtient la borne suivante :

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{\|F - E_\mu\|_v}{(1-\rho)} \quad \big((1-\rho)^2 - \|F - E_\mu\|_v).\big) \tag{3.13}$$

3.3 Méthode du noyau pour l'estimation de la densité du montant de réclamation

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon issu d'une variable aléatoire X de la fonction de densité inconnue f sur l'ensemble $R \subseteq \mathbb{R}$ borné au moins d'un côté. Les estimateurs à noyau associé, asymétrique et continu sont de la forme :

$$f_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{x,h}(X_i); \tag{3.14}$$

où h est le paramètre de lissage et $K_{x,h}$ est le noyau associé continu asymétrique.

3.3.1 Noyau Gamma modifié

Le noyau associé gamma a été introduit par Chen [8] pour estimer des densités à support $R = [0, \infty[$.
Deux classes de noyaux ont été proposées :

$$K_{\frac{x}{h}+1,h}(u) = \frac{u^{\frac{x}{h}} exp(\frac{-u}{h})}{h^{\frac{x}{h}+1}\Gamma(\frac{x}{h}+1)}, \tag{3.15}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty exp(-t)t^{\alpha-1}dt$. Son estimateur associé est donné par :

$$f_h^g(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{\frac{x}{h}+1,h}. \tag{3.16}$$

La deuxième classe est le noyau Gamma modifié qui est donné comme suit :

$$K_{\rho_h(x),h}(u) = \frac{u^{\rho_h(x)-1} exp(\frac{-u}{h})}{h^{\rho h(x)}\Gamma(\rho h(x))}, \tag{3.17}$$

où

$$\rho_h(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & \text{si} \quad x \geq 2h; \\ \frac{1}{4}(\frac{x}{h})^2 + 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2h. \end{cases} \tag{3.18}$$

L'estimateur à noyau gamma modifié est donné par :

$$f_h^{\rho_h}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{\rho_h(x),h}(X_i). \tag{3.19}$$

P. Malec et M. Schienle (2012) [10], ont proposés Deux types d'améliorations sur la fonction $\rho_h(x)$.

$$\rho_h^1(x) \begin{cases} [\frac{1}{4}(\frac{x}{hr})^2+1][r+2h(1-r)] & \text{si} \quad 0 \le x < 2hr; \\ \frac{x}{hr}(r+2h-x) & \text{si} \quad 2hr \le x < 2h; \\ \frac{x}{h} & \text{si} \quad x \ge 2h. \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\rho_h^2(x) \begin{cases} \frac{1}{4}(\frac{x}{hr})^2+1 & \text{si} \quad 0 \le x < 2hr; \\ \frac{x}{hr} & \text{si} \quad x \ge 2hr. \end{cases} \tag{3.21}$$

où $r \in]0,1]$ et pour $r = 1$, pour les deux cas(ρ_h^1 et ρ_h^2), on revient au noyau Gamma standard(ρ_h).

Les nouveaux estimateurs à noyau Gamma sont donnés respectivement comme suit :

$$f_h^{\rho_h^1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{\rho_h^1(x),h}(X_i); \tag{3.22}$$

et

$$f_h^{\rho_h^2}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{\rho_h^2(x),h}(X_i). \tag{3.23}$$

3.3.2 Noyau Réciproque-Inverse-Gaussien

Afin de faire une comparaison avec le noyau Gamma, nous utilisons le noyau Réciproque-Inverse-Gaussien [9] qui a la forme suivante :

$$K_{RIG(\frac{1}{x-h},\frac{1}{h})}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi hu}} exp(\frac{-(x-h)}{2h}(\frac{u}{x-h} - 2 + \frac{x-h}{u})) \tag{3.24}$$

l'estimateur de f est donné comme suit :

$$f_h^{RIG}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{RIG(\frac{1}{x-h},\frac{1}{h})}(X_i) \tag{3.25}$$

3.3.3 Méthodes de validation croisée pour le choix du paramètre de lissage h

Le paramètre de lissage h est choisi de façon à minimiser le critère de validation croisée biaisée qui est donné par :

$$VCB(h) = \frac{h^4}{4}\sigma_K^4[\int_0^\infty (f_h''(x))^2 dx - \frac{\int_0^\infty (K''(u))^2 du}{nh^5}] + \frac{\int_0^\infty (K)^2(y)dy}{nh}; \tag{3.26}$$

où

$$\sigma_K^2 = \int_0^\infty u^2 K(u) du.$$

3.4 Simulation

Nous estimons la fonction de densité des montants de réclamation, avec les différents noyaux présentés dans la section précédente et nous évaluons numériquement l'erreur Γ, qui correspond à la borne de stabilité forte de la déviation des probabilités de ruine entre le modèle P/P et le modèle P/G.
Afin de réaliser cette étude numérique, nous avons besoins d'un n-échantillon des montants des réclamations pour pouvoir estimer par la méthode du noyau la densité de probabilité f_h. Pour cela, nous prenons la loi de Cox2 de paramètres μ_1,μ_2 et a. Tous les résultats obtenus par les différents estimateurs à partir de l'échantillon généré seront comparés avec les résultats obtenus par la loi théorique.

Étapes de simulation

1. Génération d'un n-échantillon de fonction de répartition F du montant de réclamation supposé inconnue ;
2. Estimation de la densité f par f_h en utilisant le noyau GAM, GAM1 et GIR ;
3. Introduire le taux moyen d'arrivée des sinistres λ ;
4. Détermination du montant moyen de réclamation $\mu \leftarrow \int_0^\infty x f_h(x)$;
5. Verifier si $c > \lambda\mu$, sinon la ruine est certaine.
6. Détermination du domaine de ϵ tel que $\epsilon_{min} < \epsilon < \epsilon_{max}$
   où : ϵ_{min}(respectivementϵ_{max}) est la plus petite valeurs (respectivement la plus grande valeur) qui vérifie les deux conditions suivantes :
   $$0 < \epsilon < min\{\frac{1}{\mu}, \frac{c-\lambda\mu}{cu}\} \text{ et } u(a,a') < (1-\rho(\epsilon))^2$$
7. Détermination de l'erreur d'approximation $\Gamma = \frac{u(a,a')}{(1-\rho)((1-\rho)^2-u(a,a'))}$

Afin de réaliser cette étude numérique, nous avons besoin d'un n-échantillon des montants des réclamations pour pouvoir estimer, par la méthode du noyau, la densité de probabilité f_h. Pour cela, nous prenons la loi de $Cox2(\mu_1 = 8, \mu_2 = 2, \alpha = 0.005)$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} (1-\alpha)\mu_1 e^{-\mu_1 x} + \frac{\alpha\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\mu_1 e^{-\mu_1 x} + \frac{\alpha\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\mu_2 e^{-\mu_2 x}, & \text{si } x \geq 0 \text{ et } \mu_1 \neq \mu_2; \\ (1-\alpha)\mu_1 e^{-\mu_1 x} + \alpha\mu_1 e^{-\mu_1 x}, & \text{si } x \geq 0 \text{ et } \mu_1 = \mu_2; \\ 0. & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Dans ce cas, nous prenons :
- Le taux moyen d'arrivé des sinistres $\lambda = 0.1$;

– le taux de prime $c = 5$;
– La taille de l'échantillon $n = 200$;
– Le nombre de simulation $R = 100$.

En utilisant le logiciel MATLAB 7.4(R2007a), les résultats de cette simulation sont présentés dans le tableau 3.1.

	$f(x)$	$f_h^{GAM}(x)$	$f_h^{GAM1}(x)$	$f_h^{RIG}(x)$
montant moyen de réclamation μ	0.5004	0.4922	0.51	0.5104
$0 < \epsilon < min\{\frac{1}{\mu}, \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\}$	]0,1.9786[	]0,2.0119[	]0,1.9408[	]0,1.9392[
$\parallel F - E_{\frac{1}{\mu}} \parallel_v$	0.0015	0.0418	0.0262	0.0345
$\mathit{\Gamma}$	0.0018	0.0601	0.0413	0.0440

Table 3.1. Borne de stabilité forte avec les différents estimateurs.

Discussion.

Dans le tableau 3.1, on remarque que l'erreur d'approximation sur les probabilités de ruines des modèles P/P et P/G est donnée en utilisant l'estimateur avec le noyau RIG($\mathit{\Gamma} = 0.044$), l'estimateur avec le noyau GAM($\mathit{\Gamma} = 0.0601$) et l'estimateur avec le noyau GAM1 ($\mathit{\Gamma} = 0.0413$). De plus, cette dernière erreur est la plus proche de celle donnée en utilisant la densité théorique $f(x)$ ($\mathit{\Gamma} = 0.0018$).

Références

1. S. Asmussen. *Ruin Probabilities.* Word Scientific : Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2000.
2. F. Enikeeva, V. Kalashnikov and D. Rusaityte. continuity estimates for ruin probabilities. *Scand. Actuar. J.*, 1, 18-39, 2001.
3. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht.*, 1996.
4. D. Aissani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernel. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R*, ser. A, 11, 3-5, 1983.
5. V. Kalashnikov. The stability Concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*, 2000.
6. D. Rusaityte. Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modualited risk model with investments. *Laboratory of Actuarial Mathematics, university of Copenhagen. Working Paper Nr. 178*, 2001
7. Z. Benouaret and D. Aissani. Strong Stability in a Two-Dimensional Classical Risque Model with Independent Claims. *Scand. Actuar. J. 2, 83-93*, 2010.
8. SX. Chen. Gamma Kernel estimators for density functions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics 52, 471-480*, 2000.
9. O. Scaillet. Density estimation using inverse and reciprocal inverse Gaussian kernels. *Journal of Nonparametric Statistics, 16, 217-226*, 2004.
10. P. Malec and M. Schienle. Nonparametric Kernel Density Estimation Near the Boundary *SFB 649 'Economic Risk' Berlin*, 2012.