Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 12, 2013, pp. 5 - 10

1

Décomposition Stochastique

N. DJELLAB

Laboratoire LaPS Université Badji Mokhtar Annaba,
email : djellab@yahoo.fr

Résumé Studying retrial queuing systems presents significant analytical challenges. Results exist for some of these systems while for others there is poor information on them. In addition, the obtained are generally of a complexity that round out their interpretations are restricted in practice. To overcome these difficulties, an approach based on the stochastic decomposition property (SDP) that a model may possess is often used. This property offers the advantages of simplifying the resolution of complex models. Thus, in this work, we first review the stochastic decomposition property of waiting models with vacancies. We will then summarize some of the results on retrial queuing systems. Finally, the conclusion is drawn that some of the problems with retrial queueing models and their resolution can be simplified if they are considered as problems with vacancies models.

Key words : Retrial queuing systems, stochastic decomposition, Waiting models with vacancies

La théorie des files d'attente constitue une approche pour la modélisation stochastique, l'évaluation des performances et le contrôle des systèmes réels. Elle est la plus apte à fournir une estimation quantitative d'un système. Depuis les années 1980, un regain d'intérêt est constaté pour les modèles d'attente avec rappels, et ceci du point de vue mathématique, numérique ainsi que des applications pratiques (pour résoudre les problèmes de performance de certains systèmes réels, notamment des réseaux de télécommunication).On constate que l'étude des systèmes de files d'attente avec rappels présente de grandes difficultés analytiques. Les résultats détaillés existent pour certains modèles tandis que pour les autres on a une pauvre information. De plus, les résultats obtenus sont en général d'une complexité particulière (ils contiennent des transformées de Laplace, des expressions intégrales, ...) et donc d'une interprétation restreinte en pratique. Pour pallier à cette difficulté, on fait souvent appel à une approche basée sur la propriété de décomposition stochastique (PDS) que peut posséder un modèle. Elle offre les avantages de simplification de résolution de modèles complexes.

Le concept général de la propriété en question d'un système de files d'attente $M/G/1$ est défini de la manière suivante : le nombre de clients se trouvant dans le système à une date aléatoire est distribué comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes ou plus ; l'une de ces variables représente le nombre de clients se trouvant dans le système $M/G/1$

ordinaire à une date aléatoire (le serveur est toujours disponible). Les systèmes évoqués sont en régime stationnaire. Cette propriété a été observée auparavant pour les systèmes d'attente avec vacances. Dans un certain sens, les modèles d'attente avec rappels peuvent être considérés comme un type particulier des modèles avec vacances, où les vacances commencent après chaque durée de service et leur durée dépend du processus des arrivées et de l'état du système. Pour les modèles avec vacances, la propriété de décomposition stochastique a lieu aussi bien pour la distribution stationnaire de la taille du système que pour le temps d'attente. Pour les modèles avec rappels, la validité de PDS pour le temps d'attente est une conjoncture. Cependant, cette propriété pour le nombre de clients dans le système a été prouvée pour certains modèles avec rappels.
Dans un premier temps, nous passons en revue la propriété de décomposition stochastique des modèles d'attente avec vacances. Puis, nous ferons une synthèse de certains résultats consacrés aux systèmes de files d'attente avec rappels.

1.1 Modèles d'attente avec vacances

Soit le modèle de base qui est celui de type $M/G/1$. Ajoutons une suite de vacances $\{V_k\}$ et supposons qu'elle est indépendante du processus des arrivées et du processus de service. Il s'agit d'une suite composée de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées. La décomposition stochastique pour le nombre de clients dans le système M/G/1 avec vacances dans le cas d'un service exhaustif (les clients, qui arrivent dans le système, jouissent donc d'une priorité sans préemption sur les vacances) a été observée par Doshi (1986). Une première étude approfondie sur les modèles avec vacances dans le cas d'un service non-exhaustif a été réalisée par Gaver (1962). En introduisant la mesure de performance " période d'accomplissement du service ", l'auteur a explicitement établi la validité de la propriété de décomposition stochastique. Il a également justifié la relation entre les modèles avec vacances et ceux avec priorité. Cependant, ce sont Fuhrmann et Cooper (1985) qui ont défini une série d'hypothèses caractérisant les systèmes de files d'attente vérifiant la propriété de décomposition stochastique, particulièrement pour les systèmes d'attente avec vacances généralisées.
Dans le cas où le système est en régime stationnaire, on a la décomposition suivante pour la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système à un instant arbitraire d'accomplissement du service, $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = \Pi(z)\chi(z),$$

où $\Pi(z)$ est la fonction génératrice pour le nombre de clients dans le système $M/G/1$ ordinaire sans vacances (équation de Pollaczek-Khintchine), $\chi(z)$ est la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système étant donné que le serveur est en vacances. Ce résultat est connu comme celui valable pour tout système d'attente avec vacances. Il rend possible de se concentrer uniquement sur l'étude des effets des vacances sur le nombre de clients dans le système étant donné que le serveur est en vacances.

Dans (Gelenbe et Iasnogorodski, 1980), sous l'hypothèse que le temps inter-arrivées est de loi générale, une formule importante a été obtenue. Cette dernière lie le temps d'attente d'un système avec vacances au temps d'attente d'un système GI/G/1 ordinaire.

1.2 Modèle $M/G/1$ avec rappels

Soit le modèle général de type $M/G/1$ auquel nous ajoutons la description du phénomène de tentatives répétées (rappels). On peut constater que les vacances du serveur débutent après chaque service accompli, et le serveur se met à nouveau selon la compétition entre deux flux indépendants. L'un des flux est poissonnien et correspond aux clients primaires ; l'autre (correspondant aux clients en orbite) possède une structure complexe et son intensité dépend du nombre de clients en orbite. Par conséquent, le modèle sans vacances est le système d'attente ordinaire sans rappels, et les vacances sont occasionnées par les tentatives répétées.

La décomposition stochastique pour le nombre de clients dans le système $M/G/1$ avec rappels a été observée par Yang et Templeton (1987). En supposant que le temps inter-rappels suit une loi exponentielle, les auteurs ont obtenu le résultat suivant sur la décomposition stochastique pour la fonction génératrice $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$ de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite $\{\mathrm{N}(\xi_n), n \geq 1\}$ lorsque $n \to \infty$:

$$\varphi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\widetilde{\mathrm{B}}(\lambda - \lambda z)}{\widetilde{\mathrm{B}}(\lambda - \lambda z) - z} \frac{\Phi(z)}{\Phi(1)}. \tag{1.1}$$

Le facteur $\dfrac{(1-\rho)(1-z)\widetilde{\mathrm{B}}(\lambda - \lambda z)}{\widetilde{\mathrm{B}}(\lambda - \lambda z) - z}$ est l'équation de Pollaczek-Khintchine pour le nombre de clients dans le système $M/G/1$ classique. Il est indépendant du temps inter-rappels. Le facteur $\dfrac{\Phi(z)}{\Phi(1)}$ est la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/G/1$ avec rappels étant donné que le serveur est libre.

Yang et al. (1994) ont exploré la propriété de décomposition du système $M/G/1$ avec rappels et ont prouvé que cette propriété est toujours vrai pour la distribution générale du temps inter-rappels. Le modèle considéré comprend le mécanisme des rappels qui dépend du nombre de clients en orbite. Les rappels d'un même client en orbite forment un processus de renouvellement dont la loi générique est arbitraire. Ainsi dans 1.1, le second facteur peut contenir n'importe quelle structure de fonction génératrice pour le temps inter-rappels de distribution générale.

La décomposition stochastique simplifie la résolution des modèles caractérisés par une grande interférence entre les composants et de ce fait sont difficiles à décrire. Par conséquent, la décomposition stochastique se présente comme un moyen intéressant pour effectuer les investigations sur les modèles avec pannes du serveur.

Considérons le système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels et supposons que le serveur est sujet à des pannes et réparations aléatoires (Kulkarni et Choi, 1990). Aissani et Artalejo (1998) ont introduit un système auxiliaire à espace d'attente illimité, pannes du serveur et option pour quitter le système à la panne pour établir la décomposition stochastique suivante pour la fonction génératrice $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$ de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite $\{\mathrm{N}_0(\xi_n, n \geq 0)\}$ (aux instants où le serveur est libre et opérationnel) lorsque $n \to \infty$: soit $\rho < 1$,

$$\varphi(z) = \overline{\Phi}(z)\frac{P_0(z)}{P_0(1)}; \tag{1.2}$$

où $\overline{\Phi}(z)$ est la fonction génératrice de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite aux instants où le serveur devient libre et opérationnel (liée au système auxiliaire, sans rappels). Le terme $\dfrac{P_0(z)}{P_0(1)}$ est la fonction génératrice pour le nombre de clients en orbite étant donné que le serveur est libre et opérationnel.

Dans Djellab (2002, 2006), l'hypothèse de validité de 1.2 dans le cas de la distribution générale du temps inter-rappels (sous certains conditions) est vérifiée à l'aide d'une méthode d'approximation. En outre, les rappels d'un même client en orbite forment un processus de renouvellement dont la loi générique est arbitraire.

La propriété de décomposition stochastique présente diverses applications pratiques dans le modèle $M/G/1$ avec rappels (Artalejo et Falin, 1994). Elle permet de résoudre les problèmes d'obtention des moments de $\mathrm{N}_0(\mathrm{t})$ et de convergence d'un système $M/G/1$ avec rappels vers un système limite lorsque le taux des rappels $\theta \to \infty$.

1.3 Autres modèles avec rappels

La validité de la PDS a été étendue aux modèles avec rappels et arrivées par groupes (Yang et Templeton, 1987). On observe aussi cette propriété dans le système $M_2/G_2/1$

avec rappels et deux types de clients : prioritaires et non prioritaires (Falin et al., 1993 ; Atencia et Moreno, 2005 ; Arivudainambi et al. , 2009). A l'aide de l'approche génératrice, Artalejo (1997) a étudié un système d'attente de type $M/G/1$ avec rappels constants et vacances dans le cas d'un service exhaustive. En supposant que le système est en régime stationnaire et à l'aide d'un système auxiliaire $M/G/1$ avec rappels et sans vacances, l'auteur a obtenu la décomposition stochastique pour le nombre de clients dans le système. Cette décomposition fournit trois composantes où la première est liée au système $M/G/1$ ordinaire, la seconde aux rappels et la troisième aux vacances propres. Le résultat similaire a été obtenu par Boualem et al. (2011) dans le cas des rappels classiques. Encore, dans Langaris et Moutzoukis (1995), la validité de la propriété de décomposition stochastique a été prouvée pour un système comprenant des rappels, arrivées par groupes et vacances.
Dans la majorité des recherches, les tentatives répétées constituent un processus de Poisson de taux constant. Ce que nous pouvons voir, par exemple, dans le travail de Yang et Li (1994), où le modèle $M/G/1$ avec rappels comprend les pannes au début du service ainsi que la distribution exponentielle du temps inter-rappels. Krishna Kumar et al. (2002) ont ajouté le retour d'un client servi ainsi que la distribution générale du temps inter-rappels au modèle de Yang et Li. Cependant le mécanisme des rappels restait indépendant du nombre de clients en orbite : les clients en orbite forment une file FIFO, seul le client en tête de la file a le droit d'accéder au serveur. Ce système a été également étudié dans le contexte d'un modèle $M/G/1$ avec vacances généralisées, où les vacances ont lieu après chaque service. En supposant que le système est en régime stationnaire et à l'aide de la méthode des variables supplémentaires, la propriété suivante a été établie : le nombre de clients dans le système avec rappels, feedback et pannes au début du service est la somme de deux variables aléatoires : le nombre de clients dans le système ordinaire $M/G/1$ avec retour et le nombre de clients dans le système étant donné que le serveur et en vacances généralisées.
Enfin, on déduit la conclusion suivante : certains problèmes des modèles d'attente avec rappels et leurs résolutions peuvent être simplifiés si on les considère comme les problèmes des modèles avec vacances.
Mots-clés : Système de files d'attente, Rappels, Vacances du serveur, Chaîne de Markov induite, Service exhaustif, Décomposition stochastique.

Références

1. A. Aissani and J. R. Artalejo. On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing Systems* **30 (3-4)**, 309-321, 1998.

2. D. Arivudainambi, I. Averbakh and O. Berman. Stationary analysis of a single server retrial queue with priority and vacation. *International Journal of Operational Research* **5, 26-47**, 2009.
3. J. R. Artalejo. Analysis of an $M/G/1$ queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computers and Operation Research* **24 (6)**, 493-504, 1997.
4. J. R. Artalejo and G. I. Falin. Stochastic decomposition for retrial queues. *TOP* **2**, 329-342, 1994.
5. I. Atencia and P. Moreno. A single server retrial queue with general retrial times and Bernoulli schedule. *Applied Mathematics and Computation* **162**, 855-880, 2005.
6. M. Boualem, N. Djellab and D. Aissani. An M/G/1 retrial queue with exhaustive service and server vacations. *Journal of Communication and Computer* **8**, 720-726, 2011.
7. N. V. Djellab. On the $M/G/1$ retrial queue subjected to breakdowns. *RAIRO : Operations Resarch* **36**, 299-310, 2002.
8. N. V. Djellab. On the single server retrial queue. *YUJOR* **16 (1)**, 45-53, 2006.
9. B. T. Doshi. Queueing systems with vacations : A survey. *Queueing Systems* **1**, 29-66, 1986.
10. G. I. Falin, J. R. Artalejo and M. Martin. On the single server retrial queue with priority customers. *Queueing Systems* **14**, 439-455, 1993.
11. G. I. Falin and J. G. C. Templeton. Retrial Queues. *Chapman and Hall*, 1997.
12. S. W. Fuhrmann and R. B. Cooper. Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations. *Operations Research* **33**, 1117-1129, 1985.
13. D. P. Gaver. A waiting line with interrupted service including priorities. *J. Roy. Stat. Soc.* **B25**, 73-90, 1962.
14. E. Gelenbe and R. Iasnogorodski. A queue with server of walking type. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*(B), **16 (1)**, 63-73, 1980.
15. B. Krishna Kumar, S. Pavai Madheswari and Vijayakumar. The $M/G/1$ retrial queue with feedback and starting failure. *Applied Mathematical Modelling* **26 (11)**, 1057-1075, 2002.
16. V. G. Kulkarni and B.D. Choi. Retrial queue with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems* **7**, 191-208, 1990.
17. C. Langaris and E. Moutzoukis. A retrial queue with structured batch arrivals, priorities and server vacations. *Queueing Systems* **20**, 341-368, 1995.
18. T. Yang et al. An approximation method for the $M/G/1$ retrial queue with general retrial times. *EJOR* **76**, 552-562, 1994.
19. T. Yang and H. Li. The $M/G/1$ retrial queue with the server subject to starting failures. *Queueing Systems* **16**, 83-96, 1994.
20. T. Yang and J.G.C. Templeton. A survey on retrial queues. *Queueing Systems* **2**, 201-233, 1987.