Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 11, 2012, pp. 73 - 76

17

Quelques aspets statistiques et numériques pour l'étude de la stabilité forte des systèmes de files d'attente

Aicha BARECHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : aicha_bareche@yahoo.fr

Résumé L'objectif de ce travail est de montrer l'intérêt de combiner certains aspects statistiques et numériques au principe de stabilité forte pour l'étude de quelques systèmes d'attente, afin de substituer les caractéristiques d'un système réel complexe par un autre système idéal simple et de déterminer l'erreur d'approximation des distributions stationnaires entre les deux systèmes.

Mots clés : Analyse statistique, Système d'attente, Stabilité forte, Test de Student, Simulation.

17.1 Introduction

L'objectif de ce travail est de retracer, sous forme d'une synthèse, le bilan de dix ans d'activités de recherche dans les domaines de mathématiques et de mathématiques appliquées.

Dans la continuité de nos travaux de Magister, où l'on s'est intéressé aux méthodes d'analyse statistique des systèmes d'attente [10], on a développé le cas particulier du choix de distributions des lois régissant ces derniers, lié à l'aspect identification des modèles. En effet, dans la pratique, on est généralement confronté à des situations où la fonction densité d'une des lois régissant un système de files d'attente donné est générale et inconnue. De ce fait, nous avons discuté le problème d'estimation non paramétrique de fonctionnelles intervenant dans les systèmes d'attente, plus précisément la méthode du noyau vu sa souplesse d'utilisation et ses bonnes propriétés statistiques asymptotiques [2, 5, 8, 9, 11, 12, 13]. On a traité particulièrement le problème de selection du paramètre de lissage [15].

En outre, les distributions utilisées dans les systèmes d'attente sont pour la plupart bornées à gauche, ce qui crée un problème d'effet de bord lors de l'estimation des fonctions densité. Ce dernier a été abordé dans [7, 12, 14].

Par ailleurs, une des conditions liées à l'application de la méthode de stabilité forte aux systèmes d'attente est que la perturbation faite doit être petite, dans le sens que la densité de la loi générale régissant un système d'attente doit être proche de celle de la loi exponentielle qui est définie sur un support borné $[0, +\infty[$. Or, quand on applique la méthode du noyau dans ce cas on est confronté au problème des effets de bord, donc on doit recourir à certaines techniques permettant leur correction [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13].

D'autres aspects numériques liés à la simulation ont été considérés dans nos travaux, à savoir la simulation à événements discrets et le test de Student pour la comparaison de performances de deux systèmes d'attente [1, 4], les méthodes d'inversion [11] et de composition [1, 2, 3, 5, 8, 9, 11] pour la génération de variables aléatoires, ainsi que quelques méthodes numériques (méthode du point fixe [2, 5, 6, 9, 11], méthode de dichotomie [2, 8] et décomposition de Hahn-Jordan [1]).

17.2 Analyse statistique des systèmes d'attente

L'analyse statistique est une partie intégrale de la formulation d'un modèle mathématique pour un système réel. En effet, ce modèle n'est d'une grande utilité que s'il est lié au système par l'analyse des données empiriques. Dans la littérature connue sur l'analyse statistique des systèmes de files d'attente, les principaux aspects considérés englobent l'identification du modèle, l'estimation, les tests d'hypothèse, l'inférence,... Or tous ces problèmes ne sont pas concrètement présentés dans les ouvrages classiques de files d'attente et de processus aléatoires.
C'est pourquoi nous avons considéré dans notre thèse de Magister les points suivants :
- Actualisation de la synthèse sur les méthodes d'analyse statistique des systèmes d'attente ;
-Classification et algorithme pour certains systèmes classiques ;
-Utilisation dans la vérification de certaines propriétés qualitatives (stabilité).

Dans [10], nous avons mis l'accent sur ce domaine à la fois important et peu exploré. Il s'agit d'identifier les différentes méthodes utilisées dans l'analyse statistique des systèmes de files d'attente et d'indiquer la manière avec laquelle elles sont applicables pour l'évaluation des performances de ces derniers. Un intérêt particulier est accordé au choix des distributions dans l'identification des modèles, plus précisément au choix des distributions des lois régissant les systèmes d'attente. L'exemple de l'application de la méthode du noyau dans l'étude de la stabilité forte des systèmes d'attente est donné.

17.3 Stabilité forte des systèmes d'attente

Le problème de stabilité forte des modèles stochastiques est un thème d'actualité qui a engendré plusieurs travaux et résultats d'intérêt théorique et pratique. L'applicabilité de cette méthode a été bien démontrée et documentée pour plusieurs modèles stochastiques. Cependant, cette applicabilité n'est pas aussi évidente, particulièrement pour des systèmes complexes. En effet, plusieurs problèmes surviennent à la fois sur le plan théorique et pratique. Du point de vue théorique, les difficultés résident dans l'identification du paramètre à perturber, l'expression du noyau de transition et spécialement dans le choix des normes poids. Par ailleurs, notons qu'en pratique les paramètres du modèle ne sont connus que de manière partielle puisque ils sont obtenus par des méthodes statistiques. Dans ce sens, un des aspects d'intérêt à considérer est lorsque une distribution gouvernant un système d'attente est générale et inconnue, alors on fait appel aux méthodes d'estimation non paramétrique pour estimer sa fonction densité.

Notre travail s'inscrit dans ce cadre. On essaye de résoudre certains problèmes rencontrés lors de la mise en oeuvre de la méthode de stabilité forte en pratique. Notre contribution concerne, plus précisément, la discussion et la combinaison de quelques aspects statistiques et numériques dans le but de prouver, d'améliorer et d'étendre le champ d'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude de certains systèmes d'attente classiques lorsque l'une des lois les régissant est générale et inconnue. L'approche non paramétrique la plus utilisée est la méthode du noyau de Parzen-Rosenblatt. C'est une méthode commode, simple, robuste et efficace permettant d'obtenir une estimation de la densité pour une v.a. réelle, ne nécessitant pas un choix multiple de paramètres. Cet estimateur dépend de deux paramètres essentiels, à savoir le noyau K et le paramètre de lissage h_n. Il est connu que le choix du noyau K n'est pas d'une grande importance, donc le choix des paramètres se ramène uniquement au choix du paramètre h_n.
Ce dernier a longtemps été un sujet de considération et plusieurs méthodes ont été adoptées. On cite entre autres les méthodes de validation croisée et les méthodes de ré-injection (plug-in). Ce problème a été revisité dans [15].

L'estimation de la densité de probabilité par la méthode du noyau de Parzen-Rosenblatt présente des inconvénients dans le cas où le support de la distribution est borné. Le support de la distribution associée à l'estimation ne coïncide généralement pas avec le support réel, et ceci est gênant en pratique, si on dispose d'informations a priori à son sujet. On observe en pratique dans ce cas des "bavures" dans les nombres négatifs, l'estimation accordant une probabilité non nulle en général à $\mathbb{R}^-$ en contradiction avec l'hypothèse de positivité.

Pour remédier à ce problème, plusieurs méthodes ont été développées (l'estimateur "image miroir", l'estimateur asymétrique à noyau Gamma, les histogrammes lissés).

Test statistique de Student pour la comparaison de deux systèmes d'attente

Le problème de tests d'hypothèse survient quand on a besoin de faire des inférences sur les paramètres des distributions des arrivées et temps de service ou des mesures comme l'intensité du trafic et les formes de distributions basées sur les données échantillonnées (obtenues en général par simulation) d'un système.
Dans [1] (respectivement [4]), nous avons utilisé ce test pour la comparaison des caractéristiques des systèmes $G/G/1$ et $G/M/1$ (respectivement $G/G/1$ et $M/G/1$).

17.3.1 Aspects numériques et simulation

Quand les résultats ne peuvent pas être obtenus analytiquement, on doit recourir à la simulation pour étudier les propriétés d'un processus particulier. La simulation fournit aussi un moyen pour examiner les résultats analytiques dans le contexte d'une situation pratique. L'un des plus importants usages de cette approche est la comparaison de performances de deux ou plusieurs systèmes.
Dans la totalité de nos travaux nous avons fait appel à des méthodes numériques et à certaines techniques de simulation, que nous décrivons brièvement dans ce qui suit :

Génération de nombres aléatoires

Dans nos travaux, nous avons souvent eu à supposer que l'une des lois (supposée générale) gouvernant un système d'attente devait être proche de la loi exponentielle. C'est dans ce sens que dans nos exemples numériques nous avons eu à utiliser certaines méthodes de génération de v.a., à savoir la méthode de "l'inversion" pour la génération d'une v.a. issue d'une loi exponentielle [11] et la méthode de "composition" pour générer des v.a. issues de lois hyper-exponentielle [2, 3, 5, 9, 11] et de Cox2 [1, 3, 8].

Simulation à événements discrets

L'une des méthodes de simulation les plus utilisées est *la simulation à événements discrets*. C'est une modélisation des systèmes dans lesquels le changement d'état s'effectue à des instants discrets de l'axe temporel. Nous avons considéré cette technique pour simuler les systèmes à approcher considérés dans [1, 4].

Méthodes numériques

Méthode du point fixe

Dans [2, 5, 6, 9, 11], nous avons considéré le problème de l'évaluation numérique de l'erreur sur la distribution stationnaire lors de l'approximation du système $G/M/1$ par le système $M/M/1$.
Pour chercher la distribution stationnaire α_i du système $G/M/1$ donnée par :

$$\alpha_i = (1-x)x^i, \quad \forall i \geq 0, \tag{17.1}$$

nous avons utilisé la méthode du point fixe pour retrouver numériquement la solution unique x du système :

$$x = \int e^{-\gamma t(1-x)} g(t)dt, \tag{17.2}$$

où g est la fonction densité de la loi générale G des arrivées.

Méthode de dichotomie

On a utilisé la méthode de dichotomie pour déterminer, par exemple, l'erreur minimale $Err^{'}$ sur la distribution stationnaire ainsi que certains paramètres liés à son évaluation, dans l'algorithme élaboré dans [2, 8] qui permet l'approximation du système $M/G/1$ par le système $M/M/1$.

Décomposition de Hahn-Jordan

La mesure $|G - E_\mu|$ peut être réécrite comme étant la différence entre deux mesures de probabilités, en utilisant la décomposition de Hahn-Jordan. En effet, si on note par g et f, respectivement, les fonctions densité de G et E_μ, on peut écrire : $|m| = |g - f|$, où la variation totale $|m|$ est définie comme suit : $|m| = m^+ + m^-$, où

$$\begin{aligned} m^+ &= \max(g(x) - f(x), 0), \\ m^- &= \max(f(x) - g(x), 0). \end{aligned}$$

Cela nous a aidé dans l'analyse numérique effectuée dans notre cas d'étude considéré dans [1], lors de l'approximation du système $G/G/1$ par le système $G/M/1$ (où on a considéré g comme la fonction densité de la distribution générale G supposée Cox2) pour déterminer les mesures de variation W^* et W_0 caractérisant la proximité des deux systèmes.

17.4 Application de techniques statistiques et numériques à l'étude de stabilité forte de systèmes d'attente classiques

17.4.1 Systèmes markoviens : Exemple du système $M/M/1$

Cette thématique a été considérée dans nos travaus de thèse de Doctorat. On s'est intéressé à deux types de perturbation :
– Perturbation du flot des arrivées : dans [2, 5], on a évalué la proximité des systèmes $G/M/1$ et $M/M/1$.
– Perturbation de la durée de service : dans [8], on a évalué la proximité des systèmes $M/G/1$ et $M/M/1$.

17.4.2 Systèmes non markoviens : Exemple du système $G/G/1$

Après nos travaux de thèse de Doctorat, on s'est penché sur le problème de la recherche d'approximations numériques pour le système $G/G/1$. Là aussi, nous avons considéré les deux même types de perturbation :

- Dans [4], on s'est intéressé à l'approximation du système $G/G/1$ par le système $M/G/1$.

- Dans [1], on s'est intéressé à l'approximation du système $G/G/1$ par le système $G/M/1$.

17.5 Conclusion

L'objectif principal de mes activités de recherche consiste à apporter les méthodologies permettant de résoudre les difficultés rencontrées lors de l'étude de la stabilité forte de systèmes d'attente classiques. Cela devient possible en combinant certains aspects statistiques et numériques au principe de la stabilité forte.

Les résultats obtenus montrent particulièrement l'intérêt des méthodes d'estimation non paramétrique et des techniques de correction des effets de bord pour déterminer l'erreur d'approximation des distributions stationnaires entre deux systèmes de files d'attente lors de l'application de la méthode de stabilité forte afin de substituer les caractéristiques d'un système réel complexe par un autre système idéal simple.

Références

1. A. Bareche, and D. Aïssani. Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of $G/G/1$ and $G/M/1$ queueing Systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(5) :1296–1304, 2011.
2. A. Bareche, and D. Aïssani. Kernel density in the study of the strong stability of the $M/M/1$ queueing system. *Operations Research Letters*, 36(5) :535–538, 2008.
3. A. Bareche, and D. Aïssani. Nonparametric Estimation for a Numerical Evaluation of the Proximity of $G/G/1$ and $G/M/1$ Systems. Accepté par le comité scientifique du "24th European Conference on Operational Research (EURO XXIV)", 11-14 Juillet 2010, Lisbon, Portugal, Conference book pp. 237.
4. A. Bareche, and D. Aïssani. Nonparametric Estimation for the Study of the Strong Stability of the $M/G/1$ Queueing System. Accepté par le comité scientifique du "9th Balkan Conference on Operational Research (BALCOR 2009)", 02-06 Septembre, Constanta, Roumanie, ISBN : 973-86979-9-9, Publisher : EUROGEMA EXIM, Printed in Bucharest - August 2009, Book of Abstracts pp. 6.
5. A. Bareche, and D. Aïssani. Interest of kernel density in the use of strong stability method to precise the proximity of $G/M/1$ and $M/M/1$ systems. Proceedings of the Second International Conference Valuetools'2007 (Performance Evaluation, Methodologies and Tools), 23-25 Octobre 2007, Nantes, France, ACM International Conference Proceedings Series. ICST (Institute for Computer Sciences Social Informatics and Telecommunications Engineering), ICST, Brussels, ISBN : ICST 978-963-9799-00-4, pp. 1–5.
6. A. Bareche, and D. Aïssani. Precision of an approximation error of the systems $G/M/1$ and $M/M/1$. Accepté par le comité scientifique du "XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models", 27 Août au 02 Septembre 2006, Sovata-Bai, Roumanie.
7. A. Bareche, and D. Aïssani. Boundary bias correction in nonparametric density estimation : Application to queueing systems. Colloque International "Modélisation Stochastique et Statistique (MSS'2010)", 21-23 Novembre 2010, USTHB/Alger, Recueil des résumés pp. 18.
8. A. Bareche, and D. Aïssani. Kernel density estimation in the study of the strong stability for evaluating the proximity of $M/G/1$ and $M/M/1$ systems. Colloque International Statistique des Processus et Applications (CISPA 2008), 18-19 Octobre 2008, Constantine, Actes pp. 55–58.
9. A. Bareche, and D. Aïssani. Application de la méthode du noyau dans l'évaluation numérique de la proximité des systèmes de files d'attente. Séminaire sur la Statistique et ses Applications "STAT'06", 29-30 Mai 2006, Tizi-Ouzou, Actes pp. 156–166.
10. A. Bareche, and D. Aïssani. Sur l'analyse statistique dans les systèmes de files d'attente. Colloque International MOAD 2004 : "Méthodes et Outils d'Aide à la Décision", 27-30 Novembre 2004, Saïda, Recueil des résumés pp. 48.
11. A. Bareche, and D. Aïssani. Application de la méthode du noyau dans l'étude de la stabilité forte des systèmes de files d'attente. 4ème Rencontre Internationale d'Analyse Mathématique & Applications, 26-29 Avril 2004, Sétif, Recueil des résumés pp. 130.
12. A. Bareche. Some statistical aspects to take into account when studying strong stability of stochastic models. Compte rendu des séances du Séminaire Mathématique de Béjaia 2009-2010, 20 Avril 2010, pp. 41–47.
13. A. Bareche. Strong stability in a queueing system with unknown general distribution. Séminaire Mathématique de Béjaia, 25 Février 2008, pp. 1–5.
14. A. Bareche. Correction de l'effet de bord dans la méthode du noyau. Compte rendu des séances du Séminaire Mathématique de Béjaia 2004-2005, 02 Mai 2005, pp. 53–57.
15. A. Bareche. Choix du paramètre de lissage dans la méthode du noyau. Compte rendu des séances du Séminaire Mathématique de Béjaia 2003-2004, 12 Avril 2004, pp. 67–70.