

Processus Régénératifs dans les Modèles de Risque Classique à Deux Dimensions

Safia HOCINE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

Résumé Risk models recently studied in the literature are becoming increasingly complex. Therefore, it is rare to find explicit analytical relations to calculate the ruin probabilities. In this work, we are interested to the approach of strong stability in the classical risk model in two dimensions with large claims. In the application of the quantitative aspect of the strong stability method in this model and in order to deduce a bound stability of the deviation of ruin probabilities, we will use the regenerative processes theory.

Les modèles de risque récemment étudiés dans la littérature deviennent de plus en plus complexes. Par conséquent, il est rare d'avoir des relations analytiques explicites pour le calcul de la probabilité de ruine. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approche de la stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions avec des réclamations larges. Dans l'application de l'aspect quantitatif de la méthode de la stabilité forte et afin de déduire une borne de stabilité de la déviation de la probabilité de ruine, nous utilisons la théorie des processus régénératifs.

Mots clés : Modèles de risque classique à deux dimensions, probabilité de ruine, méthode de stabilité forte.

15.1 Introduction

Dans la théorie de la ruine, le problème de stabilité a été développé dans Beirlant and Rachev (1987)[6]. C'est l'académicien Kalashnikov qui, le premier, a appliqué la méthode de stabilité forte (cf. Aïssani and Kartashov (1983)[5]) au modèle de risque[4]. En particulier il a obtenu des bornes de stabilité de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique avec un calcul explicite des constantes. Par la suite, plusieurs autres applications de la méthode de la stabilité forte ont été réalisées dans différents modèles de risque (Benouaret et Aïssani (2010)[1]).

Cependant, l'estimation de la probabilité de ruine par la méthode de stabilité forte basée sur l'approche par chaînes de Markov, rencontre des difficultés dans le cas d'un modèle de risque avec des réclamations larges. Pour pallier à cette difficulté, Kalashnikov a proposé l'utilisation de la théorie des processus régénératifs [3] [4].

Dans ce travail nous appliquons la méthode de stabilité forte et nous utilisons les processus régénératifs dans un modèle de risque spécifique. Il s'agit du modèle classique à deux dimensions avec indépendance des réclamations. Dans notre cas, le processus $\{V_n\}$ est à la fois de Markov et régénératif, si l'on choisit des instants successifs où V_n prend la valeur 0 comme époques de régénération.

15.2 Processus Régénératifs

Un processus stochastique $X = \{X(t) : t > 0\}$ est appelé processus régénératif s'il existe une variable aléatoire $R_1 > 0$ tel que :

- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$ est indépendant de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$ est stochastiquement équivalent à $\{X(t) : t > 0\}$.

R_1 appelée époque de régénération (ou temps de régénération), et on dit que X se régénère ou se réinitialise à ce point.

Ce type de processus est d'un grand intérêt dans plusieurs modèles stochastiques, comme les systèmes de fils d'attente [2]. En 2000, Kalashnikov a proposé la théorie des processus régénératifs comme solution pour l'application de la méthode de stabilité dans le modèle de risque avec des réclamations larges.

15.3 probabilités de ruine d'un modèle de risque classique à deux dimensions

Le modèle de risque classique à deux dimensions est défini comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \sum_{i=1}^{N(t)} \begin{pmatrix} Z_i^1 \\ Z_i^2 \end{pmatrix} \quad t \geq 0 \quad (15.1)$$

Ce processus stochastique, donné par la formule (15.1) représente la réserve de la compagnie d'assurance qui possède deux branches d'activité.

Le nombre de réclamations (ou de sinistres) $N(t)$ survenus jusqu'au temps $t \geq 0$ est représenté par un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

sont deux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes du processus de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, de fonction de répartition (F_1, F_2) et de moyenne (m_1, m_2) respectivement.

Dans ce modèle, le temps de ruine peut être défini de plusieurs façons. Dans ce travail, nous utilisons la définition suivante :

$$T_{som} = \inf\{t / X_1(t) + X_2(t) < 0\} \quad (15.2)$$

La probabilité de ruine en fonction du temps de ruine défini précédemment est

$$\Psi_{som}(u_1, u_2) = \mathbb{P}(T_{som} < \infty / (X_1(0), X_2(0)) = (u_1, u_2)) \quad (15.3)$$

15.4 Processus régénératifs dans le modèle de risque classique à deux dimensions

Construisons d'abord le processus inverse d'une manière à ce que sa distribution stationnaire corresponde exactement à la probabilité de ruine étudiée.

15.4.1 Processus inverse

Puisque la ruine peut seulement apparaître aux instants d'arrivée des réclamations, on peut réécrire $\Psi_{som}(u_1, u_2)$, définie par la relation (15.3), de la manière suivante :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{n \geq 1} (X_{T_n}^1 + X_{T_n}^2) < 0 / X_0^1 + X_0^2 = u\right) \quad (15.4)$$

où $u = u_1 + u_2$ et $\{T_n, n \geq 1\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes qui représentent les instants d'arrivées des réclamations.

Le processus inverse associé au modèle de risque classique à deux dimensions est de la forme suivante :

$$\forall n \geq 0, \quad V_{n+1} = (V_n - (c_1 + c_2)\theta_{n+1} + Z_{n+1}^1 + Z_{n+1}^2)_+, \quad V_0 = 0 \quad (15.5)$$

avec $T_n = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$ et θ_n est une variable aléatoire qui représente la durée de temps entre la $(n-1)$ ^{ème} et la n ^{ème} réclamation.

Suivant la forme recursive de la chaîne $\{V_n\}_{n \geq 0}$ donnée par l'équation (15.5), V_{n+1} ne dépend que de $V_n, \theta_{n+1}, Z_{n+1}^1$ et Z_{n+1}^2 , où les variables aléatoires θ_{n+1}, Z_{n+1}^1 et Z_{n+1}^2 sont indépendantes de n et de l'état du système avant T_n .

D'où, $\{V_n\}_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à espace d'état continu $E = \mathbb{R}^+$.

De plus, si on pose $\sigma_0 = 0, \sigma_{k+1} = \min\{n > \sigma_k, V_n = 0\}, k \geq 0$, alors, $\forall k \geq 0$, la chaîne $\{V_{\sigma_k+n}\}_{n \geq 0}$ est de même distribution que la chaîne initiale $\{V_n\}_{n \geq 0}$ et indépendante de $\{V_j\}_{j \leq \sigma_k}$.

A partir de cette propriété, on déduit que $\{V_n\}_{n \geq 0}$ est un processus régénératif où $\{\sigma_k\}$ sont ses temps (époques) de régénération.

En fonction de la chaîne de Markov $\{V_n\}_{n \geq 0}, \Psi_{som}(u)$ s'écrit comme suit :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P}(V_n > u) = 1 - \mathbb{P}(V_n \leq u) = 1 - G_n(u) \quad (15.6)$$

avec $G_n(u) = P(V_n \leq u)$.

15.4.2 Inégalité de stabilité

Considérons le modèle de risque classique à deux dimensions où le processus inverse associé à Ψ_{som} est donné par (15.5). Pour $\epsilon > 0$, soit $\mathbb{A}_d \subset \mathbb{A}$ le sous ensemble des valeurs admissibles perturbées du vecteur des paramètres gouvernant le modèle de risque défini par

$$\mathbb{A}_d = \left\{ \begin{array}{l} a : \mathbb{E} \left(\exp\{\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2 - (c_1 + c_2)\theta_1)\} \right) \leq \rho < 1 \\ \text{et} \\ \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2)) \leq \beta(\epsilon) < \infty \end{array} \right\} \text{ sont vérifiées }.$$

et qui contient tous les points a satisfaisants les relations ;

$$\mathbb{E} \left(\exp\{\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2 - (c_1 + c_2)\theta_1)\} \right) \leq \rho < 1$$

et

$$\mathbb{E} \exp(\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2)) \leq \beta(\epsilon) < \infty.$$

Prenons $v(u) = e^{\epsilon u}$, $u \geq 0$. Alors, si a et a' appartiennent à \mathbb{A}_d , nous obtenons la borne de stabilité suivante :

$$\sup_n |\Psi_n - \Psi'_n|_v = \sup_n |G_n - G'_n|_v \leq \frac{\gamma(\epsilon) \mu}{1 - \rho} \quad (15.7)$$

où toutes les constantes sont de formes explicites.

15.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons réalisé, en utilisant les processus régénératifs, l'application de la méthode de stabilité forte dans le modèle de risque avec des réclamations larges.

Nous avons donc clarifié les conditions d'approximation de la probabilité de ruine d'un modèle de risque perturbé par celle du modèle de risque classique à deux dimensions avec une illustration numérique de l'inégalité de stabilité obtenu.

Références

1. Z. Benouaret and D. Aïssani. Strong stability in a two dimensional classical risk model with independant claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2010, N° 2, page 83–93, 2010.
2. V. V. Kalashnikov and S. G. Foss. Regeneration and renovation in queues. *Queueing Systems Theory Appl*, vol. 08, page 211–224, 1991.
3. V. Kalashnikov. *Topics on Regenerative Process*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
4. V. Kalashnikov. The Stability concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*, 2000.
5. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R, ser. A*, 11,3–5, 1983.
6. J. Beirlant and S. T. Rachev. The problems of stability in insurance mathematics. *Insurance : Mathematics and Economics* 6, 179–188, 1987.