*Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)*
*Volume 11, 2012, pp. 11 - 13*

# 3

# La Théorie des Jeux et les Problèmes de Satisfaction de Contraintes

Kahina BOUCHAMA, Mohammed Said RADJEF et Lakhdar SAIS

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
Centre de Recherche en Informatique de Lens (CRIL), Université d'Artois (France).

**Résumé** La programmation par contraintes et la théorie des jeux constituent chacune un domaine de recherche très actif. Elles offrent des cadres de modélisation, d'analyse et de développement des outils pour la résolution de nombreuses applications dans des domaines variés tels que l'informatique, l'intelligence artificielle, le transport et la logistique, les technologies de l'information et de la communication,... etc. Dans la dynamique de leurs développements, on recense quelques travaux novateurs ayant établi certains liens entre la théorie des jeux et les problèmes de satisfaction de contraintes.
Dans ce travail, nous avons établi l'équivalence entre le concept de solution pour un problème de satisfaction de contraintes (CSP) et la notion du Z-équilibre pour le jeu qui lui est associé. Par la suite, nous avons développé un algorithme de calcul du Z-équilibre, en s'inspirant des approches par retour-arrière, connues pour la résolution des CSP.

**Mots-clès :** Z-équilibre, Problème de satisfaction de contraintes, Jeux non coopératif.

## 3.1 Position du problème

La théorie des jeux et les CSP représentent un outil puissant pour la modélisation d'une grande classe de problèmes rencontrés dans divers domaines. Ces deux théories peuvent aussi s'appliquer l'une à l'autre, ce qui a motivé l'idée de chercher à établir des équivalences entre leurs notions. Notre objectif est de démontrer les relations entre le concept de solution d'un CSP et le Z-équilibre d'un jeu associé. Comme il n'existe aucun algorithme de calcul du Z-équilibre, nous proposons un algorithme permettant d'effectuer ce calcul, en s'inspirant des approches par retour-arrière connues pour les CSP.

### 3.1.1 Les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP)

Le concept CSP vise à représenter, sous forme de contraintes, les propriétés et les relations qui existent entre les objets manipulés. Ces contraintes peuvent être décrites de multiples façons (par une équation, une inéquation, un prédicat, une fonction booléenne, une énumération des combinaisons de valeurs autorisées,. . .etc). Elles traduisent l'autorisation ou l'interdiction d'une combinaison de valeurs.

La définition formelle, proposée par Montanari en 1974, est énoncée dans [1], comme suit :

**Définition 3.1** *[2] Un problème de satisfaction de contraintes (CSP) est un problème* $(\mathcal{P})$ *caractérisé par un triplet* $(X, D, C)$*, où :*

$X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ *est un ensemble de* $n$ *variables.*

$D = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ *est un ensemble de domaines finis, où* $D_i$ *est le domaine associé à la variable* $X_i$ *représentant l'ensemble de ses valeurs possibles.*

$C = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ *est un ensemble de* $m$ *contraintes, où la contrainte* $C_i$ *est définie par un sous-ensemble de variables* $\{X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_{n_i}}\} \subseteq X$.

La résolution d'un CSP consiste à affecter une valeur pour chaque variable $X_i$ de façon que toutes les contraintes soient satisfaites.

On montrera dans la section suivante comment peut-on modéliser le CSP($\mathcal{P}$) par un jeu noncoopératif.

## 3.2 Représentation d'un CSP sous forme d'un jeu fini

Associons à chaque variable $X_i$ un joueur $i$. Ainsi, on aura autant de joueurs que de variables. Notons alors par $I = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble de ces joueurs.

L'ensemble $S_i$ des stratégies pures du joueur $i \in I$ est identifié à l'ensemble $D_i$ des valeurs possibles de la variable $X_i$, $i \in I$. Ainsi, $S_i = D_i, \;\; i \in I$.

Notons par :

$R(i)$, l'ensemble des contraintes de $C$ liées à la variable $X_i$, $i \in I$.
$r$, désigne une contrainte du CSP($\mathcal{P}$) et $k(r)$, son arité.
$x = (x_1, \dots, x_n) \in S = \prod_{i=1}^{n} S_i$, une instanciation complète des $n$-variables du CSP($\mathcal{P}$).
Soit la fonction indicatrice :

$$\chi_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}) = \begin{cases} 1, \text{ si } (x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}) \in r, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases} \tag{3.1}$$

où $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}) \in r$ signifie que la contrainte $r$ est vérifiée par l'instanciation $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}})$ correspondent aux valeurs des variables intervenants dans la contrainte $r$.

Pour une instanciation $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$, on associe un paiement pour chaque joueur $i \in I$, défini par :

$$U_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r \in R(i)} k(r) \chi_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k(r)}}), \;\; \forall i \in I, \tag{3.2}$$

On définit le jeu noncoopératif $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ associé au problème de satisfaction de contraintes $(\mathcal{P})$ comme suit :

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}) = < I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in I} >, \tag{3.3}$$

## 3.3 Equivalence entre la solution d'un CSP($\mathcal{P}$) et le Z-équilibre du jeu associé $\mathcal{G}(\mathcal{P})$

Le concept du Z-équilibre a été introduit par V.I. Zhukovski [3] pour les jeux différentiels.

**Définition 3.2 (Z-Equilibre[3])** *Une issue $s^* \in S$ est un Z-équilibre du jeu* (3.3)*, si :*
*(a) $s^*$ est un équilibre actif, ie $\forall i \in I$, $\forall s_i \in S_i$, $\;s_i \neq s_i^*$, il existe $t_{-i} \in S_{-i}$ telle que $U_i(s_i, t_{-i}) \leq U_i(s^*)$.*

*(b)* $s^* \in S$ *est un équilibre de Pareto, c-à-d il n'existe pas une autre issue* $s \in S$ *qui vérifie le système d'inégalités* $U_i(s) \geq U_i(s^*), \ \forall i \in I$, *dont, au moins, une est stricte.*

Le théorème suivant donne les conditions d'existence d'un Z-équilibre en stratégies pures dans un jeu fini sous forme normale.

**Théorème 3.1** *Si pour tout joueur* $i \in I$*, l'ensemble de ses stratégies* $S_i$ *est fini et non vide, alors le jeu (3.3) admet un Z-équilibre en stratégies pures.*

**Proposition 1** *Toute solution d'un CSP(C) est un Z-équilibre pour le jeu G(C) qui lui est associé.*

**Proposition 2** *Supposons que l'ensemble des solutions du CSP n'est pas vide. Alors, tout Z-équilibre du jeu G(C) correspond à une solution au problème de satisfaction de contraintes (C) correspondant.*

## 3.4 Calcul du Z-équilibre

Le peu de travaux existant dans la littérature ayant pour but, l'étude du Z-équilibre ne proposent que sa définition et ses propriétés [5] ainsi que les conditions de son existence [6]. Jusqu'à présent, aucun algorithme n'a été proposé pour son calcul. L'algorithme que nous proposons est construit en s'inspirant des approches par retour arrière connues pour les CSP, et se base sur la preuve du théorème 3.1. Cet algorithme de calcul prend en compte la représentation du CSP en question par un jeu sous forme normale à n joueurs, puis calcul le gain de sécurité pour chaque joueur $i \in I$. Les variables du jeu sont instanciées à tour de rôle, tout en vérifiant la consistence de l'instanciation courante, ce qui génère une arborescence à explorer. Chaque instanciation complète est évaluée par la fonction définie par (3.2). Seules les instances dont l'évaluation est plus grande que le gain de sécurité pour tous les joueurs, sont sauvegardées. Le Z-équilibre correspond alors à la situation du jeu maximisant la moyenne pondérée des gains des $n$ joueurs.

Cet algorithme a été implémenté et a pu résoudre le problème des 5-reines et le problème de coloriage d'un graphe. Nous envisageons d'effectuer des tests supplémentaires sur d'autres instances de problèmes CSP, afin d'évaluer les performances de cet algorithme.

## Références

1. L. Paris (2007). Approches pour les problèmes SAT et CSP : ensembles strong backdoor, voisinage consistant et forme normale généralisée. Thèse de doctorat, Université de Provence.
2. F. Rossi and P.V. Beek and T. Walsh (2006). Handbook of Constraint Programming. Elsevier.
3. E.M. Vaisbord and V.I. Zhukovskii (1988). Introduction to Multi-Player Differential Games and Their Applications. Gordon et Breach Science Publishers.
4. F. Ricci (1991). Equilibrium Theory and Constraint Networks. International Conference on Game Theory.
5. S. Gaidov (1993). Z-equilibria in many-player stochastic differential games. Archivum Mathematicum (BRNO)**29** : 123-133.
6. V. I. Zhkovskii and A. A. Tchikry (1994). Linear Quadratic differential games. Naoukova Doumka.
7. M.Jiang (2007). Finding pure nash equilibrium of graphical game via constraints satisfaction approach. LNCS :483-494.
8. A. Ferhat and M. S. Radjef (2008). Existence Conditions of a Zm-Equilibrium for Multicriteria Games. 13-th International Symposium on Dynamic Games and Applications, Wroclaw, Poland.