Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 11, 2012, pp. 3 - 5

1

Programmation bi-niveaux multicritère

Aicha ANZI et Mohammed Said RADJEF

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé L'optimisation bi-niveaux multicritère est une extension de l'optimisation bi-niveaux où la fonction objectif de chaque niveau est vectorielle. Cette classe de problèmes a sucité intérêt croissant ces dernières années étant donnés son importance pratique. Dans ce travail, nous donnons un aperçu général sur ces problèmes.

Mots clés : programmation bi-niveaux, multicritère, méthodes de résolution.

1.1 Introduction

Le problème de programmation bi-niveaux est un problème d'optimisation hiérarchique, avec deux niveaux de décision. Le premier niveau est appelé Leader et le deuxième Suiveur. En d'autres termes, un programme bi-niveau est un programme mathématique standard avec y est contraint d'être solution optimale pour le programme

$$\max\{f(x,y) : g(x,y) \leq 0\} \tag{1.1}$$

Ce qui donne le programme bi-niveaux suivant :

$$\begin{aligned} &\max_x F(x,y) \\ &\quad s.c. \quad G(x,y) \leq 0 \\ &\qquad\qquad \max_y f(x,y) \\ &\qquad\qquad\quad s.c. \;\; g(x,y) \leq 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

En se basant sur le programme bi-niveau (1.2), on donne les notations et définitions suivantes :

a. *Ensemble des contraintes du problème*

$$S = \{(x,y) :\; G(x,y) \leq 0,\; g(x,y) \leq 0\}\,.$$

b. *Ensemble réalisable du Suiveur pour un x fixé*

$$S(x) = \{y : g(x,y) \leq 0\}\,.$$

c. *Projection de S sur l'espace du Leader*

$$P(X) = \{x :\; \exists y,\; (x,y) \in S\}\,.$$

d. *Ensemble des réactions rationnelles du Suiveur pour* $x \in P(X)$

$$R(x) = \{y : y = \arg\max[f(x, \hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\} .$$

e. *Région induite*

$$RI = \{(x, y) \in S,\ y \in R(x)\} .$$

La région induite RI représente l'ensemble réalisable du problème (1.2) sur lequel le Leader optimise sa fonction de gain. Cette région est non convexe et souvent discontinue, ce qui rend les problèmes bi-niveaux non convexes et difficiles à résoudre. Ces caractéristiques restent vraies même dans le cas où toutes les fonctions dans (1.2) sont linéaires et dans le cas d'absence des contraintes $G(x, y) \leq 0$.

1.2 Programmation bi-niveaux multicritère

Dans cette classe de problèmes, les décideurs possèdent chacun plusieurs fonctions (ou critères) à optimiser. En d'autres termes, nous avons deux niveaux de problèmes d'optimisation multicritère. mathématiquement, ces problèmes se s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} &\max_x F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y), \ldots, F_{k_1}(x,y)) \\ &\quad s.c.\quad G(x,y) \leq 0 \\ &\qquad\quad \max_y f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), \ldots, f_{k_2}(x,y)) \\ &\qquad\qquad s.c.\ \ g(x,y) \leq 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

Où k_1 et k_2 sont respectivement le nombre de critères (fonctions) du leader et du suiveur.
Dans notre travail, on s'intéresse au cas linéaire qui est donné par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} &\max_x\ \ F(x,y) = (c_1(x,y),\ c_2(x,y),\ \ldots,\ c_{k_1}(x,y)) \\ &\quad s.c.\ \ A_1x + B_1y \leq b_1, \\ &\qquad\quad \max_y\ \ f(x,y) = (d_1(x,y),\ d_2(x,y),\ \ldots,\ d_{k_2}(x,y)) \quad (8.a) \\ &\qquad\qquad s.c.\ \ A_2x + B_2y \leq b_2, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (8.b) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Soit $E(x)$ l'ensemble des réactions rationnelles du suiveur pour une décision, x, fixée du leader. Dans ce cas, il est défini comme l'ensemble des solutions pareto optimales (efficaces) du problème $(8.a) - (8.b)$. Il est donné par

$$E(x) = \{y \ /\ \nexists \tilde{y} \in \mathbb{R}^{n_2} \text{ tel que } d_i(x,\tilde{y}) \geq d_i(x,y)\ \forall\, i = 1, \ldots, k_2 \ \text{ et }\ d_j(x,\tilde{y}) > d_j(x,y)$$
$$\text{pour un certain }\ j \in \{1, \ldots, k_2\}\}$$

Soit

$$RI = \{(x,y) \in S \ \text{ et }\ y \in E(x)\}$$

la région induite. Le problème (1.4) s'écrira d'une manière équivalente comme suit

$$\begin{aligned} &\max_x\ \ F(x,y) = (c_1(x,y),\ c_2(x,y),\ \ldots,\ c_{k_1}(x,y)) \\ &\quad s.c.\ \ (x,y) \in RI \end{aligned} \tag{1.5}$$

Une solution optimale de (1.5) est définie par : (x^*, y^*) est une solution optimale de Pareto (solution efficace) si et seulement si

– $(x^*, y^*) \in RI$ et,
– $\nexists\ (x, y) \in RI\ /\ \ c_i(x, y) \geq c_i(x^*, y^*)\ \ \forall\ i = 1, \ldots, k_1$ et $c_j(x, y) > c_j(x^*, y^*)$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, k_1\}$.

1.3 Méthodes de résolution

Dans la littérature, on trouve trois cas de problèmes bi-niveaux multicritère :
– Les deux niveaux sont des problèmes d'optimisation multicritère.
– Le problème du niveau supérieur (leader) est un problème d'optimisation multicritère et le niveau inférieur (suiveur) est un problème d'optimisation classique.
– Le problème du niveau inférieur est un problème d'optimisation multicritère et le niveau supérieur est un problème d'optimisation classique.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ces problèmes. On peut citer :

– Agrégation pondérée : attribuer des coefficients positifs (poids) aux critères, puis résoudre un problème de programmation linéaire dont la fonction objectif est la combinaison linéaire de tous les critères.
– Des heuristiques telles que les algorithmes génétiques, la recherche tabou, ...etc.
– Méthode de ϵ-contrainte : transformer les critères en contraintes en gardant l'un de ces critères comme fonction objectif.
– Reformulation du problème en un programme linéaire multi-objectif mixte en 0-1 en introduisant les contraintes duales du problème du suiveur dans le problème initial.

1.4 Notre approche

Dans le cadre de notre travail, nous essayons de traiter le problème avec une technique d'optimisation non convexe, connue sous le nom de méthode DC (difference of convex). D'abord, nous transformons le problème (1.4) en un problème d'optimisation multicritère standard en remplaçant le problème du niveau inférieur (8.a) - (8.b) par les conditions d'optimalité KKT associées. Puis, nous résolvons le problème d'optimisation sous l'ensemble efficace associé au problème résultant, en utilisant la méthode DC.

Références

1. J.F. Bard : Practical bilevel optimization : algorithms and applications. Kluwer academic publishers, Dordrecht (1998).
2. H.I. Calvete and C. Galé. Linear bilevel programs with multiple objectives at the upper level. J. of Compu. and Appl. Math., 234, 950-959, (2010).
3. H.I. Calvete and C. Galé. On linear bilevel problems with multiple objectives at the lower level. Omega 39, 33–40, (2011).
4. B. Colson, P. Marcotte and G. Savard : Bilevel programming : A survey. 4OR A Quarterly, J. Oper. Res., (2007).
5. C.O. Pieueme. Multiobjective programming approaches in bilevel programming problems. Thèse de Doctorat, (2012).