Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 10, 2011, pp. 49 - 53

11

La stabilité du système $GI/M/\infty(FCFS, \infty)$

Mouloud CHERFAOUI, Djamil AISSANI and Smail ADJABI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé L'objectif du présent travail est d'analyser la stabilité de la chaîne de Markov induite associe au système $GI/M/\infty$ en utilisant la méthode de stabilité forte lorsque ce système est sujets à une perturbation au niveau de sa structure, d'où l'obtention d'un système à un nombre de serveurs fini. Des résultats numériques obtenus par simulation sur le comportement du système en fonction du nombre de serveurs constituant le système $GI/M/s$ sont également exposé et cela pour différentes lois des inter-arrivées.

Mots-clés : Système à plusieurs serveurs ; Système à une infinité de serveurs ; chaîne de markov induite ; Perturbation ; Stabilité forte.

11.1 Introduction et Motivation

Parmi les principales motivations de ce travail on cite :

✓ L'intérêt pratique.
Dans la pratique plusieurs situations se modélisent par ce genre de système : Les chaînes de production, Les systèmes informatique et téléinformatique, Les systèmes de télécommunications, Les aéroports : La gestion des aérodromes d'un aéroport ou de ses guichets, . . . etc.

✓ L'intérêt théorique : l'importance du système en question a fait l'objet de plusieurs études et analyse mais ces dernières peuvent être améliorées. En effet, par exemple :
- J. M. Helary and R. Pedrono (1983)
  - $M/M/s \rightsquigarrow M/M/\infty \Rightarrow |\pi_\infty - \pi_s| \leq C(s)$.
  - Une majoration large et les conditions de stabilité sont non élaborées.
- D. Aïssani (1989) : L'auteur a démontré la convergence de
  - $\|P_\infty - P_s\|_v \to 0$ lorsque $s \to \infty$
  - $\|\pi_\infty - \pi_s\|_v \to 0$ lorsque $s \to \infty$

  avec $v(k) = \beta^k$, tel que $\beta > 1$ et $k \in \mathbb{N}$. sans donnée une quantification des ces bornes.
- K. Mechri(2004)
  - $\|P_\infty - P_s\|_v \leq C_1(s, \beta)$,
  - $\|\pi_\infty - \pi_s\|_v \leq C_2(s, \beta)$,

Les deux majorations sont large, voir même impossible à vérifier dans la pratique. C'est-à-dire il n'existe pas la valeur de la norme β qui peut satisfaire les conditions stabilité.

11.2 Opérateurs de transition des systémes $GI/M/s$ et $GI/M/\infty$

Soit le processus X_k qui représente le nombre de clients dans le système juste avant l'arrivée du $k^{\text{ième}}$ client.

$$P_{ij} = P\{X_{k+1} = j/X_k = i\} \quad (j = 0, 1, ...; i = 0, 1, ...) \tag{11.1}$$

Sachant que $X_{k+1} = X_k - D_k$ avec D_k le nombre de clients servis durant les deux instant t_k^- et t_{k+1}^-. P_{ij} du système $GI/M/s$ et du système $GI/M/\infty$ sont donnés par 11.2 et 11.3 respectivement.

$$P_{ij} = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{(s\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-s\mu t} dH(t), & \text{if } i \geq s-1,\ j \geq s \text{ and } i+1 \geq j\,; \\ \int\limits_0^\infty C_{i+1}^j e^{-j\mu t} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{i+1-j} dH(t), & \text{if } i \leq s-1 \text{ and } i+1 \geq j\,; \\ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t C_s^j e^{-j\mu(t-\tau)} \left(1 - e^{-\mu(t-\tau)}\right)^{s-j} e^{-s\mu\tau} \frac{(s\mu\tau)}{(i-s)!}^{i-s} s\mu d\tau dH(t), & \text{if } i \geq s,\ j < s \text{ and } i+1 \geq j\,; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{11.2}$$

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} \int\limits_0^\infty C_{i+1}^j e^{-j\mu t} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{i+1-j} dH(t), & \text{if } i+1 \geq j\,; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{11.3}$$

11.3 Stabilité du système $GI/M/\infty$

Théorème 11.1 *(D. Aïssani and N.V. Kartashov. (1983)). A Markov chain X, with transition kernel P, is strongly $\upsilon-$stable if and only if there exists a measure α and a nonnegative measurable function h on $\mathbb{N}$ such that*

a) $\pi h > 0,\ \alpha 1 = 1,\ \alpha h > 0\,$;

b) $\|P\|_\upsilon < \infty\,$;

c) $T = P - h \circ \alpha > 0\,$;

d) there exists $m \geq 1$ and $\rho < 1$ such that $T^m \upsilon(x) \leq \rho\upsilon(x)$ for all $x \in \mathbb{E}$;

11.3.1 Conditions de $\upsilon-$stabilité

Théorème 11.2 *Conditions de $\upsilon-$stabilité Suppose that in the $GI/M/\infty$ system and suppose that the condition $\int_0^\infty dH(t)/t < \infty$ holds. Then, for all β such that $1 < \beta < \beta_0$ the embedded Markov chain $\tilde{X}$ is $\upsilon-$strongly stable for the test function $\upsilon(k) = \beta^k$. Where $\beta_0 = \sup\{\beta/\beta > 1,\ \rho < 1$ and $\rho = \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\infty \left[1 - e^{-\mu t} + \beta e^{-\mu t}\right]^2 dH(t)$.*

Lemme 11.1. Suppose that in the $GI/M/\infty$ system, the following conditions are fulfilled :

1. $\int\limits_0^\infty \frac{dH(t)}{t} < \infty$
2. $\int\limits_0^\infty e^{-\mu t} dH(t) < 1/2.$

Then, there exists $\beta \in \left]1, 1 + \frac{1-2\int\limits_0^\infty e^{-\mu t}dH(t)}{\int\limits_0^\infty e^{-2\mu t}dH(t)}\right[$ such that

$$\rho = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty \left[1 - e^{-\mu t} + \beta e^{-\mu t}\right]^2 dH(t) < 1. \tag{11.4}$$

11.3.2 Estimation de la $\upsilon-$stabilité

Théorème 11.3 *Let $\tilde{\pi}$ and π be the stationary distributions of the embedded Markov chains $\tilde{X}$ and X respectively. Then, for all $1 < \beta < \beta_0$, and under the condition :*

$$\|\varDelta\|_\upsilon < \frac{1-\rho}{c}, \tag{11.5}$$

we have :

$$\|\pi - \widetilde{\pi}\|_\upsilon \leq c_0 c\|\varDelta\|_\upsilon (1 - \rho - c\|\varDelta\|_\upsilon)^{-1}, \tag{11.6}$$

where

$$c = ||\pi||_\upsilon = \sum_{n\geq 0}\prod_{k=1}^{n} \frac{h(k\mu)}{1-h(k\mu)}(\beta-1)^n, (where\ h(s) = \int_0^\infty e^{-st}dH(t).);$$

$$c_0 = 1 + c \quad and \quad \|\varDelta\|_\upsilon = \|\widetilde{P} - P\|_\upsilon.$$

Corrollaire 11.1. Let $\widetilde{\pi}$ and π be the stationary distributions of the imbedded Markov chains in the $GI/M/\infty$ system and $GI/M/s$ system respectively. Suppose that the assumptions of the precedent Theorem hold and $1 < \beta < \beta_0$, then, for any f such that $\|f\|_\upsilon < \infty$, it holds that

$$|\pi f - \widetilde{\pi} f| \leq E_\beta \|f\|_\upsilon, \tag{11.7}$$

where $E_\beta = \|\pi - \tilde{\pi}\|_\upsilon$.

Le faite que $\bar{N} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} k\pi_k$ alors soit $f(k) = k$ ainsi on aura :

$$\|f\|_\upsilon = \frac{1}{\ln\beta}\beta^{-\frac{1}{\ln\beta}} \Rightarrow |\bar{N}_\infty - \bar{N}_s| = |\pi f - \widetilde{\pi} f| \leq E_\beta \frac{1}{\ln\beta}\beta^{-\frac{1}{\ln\beta}}$$

11.4 Application Numérique et simulation

Des simulations à événements discrets ont été réalisées sur les systèmes suivants :

Cas 1 : $M/M/s,\ \lambda = 4.5$ et $\mu = 1$,

Cas 2 : $E_2/M/s,\ \lambda = 9$ et $\mu = 1$,

Cas 3 : $Weibull/M/s,\ \alpha = 0.25,\ \beta = 1.817$ et $\mu = 1$,

et les résultats obtenus sont représentés dans es figures suivantes :

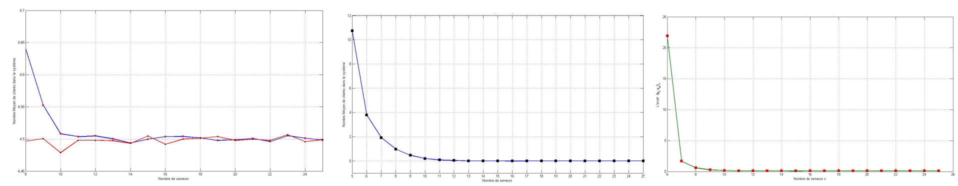

FIGURE 11.1. Nombre moyen de clients dans le système, en attente et l'ecart $\|\pi_s - \pi_\infty\|_v$ en fonction du nombre de serveurs. Cas : $M/M/s,\ \lambda = 4.5$ et $\mu = 1$

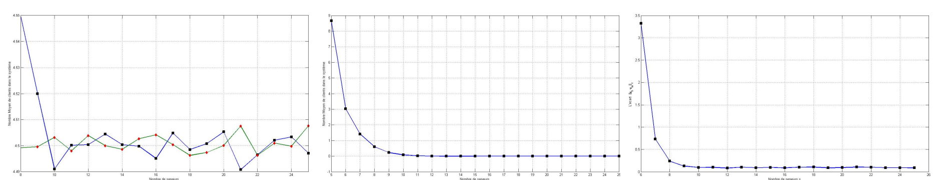

FIGURE 11.2. Nombre moyen de clients dans le système, en attente et l'ecart $\|\pi_s - \pi_\infty\|_v$ en fonction du nombre de serveurs. Cas : $E_2/M/s,\ \lambda = 9$ et $\mu = 1$.

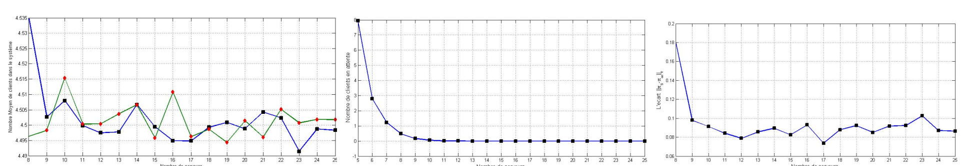

FIGURE 11.3. Nombre moyen de clients dans le système, en attente et l'ecart $\|\pi_s - \pi_\infty\|_v$ en fonction du nombre de serveurs. Cas : $Weibull/M/s,\ \alpha = 0.25,\ \beta = 1.817$ et $\mu = 1$

11.5 Conclusion

Dans ce travail nous avons démontrés l'applicabilité de la stabilité forte sur la chaîne de Markov induite associe au système $GI/M/\infty$ après la perturbation de la structure du ce système au niveau du nombre de serveurs qui deviens un nombre fini. En effet, l'application de la méthode nous a permet de dégager les conditions de stabilité du système $GI/M/\infty$

ainsi que l'écart entre ses probabilités stationnaire et celle du système $GI/M/s$ par rapport à la norme $v(k) = \beta^k$ ($\beta > 1,\ k \in \mathbb{N}$). Et l'exploitant ces derniers résultats nous avons obtenus une majoration de l'écart entre le nombre moyen de clients dans les deux systèmes en question.

Afin de compléter ce travail nous proposons d'évaluer la performance de cette méthode dans ce cas.

Références

1. D. Aïssani. Application of the Operator methods to obtain inequalities of stability in the $GI/M/\infty$ system. Proceedings of the C. M . M .N. I. 2, Rabat, 2 :106-111, 1989.
2. D. Aïssani. Estimation of the strong stability in an $G/M/\infty$ system. International Journal " Technologies Avancées", 2(2) :29-33, 1992.
3. D. Aïssani. Strong stability of an embedded Markov chain in an $G/M/\infty$ system. International Journal " Technologies Avancées", 2(1) :33-38, 1992.
4. D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and Stability of Markov Chains with Respect to Operator Topology in the Space of Transition Kernels. Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R, (ser.A,11) :3-5, 1983.
5. J. M. Helary and R. Pedrono. Recherche opérationnelle, Travaux Dirigés. Hermann, 1983.
6. R. B. Cooper's. Introduction to queueing theory. Computer systems and Management Science, Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida, Second Edition. 1981.