

Plongement optimal d'arbres binaires équilibrés dans l'hypercube

Kamal KABYL and Abdelhafid BERRACHEDI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88 email : k.kabyle2009@gmail.com

Résumé L'hypercube étant une structure dont la topologie est utilisée en informatique et en combinatoire, il est fondamentale de déterminer quels sont les graphes et particulièrement les arbres qui sont plongeables dans l'hypercube. Ce problème est toujours ouvert et on ne connaît que des résultats partiels pour certaines familles d'arbres. Dans ce papier nous avons introduit deux classes d'arbres binaires équilibrés vérifiant la conjecture de havel à savoir : Tout arbre binaire équilibré ayant 2^n sommets est plongeable dans l'hypercube de dimension n

Mots-clés : Hypercube, Plongement, Graphes, Arbres, Isomorphisme

5.1 Introduction

Un plongement de $G(V, E)$ dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n , et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des arêtes de Q_n , qui associe à chaque arête uv de G une arête $\varphi(u)\varphi(v)$ dans Q_n . Une classe importante à étudier est celle des arbres dans l'hypercube. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines, à savoir : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, théorie des réseaux électriques... et l'utilisation pratique de l'hypercube en théorie des codes, transfert de l'information, architecture parallèle, décision multicritère, réseaux d'interconnexion etc. Un graphe $G = (V, E)$ est dit cubique s'il est plongeable dans Q_n pour un certain n . Firsov[7] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques. Le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné G est plongeable. On définit dans ce papier trois nouvelles classes pour lesquelles la dimension cubique est déterminée. Pour un graphe $G(V(G), E(G))$, $V(G)$ et $E(G)$ désignent respectivement l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes.

Un hypercube de dimension n , noté Q_n , est le graphe dont l'ensemble des sommets sont les n -uplets binaires et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en une seule coordonnée. L'hypercube Q_n est un graphe biparti équilibré, n -régulier ayant 2^n sommets et $n \times 2^{n-1}$ arêtes. La Cn -valuation aux cas des arbres est donnée comme suit : Un arbre T est Cn -valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne P de T , il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pour lequel

un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K . Havel et Moravek [6] ont montré qu'un graphe G est plongeable dans Q_n si et seulement s'il existe une C_n -valuation de G . Le résultat suivant est donné par Havel et Liebl [6] : Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n avec $n \geq 3$. Si T est équilibré et possède deux sommets de degré 3 alors T est plongeable dans Q_n . Havel [6] et Nebesky [12] ont étudié le plongement des arbres binaires complets : $D_n, \hat{D}_n, \check{D}_n$ définis comme suit :

1. D_n est le graphe défini inductivement comme suit : Pour $n = 1$, $D_1 = K_{1,2}$ est un graphe biparti complet. Pour $n \geq 2$, D_n est obtenu à partir de deux copies disjointes T_1, T_2 de D_{n-1} et d'un nouveau sommet u , tel que u est relié par une arête à un sommet de degré 2 de T_1 et par une autre arête à un sommet de degré 2 de T_2 . D_n Possède 2^n sommets pendants, $(2^n - 2)$ sommets de degré 3 et un seul sommet de degré 2 appelé racine de D_n . $\dim(D_1) = 2$ et pour tout $n \geq 2$ $\dim(D_n) = n + 2$.
2. Pour $n \geq 1$, l'arbre \hat{D}_n l'arbre formé à partir de deux copies disjointes de D_n , tel que leurs racines sont reliées par une arête appelée arête axiale. \hat{D}_n a $(2^{n+2} - 2)$ sommets. Pour tout $n \geq 1$, $\dim(\hat{D}_n) = n + 2$.
3. Soit $n \geq 1$. On désigne par \check{D}_n , l'arbre formé à partir de \hat{D}_n en insérant deux nouveaux sommets au niveau de l'arête axiale et la chaîne obtenue à partir de l'arête axiale sera appelée chaîne axiale de \check{D}_n . L'arbre \check{D}_n peut être défini à partir de \hat{D}_n en insérant deux nouveaux sommets de degré 2 au niveau d'une arête pendante de \hat{D}_n . Il est clair que \check{D}_n et \hat{D}_n possèdent le même nombre de sommets. \check{D}_n possède deux sommets de degré 2, 2^{n+1} sommets pendants et $(2^{n+1} - 2)$ sommets de degré 3. Pour tout $n \geq 1$, $\dim(\check{D}_n) = \dim(\hat{D}_n) = n + 2$.

5.2 Nouvelles classes d'arbres équilibrés plongeable dans l'hypercube

5.2.1 Classe AD_n

Pour $n \geq k \geq 1$, l'arbre AD_n^k est obtenu à partir de l'arbre \hat{D}_n en insérant un nouveau sommet au niveau d'une arête à distance k de la racine dans la copie de D_n et un autre nouveau sommet au niveau d'une arête à distance k de la racine dans l'autre copie de D_n . Il est claire que AD_n^k est équilibrés et possède 2^{n+2} sommets. AD_n^1, AD_n^2 et AD_n^n sont montrés dans la figure suivante :

Theorem 1. *Pour tout $n \geq k \geq 1$, l'arbre AD_n^k est plongeable dans Q_{n+2} .*

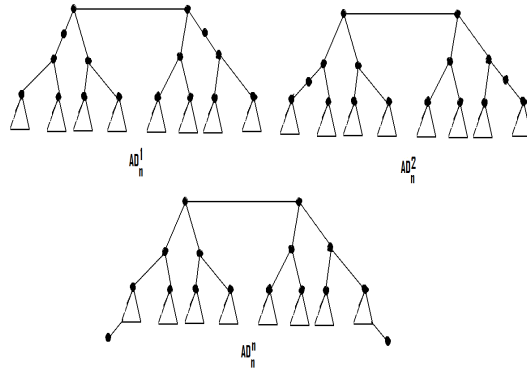


FIGURE 5.1.

5.2.2 La classe \widehat{AD}_n^k

Pour $n \geq k \geq 0$, l'arbre \widehat{AD}_n^k est obtenu à partir de l'arbre binaire $\widehat{\widehat{D}}_n$ en insérant deux nouveaux sommets au niveau de la $k^{\text{ième}}$ arête à partir de la racine dans une copie de D_n dans $\widehat{\widehat{D}}_n$. \widehat{AD}_n^1 , \widehat{AD}_n^2 et \widehat{AD}_n^n sont donnée dans la figure suivante :

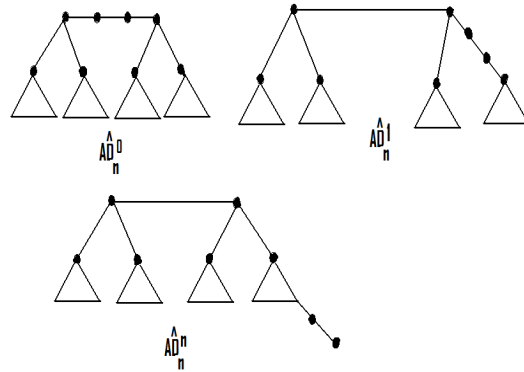


FIGURE 5.2.

Theorem 2. *Pour tout $n \geq k \geq 0$, l'arbre \widehat{AD}_n^k est plongable dans Q_{n+2} .*

Remarque 5.1 *La C_{n+2} valuation de l'arbre $\widehat{\widehat{D}}_n$ présenté par Nebesky figure comme cas particulier dans notre résultat. Il est donné par l'arbre \widehat{AD}_n^k , avec $k = n$*

Références

1. Arfati, J. Papadimitriou, C.H. and Papageorgiou, P. : The complexity of cubical graphs. proceedings of 11 th international Kolloquium on automata , languages and programming. (1984) 51-57.
2. Bezrukov, S. and Monien, B. Unger, W. and Wechsung, G. : Embedding ladders and caterpillars into hypercube. discrete applied mathematics , **83** (1992) 21-29.
3. Corneil, D.G. and Wagner, A. : Embeding trees in a hypercube is NP- complet. siam j. comput **19** (1990),570-590
4. Havel, I. : On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. Cas prest. Mat **109** (1984) 135-152.
5. I. Havel, P. Liebl : Embedding the polytomic tree into the n-cube. Cas. pèst. mat. 98 (1973), 307-314.
6. Havel, I. and Moravek, J. : B -valuation of graphs . Czech- Math .jour ., **22** (1972),338-351.
7. Firsov, V. : On isometric embeddings of graph into a boolean cube. cyber - netics 1, (1965) 112-113.
8. Harary, F. Lewinter, M. and Widolski, W. : On two legged caterpillars which span a hypercube. Congr. Numer. **66** (1988) 103-108.
9. KabyL, k. : Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres. Actes du Colloque Cosi'05, Colloque sur L'optimisation et les Systèmes d'Information. Université de Béjaia.
10. kobeissi, M. and Mollard, M . : Spanning graphs of hypercubes starlike and double starlike trees. Accepté à discrete Math.
11. Labord, J.M. and Rao hebbar, S.P. : Another characterisation of hypercube . discrete Math., **39** , (1982) 161-166.
12. Nebesky, L. : Embedding m -quasistars into n-cubes. C zechoslovak mathematical, journal, praha,38 (113),1988.
13. Nekri, M. and Berrachedi, A. : Two new classes of Trees Embeddable into hypercubes. RAIRO Oper. Res., **38**, (2004) 295–303.