Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 10, 2011, pp. 5 - 8

2

Conditions d'optimalité d'un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs

Karima BOUIBED, Mohammed Said RADJEF

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88
email : karima.bouibed@gmail.com

Résumé Dans ce travail, nous avons étudié un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs au niveau supérieur (PBM). L'approche de KKT a été utilisée pour transformer le problème (PBM) en un problème à un seul niveau multi-objectifs sous des contraintes d'égalités et d'inégalités (PM). Des relations entre les deux problèmes (PBM) et (PM) ont été obtenues concernant l'ensemble des solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales, notamment lorsque le problème du niveau inférieur est convexe et il satisfait la contrainte de qualification de Slater pour n'importe quelle décision du niveau supérieur. Par la suite, nous avons établi des conditions nécessaires d'optimalité de type Fritz John, ainsi que des conditions suffisantes d'opttimalité pour qu'un point réalisable pour le problème (PM) soit (faiblement ou proprement) efficace globale pour le problème (PM) sous des hypothèses d'invexités généralisées. Puisque, les ensembles des solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales des problèmes (PBM) et (PM) coïncident, alors des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalié du problème (PBM) découlent de celles du problème (PM).

Mots clés : Optimisation bi-niveaux, Optimisation bi-niveaux multi-objectifs, Approche KKT, Conditions d'optimailté, Convexité généralisé.

2.1 Introduction

L'approche qui consiste à considérer un seul objectif qu'un décideur souhaite optimiser n'est souvent pas suffisante pour d'écrire les besoins et le comportement des décideurs qui sont généralement conflictuels. Souvent il faut trouver un compromis entre ses objectifs. L'optimisation multi-objectifs consiste donc à optimiser simultanément plusieurs objectifs d'un même problème. De même pour les problèmes de programmation bi-niveaux multi-objectifs qui correspond au cas où au moins l'une des fonctions objectifs de problème du niveau supérieur et de problème du niveau inférieur est une fonction vectorielle. Bien que les problèmes de la programmation bi-niveaux multi-objectifs n'ont pas encore reçu une large attention dans la littérature, mais cette classe de problèmes ont de grandes applications potentielles dans la pratique.

2.2 Étude d'un problème bi-niveaux non linéaire multi-objectifs au niveau supérieur $(\boldsymbol{PBM})$

Considérons le problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs non linéaire suivant :

$$(PBM)\begin{cases}\min\limits_{x\in X}\ \bar{F}(x,y)=(\bar{F}_1(x,y),...,\bar{F}_q(x,y)),\\ \text{s.c}\ \min\limits_{y\in Y}\ \bar{f}(x,y),\\ \qquad \bar{g}(x,y)\leqq 0,\end{cases}$$

où X est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Y est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m,\ x\in X$ est la décision du niveau supérieur et $y\in Y$ est la décision du niveau inférieur.
$\bar{F}:X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}^q$ et $\bar{f}:X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$ sont les fonctions objectifs du niveau supérieur et inférieur respectivement. $\bar{g}:X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}^p$ est la fonction contrainte du niveau inférieur. Supposons que $\bar{F}$ est différentiable sur $X\times Y$ et $\bar{f},\ \bar{g}$ sont des fonctions deux fois différentiables sur $X\times Y$. Soit $Q=\{1,...,q\}$. Ensuite, on donne les définitions suivantes pour le problème (PBM) :

(i) Le domaine des contraintes du problème (PBM) : $S=\{(x,y)\in X\times Y:\bar{g}(x,y)\leqq 0\}$.

(ii) La projection de S sur l'ensemble des décisions du niveau supérieur : $S(X)=\{x\in X:\exists\ y\in Y,\text{tel que }(x,y)\in S\}$.

(iii) L'ensemble des solutions réalisables du niveau inférieur $(LLP)_x$ pour un $x\in S(X)$ fixé est noté par $S(x)$: $S(x)=\{y\in Y:\bar{g}(x,y)\leqq 0\}$.

(iv) Pour un $x\in S(X)$ fixé, soit $\bar{S}(x)$ l'ensemble des solutions optimales du problème $(LLP)_x$.

(v) La région induite du problème (PBM) : $RI=\{(x,y):(x,y)\in S,\ y\in\bar{S}(x)\}$.

Définition 2.1 *Pour un $x\in X$ fixé tel que $\exists\ y\in Y,\ \bar{g}(x,y)\leqq 0$, si y est une solution optimale pour $(LLP)_x$, alors (x,y) est une solution réalisable pour (PBM).*

Définition 2.2 *Un point $(x_0,y_0)\in S$ est dit solution faiblement efficace (ou efficace) pour (PBM), si y_0 est une solution optimale pour $(LLP)_{x_0}$ et il n'existe pas une solution réalisable (x,y) pour (PBM) tel que $\bar{F}(x,y)<\bar{F}(x_0,y_0)$ $(\bar{F}(x,y)\leq\bar{F}(x_0,y_0))$.*

Définition 2.3 *Une solution efficace (x_0,y_0) de (PBM) est dite proprement efficace, s'il existe un réel positif $\mathcal{M}$ tel que l'inégalité $\bar{F}_i(x_0,y_0)-\bar{F}_i(x,y)\leqq\mathcal{M}[\bar{F}_j(x,y)-\bar{F}_j(x_0,y_0)]$ est vérifiée pour tout $i\in Q$ et $(x,y)\in RI$ tel que $\bar{F}_i(x,y)<\bar{F}_i(x_0,y_0)$ et un certain $j\in Q$ tel que $\bar{F}_j(x,y)>\bar{F}_j(x_0,y_0)$.*

2.3 Reformulation du problème bi-niveaux multi-objectifs $(\boldsymbol{PBM})$ en un problème multi-objectifs $(\boldsymbol{PM})$

En se basant sur l'approche optimiste, pour un $x\in X$ fixé, nous utilisons les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associées au problème du niveau inférieur $(LLP)_x$ pour transformer le problème (PBM) en un problème à un seul niveau multi-objectifs défini par :

$$(PM)_{kkt} \begin{cases} \min\limits_{x,y,u} \bar{F}(x,y) = (\bar{F}_1(x,y), ..., \bar{F}_q(x,y)), \\ \text{s.c} \;\; \bar{g}(x,y) \leqq 0, \\ \qquad \nabla_y \bar{f}(x,y) + u^t \nabla_y \bar{g}(x,y) = 0, \\ \qquad u^t \bar{g}(x,y) = 0, \\ \qquad x \in X, y \in Y, u \in \mathbb{R}^p_{\geqq}, \end{cases}$$

où u est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux conditions de KKT pour le problème du niveau inférieur.

Dans ce qui suit, nous utilisons quelques changement de variables pour simplifier le problème $(PM)_{kkt}$. Ainsi, soit $z = (x,y,u) \in Z = X \times Y \times \mathbb{R}^p_{\geqq} \subset \mathbb{R}^N$, où $N = n + m + p$, $F(z) = \bar{F}(x,y)$, $G(z) = \bar{g}(x,y)$, $L_s(z) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_s}(z) + \sum\limits_{t=1}^{p} u_t \dfrac{\partial \bar{g}_t}{\partial y_s}(z) = 0$ pour tout $s = 1, ..., m$ et $L_{m+1}(z) = \sum\limits_{t=1}^{p} u_t \bar{g}_t(z) = 0$. Donc, le problème $(PM)_{kkt}$, qu'est un problème multi-objectifs non linéaire avec des contraintes d'égalités et d'inégalités, est donné comme suit :

$$(PM) \begin{cases} \min\limits_{z} \; F(z) = (F_1(z), ..., F_q(z)), \\ \text{s.c} \; G_j(z) \leqq 0, \; \forall \; j = 1, ..., p, \\ \quad\; H_k(z) = 0, \; \forall \; k = 1, ..., m+1, \\ \quad\; z \in Z, \end{cases}$$

où $F_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, ..., q$, $G_j : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, ..., p$ et $H_k : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, ..., m+1$. $Z \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble non vide ouvert, $Z_0 = \{z \in Z : G_j(z) \leqq 0, \; j = 1, ..., p, \; H_k(z) = 0, \; k = 1, ..., m+1\}$ est l'ensemble de toutes les solutions réalisables de (PM). Pour $z_0 \in Z$, on note par $J(z_0)$ l'ensemble $\{j \in \{1, ..., p\} : G_j(z_0) = 0\}$, $J_0 = |J(z_0)|$ et par $\tilde{J}(z_0)$ (resp. $\bar{J}(z_0)$) l'ensemble $\{j \in \{1, ..., p\} : G_j(z_0) < 0$ (resp. $G_j(z_0) > 0)\}$. On a $J(z_0) \cup \tilde{J}(z_0) \cup \bar{J}(z_0) = \{1, ..., p\}$ et si $z_0 \in Z_0$, $\bar{J}(z_0) = \varnothing$.

2.4 Relations entre les problèmes (PBM) et (PM)

Nous établissons des relations entre les deux problèmes (PBM) et $(PM)_{kkt}$ concernant les solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales données par les théorèmes suivants :

Theorem 1. *Soit* (x_0, y_0) *une solution (faiblement ou proprement) efficace pour* (PBM) *et supposons que le problème du niveau inférieur* $(LLP)_x$ *est convexe pour lequel la contrainte de qualification de Slater est satisfaite en* $x = x_0$ *(*i.e. $\exists \; \bar{y}(x_0) \in Y$ *tel que* $\bar{g}(x_0, \bar{y}(x_0)) < 0$*). Alors, pour chaque*

$$u_0 \in \Omega(x_0, y_0) = \{u \in \mathbb{R}^p_{\geqq} : \nabla_y f(x_0, y_0) + u^t \nabla_y g(x_0, y_0) = 0, \; u^t g(x_0, y_0) = 0\},$$

le point (x_0, y_0, u_0) *est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour* $(PM)_{kkt}$.

Theorem 2. *Soit* (x_0, y_0, u_0) *une solution (faiblement ou proprement) efficace pour* $(PM)_{kkt}$*, supposons que le problème* $(LLP)_x$ *est convexe et que la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour le problème* $(LLP)_x$ *pour chaque* $x \in X$*. Alors,* (x_0, y_0) *est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour* (PBM)*.*

De Théorème 1 et 2, on obtient le résultat suivant :

Theorem 3. *Soit la contrainte de qualification de Slater est satisfaite pour le problem* $(LLP)_x$ *pour tout* $x \in X$ *et supposons que les fonctions* $\bar{f}$ *et* $\bar{g}_j,\ j \in P$ *sont convexes en* y *pour tout* $x \in X$ *fixé. Alors,* $(x_0, y_0, u_0),\ u_0 \in \Omega(x_0, y_0)$ *est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour* $(PM)_{kkt}$ *si et seulement si* (x_0, y_0) *est une solution (faiblement ou proprement) efficace pour* (PBM)*.*

Nous avons étudié un problème de programmation bi-niveaux multi-objectifs (PBM). L'approche KKT a été utilisée pour transformer le problème (PBM) en un problème à un seul niveau multi-objectifs sous des contraintes d'égalités et d'inégalités (PM). Des relations entre les deux problèmes (PBM) et (PM) ont été obtenues concernant l'ensemble des solutions efficaces globales, notamment lorsque le problème du niveau inférieur est convexe et il satisfait la contrainte de qualification de Slater pour n'importe quelle décision du niveau supérieur. Par la suite, nous avons établi des conditions nécessaires d'optimalité, ainsi que des conditions suffisantes d'optimalité pour qu'un point réalisable pour le problème (PM) soit (faiblement ou proprement) efficace globale pour le problème (PM) sous des hypothèses d'invexités généralisées. Puisque, les ensembles des solutions (faiblement ou proprement) efficaces globales des problèmes (PBM) et (PM) coïncident, alors des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du problème (PBM) découlent de celles du problème (PM).

Références

1. H.I. Calvete, C. Galé. Linear bilevel programs with multiple objectives at the upper level. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234,950-959 (2010).
2. S. Dempe. Foundations of bilevel programming. *Dordrecht : Kluwer Academic Publishers* (2002).
3. S. Dempe, N. Gadhi and A.B. Zemkoho. New Optimality conditions for the semivectorial bilevel optimization problem. *Journal of Optimization Theory and Applications* DOI 10.1007/s10957-012-0161-z (2012).
4. S. Dempe and A.B. Zemkoho. The bilevel programming problem : reformulations, constraint qualifications and optimality conditions. *Math. Program., Ser. A,* 138 :447-473 (2013).
5. N. Gadhi and S. Dempe. Necessary optimality conditions and a new approach to multiobjective bilevel optimization problems. *J. Global Optim.* DOI 10.1007/s10957-012-0046-1 (2012).