T-set و مسائل ناقصية ذات أسس متغيرة بمعطى قياس
T-set and elliptic problems with variable exponents and measure data

مختاري فارس

قسم الرياضيات و الاعلام الالي - جامعة الجزائر، الجزائر
fares_maths@yahoo.fr, f.mokhtari@univ-alger.dz

تمت ترجمة المقال من الإنجليزية إلى العربية من طرف
ناصري مختار
المدرسة العليا للاساتذة بالقبة الجزائر - مخبر EDPNL-HM،
المدرسة العليا للاساتذة بالاغواط ، الجزائر
nasrimokhtar@gmail.com

6 يناير 2021

ملخص(**Abstract**): في هذا الورق نثبت وجود حلول ضعيفة لنوع من المسائل الناقصية غير الخطية من الصنف $-\operatorname{div}(\widehat{a}(x,u,Du)) = \mu$ حيث μ هو قياس رادون (Radon) المحدود. فضاء الحلول يتطلب ادخال مفهوم T-set (مفهوم T-set تم تقديمه في [8]) و فضاء لوبيغ-سوبولاف (Lebesgue-Sobolev) ذو اسس متغيرة.

كلمات مفتاحية (**Keywords**): T-set اسس متغيرة، معادلة ناقصية، معطى قياس.
MSC 2000: 35B38 ، 35J60

1 المدخل(**Introduction**):

هذا العمل مكرس لدراسة المسائل الناقصية

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\widehat{a}(x,u,Du)) = \mu, & \text{في } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0, & \text{على } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)$$

حيث Ω هو جزء مفتوح و محدود من $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ذو حافة لبشيتزية (Lipschitzienne) $\partial\Omega$، μ هو القياس المحدود لرادون على Ω، و $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ هو تابع لكاراتيودوري (Carathéodory) يحقق ، حيثما كان تقريبا $x \in \Omega$ و $\forall u \in \mathbb{R}$ و $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$، ما يلي:

$$\widehat{a}(x,u,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^{p(.)}, \quad \widehat{a}(x,u,\xi) = (a_1,\ldots,a_N) \tag{1}$$

$$|\widehat{a}(x,u,\xi)| \leq \beta\left(h + |u|^{p(.)-1} + |\xi|^{p(.)-1}\right), \quad h \in L^{p'(.)}(\Omega) \tag{2}$$

$$(\widehat{a}(x,u,\xi) - \widehat{a}(x,u,\xi'))(\xi - \xi') > 0, \ \xi \neq \xi', \tag{3}$$

حيث الاس المتغير $p(.): \overline{\Omega} \to (1, +\infty)$ هو تابع مستمر بحيث:

$$\forall x \in \overline{\Omega}: \quad 1 < p(x) < N, \quad p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}. \tag{4}$$

نعرف العدد

$$p_0 = \frac{(1-\frac{1}{p^+})N + N}{1 - \frac{1}{p^+} + N}. \tag{5}$$

تستخدم الأسس المتغيرة اليوم في فروع مختلفة من العلوم التطبيقية. في بعض الحالات تقدم نماذج واقعية لدراسة الظواهر الطبيعية في السوائل الكهروريولوجية (Electrorheological) ([12]، [11])، وتطبيقات مهمة تتعلق بمعالجة الصور [3].

في الحالة $\widehat{a}(x, u, \xi) = \widehat{a}(\xi)$ حيث $\widehat{a}(\xi)$ الشعاع الذي مركباته هي $|\xi|^{p(.)-2}\xi$ و $p(.)$ تابع مستمر على $\overline{\Omega}$ بحيث $p(.) > 2 - \frac{1}{N}$، نجد أن وجود حل ضعيف u في فضاء سوبولاف المعتاد $W_0^{1,q(.)}(\Omega)$ لمسألة ناقصية بمعطى L^1 على Ω حيث $q(.)$ تابع مستمر يحقق $1 \leq q(x) < \frac{N(p(x)-1)}{N-1}$ لكل $x \in \overline{\Omega}$ تم اثباته في [1].

من أجل $1 < p(.) \leq 2 - \frac{1}{N}$ نجد هذا الاطار ضيق جدا لاحتواء الحلول.

في الحالة الثابتة $p(.) = p > 2 - \frac{1}{N}$ يوجد حل ضعيف u للمسألة (P) في الفضاء $W_0^{1,q}(\Omega)$ من أجل كل $q \in [1, \frac{N(p-1)}{N-1})$ و هذا تم اثباته في [2].

راكوتوزن (Rakotoson) [8، 9] أثبت وجود حلول في مجموعة أكثر عمومية يرمز لها $L_0^{1,p}(\Omega)$ حيث $1 < p \leq N$.

الغرض من هذا الورق هو الضبط و المعالجة الكاملة للمسألة (P) في مجموعة جديدة $L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ (انظر القسم 3) حيث μ قياس رادون المحدود على Ω و $p(.)$ تابع مستمر حيث $1 < p(x) < N$ من أجل كل $x \in \overline{\Omega}$.

كمثال نموذجي نعتبر الاشكالية النموذجية

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|Du|^{p(x)-2}Du\right) = \delta, & \text{في } B \\ u = 0, & \text{على } \partial B \end{cases}$$

حيث δ هو قياس رادون عند الاصل و $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$.

تمثل الخطوات الرئيسية للإثبات في الحصول على تقديرات قبلية لمتتالية المسائل التقريبية المناسبة ثم بعدها المرور إلى النهاية.

هناك نوعان من الصعوبات التي تظهر في معالجة المؤثرات الناقصية غير الخطية $Au = -\mathrm{div}\,(\widehat{a}(x, u, Du))$ بدلا من مؤثر لابلاس مع أسس متغيرة ، الأولى هي الحصول على تقديرات قبلية للحل u و التدرج Du ، و الصعوبة الثانية هي المرور الى النهاية عندما لاخطية A مرتبطة بـ u و Du. في هذه المرحلة الخاصية (27) مطلوبة.

2 مفاهيم أولية (Preliminaries):

في هذا القسم نذكر أولا ببعض خصائص فضاءات لوبيغ ذات الأسس المتغيرة $L^{p(.)}(\Omega)$.

نعرف المجموعة

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid v^- = \inf_{x \in \Omega} v(x) > 1\}.$$

ليكن $p \in C_+(\overline{\Omega})$، نشير بالرمز $L^{p(.)}(\Omega)$ الى فضاء التوابع f القابلة للقياس على Ω بحيث

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < +\infty.$$

الفضاء $L^{p(.)}(\Omega)$ عند تزويده بالنظيم

$$\|f\|_{p(.)} := \|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} = \inf\{\lambda > 0 \mid \rho(f/\lambda) \leq 1\}$$

يصبح فضاء بناخيا.
و بالاضافة الى ذلك، إذا كان $p^- > 1$ فان $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ انعكاسي و ثنوي $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ يمكن تعريفه بـ $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ حيث $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.
من أجل كل $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$، $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ حيث $p(x) \in (1, \infty)$ لدينا متباينة هولدر (Hölder)

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'}\right) \|u\|_{p(.)}\|v\|_{p'(.)} \leq 2\|u\|_{p(.)}\|v\|_{p'(.)}.$$

بشكل خاص، لكل ثابت $q \in (1, p^-)$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{p(.)}.$$

الفضاء البناخي $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ مع $p \in C_+(\overline{\Omega})$ يعرف بـ

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \mid |Du| \in L^{p(\cdot)}(\Omega), \quad u = 0 \text{ على } \partial\Omega\right\}$$

مزود بالنظيم $\|\cdot\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} : u \mapsto \|Du\|_{p(.)}$.
الفضاء $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ قابل للفصل و انعكاسي بشرط $p^- > 1$.
بما أن $p \in C_+(\overline{\Omega})$، متباينة بوانكاريه (Poincaré) محققة(انظر [4]):

$$\|u\|_{p(.)} \leq C\|Du\|_{p(.)}. \tag{6}$$

التوابع الملساء عموما ليست كثيفة في $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$، و لكن إذا كان الاس المتغير $p(.)$ هولدر لوغاريتمي مستمر (log-Hölder) بمعنى

$$|p(x) - p(y)| \leq -\frac{M}{\ln(|x-y|)} \quad \forall x, y \in \Omega \text{ بحيث } |x-y| \leq 1/2,$$

فان التوابع الملساء كثيفة في $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.
التوطئة التالية تستخدم لاحقا

توطئة 2.1 ([6]). إذا كان $(u_n), u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$، فان العلاقات التالية محققة

- $\|u\|_{p(.)} < 1(> 1; = 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1(> 1; = 1)$.
- $\min\left(\rho(u)^{\frac{1}{p^+}}; \rho(u)^{\frac{1}{p^-}}\right) < \|u\|_{p(.)} < \max\left(\rho(u)^{\frac{1}{p^+}}; \rho(u)^{\frac{1}{p}}\right)$.
- $\|u_n - u\|_{p(.)} \to 0 \Leftrightarrow \rho(u_n - u) \to 0$,

لان $p^+ = \sup_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \infty$.

نشير الى أن المتباينة التالية

$$\int_\Omega |u|^{p(x)}dx \leq C\int_\Omega |Du|^{p(x)}dx,$$

ليست محققة عموما (انظر [5] او [4]). لكن، بواسطة التوطئة 2.1 و (6)، يمكن أن نكتب

$$\int_\Omega |u|^{p(x)}dx \leq C\max\left\{\|Du\|_{p(.)}^{p^+}; \|Du\|_{p(.)}^{p^-}\right\}. \tag{7}$$

حيث C ثابت يتعلق بـ Ω .
نعرف أيضا المجموعة $L^{s(\cdot)}(\Omega)$ حيث $s : \overline{\Omega} \to (0, \infty)$ تابع مستمر بـ

$$L^{s(\cdot)}(\Omega) = \left\{\int_\Omega |u|^{s(x)}dx < \infty \text{ مع } u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ قابل للقياس}\right\}.$$

المراجع المحتملة لنظرية فضاءات لوبيغ - سوبولاف ذات الاس المتغير [4]، [5]، [6].

3 نوع جديد للمجموعات (New type of Sets):

ليكن $L_0(\Omega)$ الذي يرمز الى مجموعة التوابع القابلة للقياس على Ω. من أجل كل تابع $p\in C_+(\Omega)$ نضع

$$\mathrm{Lip}_{p(.)}(\mathbb{R})=\Big\{T\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})\mid T(0)=0 \quad \text{و} \quad T'\in L^{p}\ (\mathbb{R})\Big\}.$$

من أجل $k>0$ إذا وضعنا $T_k(t)=\frac{1}{2}\{|t+k|-|t-k|\}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ فاننا نلاحظ أن التوابع T_k $(k>0)$ و قوس الظل arctan تنتمي الى $\mathrm{Lip}_{p(.)}(\mathbb{R})$.
نعرف

$$\begin{aligned}L_0^{1,p(.)}(\Omega) \;=\; &\Big\{u\in L_0(\Omega)\mid \forall T\in \mathrm{Lip}_{p(.)}(\mathbb{R}),\ T(u)\in W_0^{1,p^-}(\Omega),\ \text{مع}\\ &\sup_{k>0}\int_\Omega \frac{|DT_k(u)|^{p(x)}}{(1+|T_k(u)|)^{1+\delta}}\,dx<\infty,\ \forall\delta>0\Big\}.\end{aligned}$$

نشير الى انه إذا كان $p(x)=p$ من أجل كل $x\in\Omega$ فان $L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ يسمى T-set و هذا في ([8]).
من السهل إثبات أن $W_0^{1,p(.)}(\Omega)\subset L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ من أجل كل $p\in C_+(\overline{\Omega})$.

فرضية 3.1. إذا كان $v\in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ فان $Dv(x)$ موجود حيثما كان تقريبا على Ω، و بالاضافة الى ذلك إذا كان φ تابع من صنف C^1 من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$، لدينا

$$D(\varphi\circ v)(x)=(\varphi'\circ v)Dv(x)\quad \text{حيثما كان تقريبا على}\ \Omega. \tag{8}$$

من أجل كل $k>0$ التابع $v^k=T_k(v)$ يحقق

$$Dv^k(x)=\begin{cases} Dv(x), & |v(x)|<k \quad \text{إذا}\\ 0, & \text{غير ذلك}\end{cases}\qquad \text{حيثما كان تقريبا على}\ \Omega.$$

الاثبات: انظر [8]
نرمز ب C_i او C الى ثوابت مختلفة تتعلق فقط ببنية $\hat{a}$، μ، N، و Ω.

فرضية 3.2. نفرض أن p_0 المعرف في (5)، $s(.)$ و $p(.)$ توابع مستمرة على $\overline{\Omega}$ بحيث

$$\begin{cases} 0<s(x)<\frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)},\\ 1<p(x)<N,\end{cases}\qquad \forall\ x\in\overline{\Omega}. \tag{9}$$

إذا كان

$$s^+<\frac{N(p^--1)}{N-p^-}\quad \text{او}\quad p^->p_0 \tag{10}$$

فانه لدينا

$$L_0^{1,p(.)}(\Omega)\subset L^{s(.)}(\Omega). \tag{11}$$

الاثبات: نبدأ بالحالة

$$0<s+<\frac{N(p^--1)}{N-p^-}. \tag{12}$$

ليكن $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ و s^+ المعرف في (12)، و ليكن $\alpha = 1 - \frac{s^+}{p^{-*}}$ مع $\frac{}{N-p^-}$ اذن نجد $\frac{1}{p^-} < \alpha < 1$.
من أجل $k > 0$ نجد أن $v^k = T_k(v) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$.
بما أن

$$\psi_\alpha(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1+|\sigma|)^\alpha}$$

تابع من صنف C^1 و $0 < \psi'_\alpha < 1$ اذن بواسطة (8) نستنتج أن $\psi_\alpha(v^k) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$.
بالاضافة الى ذلك باستعمال متباينة بوانكاريه نحصل على

$$\|\psi_\alpha(v^k)\|_{L^{p^{-*}}(\Omega)} \leq C_1 \|D\psi_\alpha(v^k)\|_{L^{p^-}(\Omega)}$$

و منه

$$\int_\Omega |\psi_\alpha(v^k)|^{p^{-*}} dx \leq C_2 \left(\int_\Omega \frac{|Dv^k|^{p^-}}{(1+|v^k|)^{\alpha p^-}} dx \right)^{\frac{p^{-*}}{p^-}}. \tag{13}$$

بملاحظة أن

$$\alpha p^- - 1 = \left(1 - \frac{s^+}{p^{-*}}\right) p^- - 1 = \frac{N-p}{N} \left(\frac{N(p^- - 1)}{N - p^-} - s^+ \right) > 0,$$

و أن $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ و $|\Omega| < \infty$ نجد أن

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|Dv^k|^{p^-}}{(1+|v^k|)^{\alpha p^-}} < \infty \tag{14}$$

و بالتالي من خلال (13) نحصل على

$$\int_\Omega |\psi_\alpha(v^k)|^{p^{-*}} dx \leq C_3, \quad \forall k > 0. \tag{15}$$

الان ليكن $t \in \mathbb{R}$ اذن

$$\begin{aligned} |t|^{1-\alpha} &\leq (1+|t|)^{1-\alpha} \\ &= (1-\alpha)|\psi_\alpha(t)| + 1. \end{aligned} \tag{16}$$

من خلال (16)، نستنتج أن

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v^k|^{s^+} &= \int_\Omega |v^k|^{p^{-*}(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{p^{-*}-1}(1-\alpha)^{p^{-*}} \int_\Omega |\psi_\alpha(v^k)|^{p^{-*}} + 2^{p^{-*}-1}|\Omega| \end{aligned} \tag{17}$$

بواسطة (15) و (17) نحصل على

$$\int_\Omega |v^k|^{s^+} \leq C_4. \tag{18}$$

حيث C_4 ثابت موجب مستقل عن k.
بجعل $k \to \infty$ في (18) و من خلال توطئة فاتو (Fatou) يمكننا استنتاج أن

$$\int_\Omega |v|^{s^+} dx \leq C_4.$$

و بالتالي نحصل على $v \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$.

الان نفرض أن $s^+ \geq \frac{N(p^- - 1)}{N-p^-}$.

من خلال (9) و استمرارية $s(.)$ و $p(.)$ على $\overline{\Omega}$ يوجد ثابت $\delta > 0$ بحيث

$$\max_{y \in B(x,\delta)\cap\Omega} s(y) < \min_{y \in B(x,\delta)\cap\Omega} \frac{N(p(y)-1)}{N-p(y)}, \quad \forall x \in \Omega. \tag{19}$$

بملاحظة أن $\overline{\Omega}$ متراص فانه بامكننا تغطيتها بعدد منته من الكرات $(B_i)_{i=1}^k$.
علاوة على ذلك ، يوجد ثابت $\tau > 0$ بحيث

$$|\Omega_i| > \tau, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{حيث} \quad \Omega_i := B_i \cap \Omega. \tag{20}$$

نعرف

$$s_i^+ = \max_{y\in\overline{\Omega}_i}\{s(y)\}, \; p_i^- = \min_{y\in\overline{\Omega}_i}\{p(y)\}.$$

ليكن $v \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ و لنفرض أن $s_i^+ < \frac{N(p_i^- - 1)}{N-p_i^-}$.

إذا وضعنا $\alpha_i = 1 - \frac{s_i^+}{p_i^{-*}}$ فان $\frac{1}{p_i^-} < \alpha_i < 1$، من خلال الافتراضات على p^- $(p^- > p_0)$ نجد

$$1 - \alpha_i < 1 - \frac{1}{p_i^-} \leq 1 - \frac{1}{p^+} < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}.$$

هذا مع (18)، يعطينا

$$\int_{\Omega_i} |v^k|^{1-\alpha_i} dx \leq |\Omega| + \int_\Omega |v^k|^{1-\frac{1}{p^+}} dx \leq C_5. \tag{21}$$

باستخدام متباينة بوانكاريه-ويرتينغر (Poincaré-Wirtinger)، نحصل على

$$\|\psi_{\alpha_i}(v^k) - \overline{\psi}_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)} \leq C_6 \|D\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)},$$

حيث

$$\overline{\psi}_{\alpha_i}(v^k) = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} \psi_{\alpha_i}(v^k).$$

المتباينات (16)، (21) و (20) تضمن لنا أن

$$|\overline{\psi}_{\alpha_i}(v^k)| \leq C_7.$$

وبالتالي ، من خلال أن $p_i^- \leq p(x)$ على Ω_i و $\alpha_i p_i^- > 1$، نحصل على

$$\|\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)} \leq C_8 + C_6 \|D\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i}(\Omega_i)} \leq C_9.$$

الآن ، باستخدام نفس الحجج كما كان من قبل محليا ، بدلاً من التقدير (17)، نحصل على أنه
من أجل كل $i = 1, \dots, k$

$$\int_{\Omega_i} |v^k|^{s_i^+} \leq C_{10} + C_{10}\int_{\Omega_i} |\psi_\alpha(v^k)|^{p_i} \;\; dx \leq C_{11}.$$

باستخدام توطئة فاتو نجد ان

$$\int_{\Omega_i} |v|^{s_i^+} \leq C_{11}, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

اخيرا، بما أن $s(x) \leq s_i^+$ على Ω_i نحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظة 3.3. لدينا $p_0 < 2 - \frac{1}{N}$ من أجل كل تابع $p(.) > 1$.

فرضية 3.4. ليكن $p(.) : \overline{\Omega} \to (1, N)$ و $q(.) : \overline{\Omega} \to (0, N/(N-1))$ توابع مستمرة. نفرض أن

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} \{q(x)(p(x)-1)\} < \frac{N(p^- - 1)}{N-1} \quad \text{او} \quad p^- > p_0.$$

اذن نجد

$$\int_\Omega |Dv|^{q(x)(p(x)-1)}dx < \infty, \quad \forall v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega).$$

الاثبات: ليكن $v \in L^{1,p(.)}(\Omega)$ و $q(x) \in (0, N/(N-1))$ من أجل كل $x \in \overline{\Omega}$، و ليكن $s(x) = q(x)(p(x)-1)$.
في خطوة اولى ليكن s^+ ثابت يحقق

$$0 < s^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N-1}. \tag{22}$$

نشير الى أن (22)، مع (4)، يستلزم أن $s(x) < p^-$.
الان، من أجل كل $k > 0$، نكتب

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Dv^k|^{s(x)}dx &= \int_\Omega \frac{|Dv^k|^{s(x)}}{(1+|v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-}}(1+|v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-}\\ &\le 2\left\|\frac{|Dv^k|^{s(x)}}{(1+|v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-}}\right\|_{\frac{p^-}{s(.)}}\left\|(1+|v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-}\right\|_{\frac{p^-}{p^- - s(.)}}.\end{aligned}$$

بما أن

$$\int_\Omega \frac{|Dv^k|^{p(x)}}{(1+|v^k|)^{1+\delta}}dx \le C, \quad \forall k > 0,$$

اذن من خلال التوطئة 2.1 نحصل على

$$\int_\Omega |Dv^k|^{s(x)}dx \le C_{12}\max\left\{\left(\int_\Omega (1+|v^k|)^{(1+\delta)\frac{s(x)}{p^- - s(x)}}\right)^{\frac{p^- - s^+}{p^-}}; \left(\int_\Omega (1+|v^k|)^{(1+\delta)\frac{s(x)}{p^- - s(x)}}\right)^{\frac{p^- - s^-}{p^-}}\right\}. \tag{23}$$

بما أن $0 < s^+ < \frac{N(p^- -1)}{N-1}$ فان $\frac{s(x)}{p^- - s(x)} \le \frac{s^+}{p^- - s^+} < \frac{N(p^- -1)}{N-p^-}$، اذن يمكننا اختيار $\delta > 0$ بحيث

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}\left\{(1+\delta)\frac{s(x)}{p^- - s(x)}\right\} = (1+\delta)\frac{s^+}{p^- - s^+} < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}. \tag{24}$$

من خلال الفرضية 3.2، (23) و (24)، نجد أن

$$\int_\Omega |Dv^k|^{s(x)}dx \le C_{13}. \tag{25}$$

من الفرضية 3.1، من أجل اي معطى $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ فان $Dv(x)$ موجود حيثما كان تقريبا في Ω.
بجعل $k \to +\infty$ في (25) و باستخدام توطئة فاتو، نحصل على

$$\int_\Omega |Dv|^{s(x)}dx \le C_{13}.$$

الان ، نفرض أن $s^+ \geq \frac{N(p^- -1)}{N-1}$.
بنفس حجة (23) نحصل على $\delta > 0$ يحقق

$$\int_\Omega |Dv^k|^{s(x)}dx \leq C_{14} \max\left\{A_k^{1-\left(\frac{s(.)}{p(.)}\right)^+}; A_k^{1-\left(\frac{s(.)}{p(.)}\right)^-}\right\}$$

مع

$$A_k = \int_\Omega (1+|v^k|)^{(1+\delta)\frac{s(x)}{p(x)-s(x)}} \text{ و } (1+\delta)\frac{s(x)}{p(x)-s(x)} < \frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)}.$$

باستخدام الفرضية 3.2 و من خلال كون $p^- > p_0$ يمكننا استنتاج أن

$$\int_\Omega |Dv^k|^{q(x)(p(x)-1)}dx \leq C_{15}.$$

هذا و باستخدام توطئة فاتو، نتحصل على

$$\int_\Omega |Dv|^{s(x)}dx \leq C_{15}.$$

هذا التقدير يثبت المطلوب.

فرضية 3.5. ليكن $p(.) : \overline{\Omega} \to (2-\frac{1}{N}, N)$ تابع مستمر، لدينا

$$L_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_0^{1,s(.)}(\Omega)$$

من أجل كل تابع مستمر $s(.) : \overline{\Omega} \to [1, \infty)$ حيث

$$1 \leq s(x) < \frac{N(p(x)-1)}{N-1}, \quad \forall \quad x \in \overline{\Omega}.$$

الاثبات: بما أن $p(x) > 2 - \frac{1}{N}$ لدينا $N(p(x)-1)/(N-1) > 1$ من أجل كل $x \in \overline{\Omega}$.
ليكن $s(x) \in \left[1, \frac{N(p(x)-1)}{N-1}\right)$ و $q(x) = s(x)/(p(x)-1)$ اذن $q(x) \in (0, \frac{N}{N-1})$ و $p^- > 2 - \frac{1}{N} > p_0$.
من الفرضية 3.4، من أجل كل $v \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ نجد أن

$$\int_\Omega |Dv|^{s(x)}dx \leq C_{16}. \tag{26}$$

انتهى الاثبات.

ملاحظة 3.6. في الحالة الثابتة $p(x) = p$، الفرض $p > p_0$ محقق من أجل كل اس $p > 1$.

النتائج الرئيسية (The main Results):

تعريف 4.1. تابع u هو حل ضعيف للمسألة (P) إذا كان $u \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$، $\widehat{a}(x,u,Du) \in L^1(\Omega)^N$، و من أجل كل $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$، نجد أن

$$\int_\Omega \widehat{a}(x,u,Du)D\varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu.$$

النتيجة الرئيسية هي التالي.

نظرية 4.2. ليكن $\mu \in M(\Omega)$. نفرض أن $p(.) : \overline{\Omega} \to (1, N)$ تابع مستمر بحيث

$$\frac{p^+ - 1}{p^- - 1} < \frac{N}{N-1} \quad or \quad p_- > p_0, \tag{27}$$

و $\widehat{a}$ يحقق (1)-(3). فانه، يوجد على الاقل حل ضعيف $u \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$ للمسألة الناقصية (P).
الاثبات يحتاج إلى ثلاث خطوات.

الخطوة 1تقريب.

لتكن (μ_n) متتالية من $C_0^\infty(\Omega)$ تتقارب نحو μ في $\mathcal{D}'(\Omega)$ و تحقق التقدير

$$\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{M(\Omega)}, \quad n \geq 1.$$

من أجل $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$، نضع

$$Au = -\mathrm{div}\,(\widehat{a}(x,u,Du)).$$

المؤثر A ينقل $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ نحو $\left(W_0^{1,p(.)}(\Omega)\right)'$، و بفضل (2) نجد أن A نصف مستمر (hemicontinuous) بمعنى: من أجل كل u، v، w من $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$، التطبيق $\langle A(u+\lambda v), w\rangle \mapsto \lambda \ni \mathbb{R}$ مستمر.
بواسطة (1) و التوطئة 2.1 يمكننا كتابة

$$\begin{aligned}
\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} &\geq \alpha\frac{\rho_{p(.)}(Du)}{\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}}\\
&\geq \alpha\frac{\min\left\{\|u\|^{p^+}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}, \|u\|^{p^-}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}\right\}}{\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

هذا يثبت أن A قهري $(Coercif)$.
المؤثر A محدود. في الواقع، إذا كان $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ نجد أن

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{\left(W_0^{1,p(.)}(\Omega)\right)'} &\leq \sup_{\varphi\in W_0^{1,p(.)}(\Omega), \|\varphi\|\leq 1}\int_\Omega \beta\left(h+|u|^{p(x)-1}+|Du|^{p(x)-1}\right)|D\varphi|dx\\
&\leq 2\beta\left\|\left(h+|u|^{p(.)-1}+|Du|^{p(.)-1}\right)\right\|_{\frac{p(.)}{p(.)-1}}.
\end{aligned}$$

من خلال التوطئة 2.1 و (7) نحصل على النتيجة المطلوبة.
النتيجة المحصل عليها في [7]تؤكد أن A غامر، و بالتالي توجد متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ تحقق

$$\int_\Omega \widehat{a}(x,u_n,Du_n)D\varphi = \int_\Omega \mu_n\varphi, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p(.)}(\Omega). \tag{28}$$

الخطوة 2تقديرات قبلية.

توطئة 4.3. من أجل كل $T \in \mathrm{Lip}_{p(.)}(\mathbb{R})$، يوجد ثابت $C = C(T)$، بحيث

$$\int_\Omega |DT(u_n)|^{p^-}dx \leq C, \quad \forall n \geq 1. \tag{29}$$

$$\int_\Omega |DT_k(u_n)|^{p(x)}dx \leq k\frac{\|\mu\|_{M(\Omega)}}{\alpha}, \quad \forall k > 0, \tag{30}$$

و من أجل كل $\delta > 0$، يوجد ثابت $C = C(\delta)$ يحقق

$$\int_\Omega \frac{|Du_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}dx \leq C, \quad \forall n \geq 1. \tag{31}$$

الاثبات: ليكن $T \in \mathrm{Lip}_{p(.)}(\mathbb{R})$.
نعتبر التابع الاختباري $\int_0^{u_n} |T'(t)|^{p^-} dt$ في (28).
باستعمال قهرية A، نحصل على

$$\alpha \int_\Omega |Du_n|^{p(x)} |T'(u_n)|^{p^-} dx$$
$$\leq \quad \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \int^{+\infty} |T'(x)|^{p^-} dx \leq C(T).$$

اذن لدينا (29). إذا اخذنا $T_k(u_n)$ تابع اختباري في (28)، نحصل على (30).
من أجل التقدير (31)، نختار $\psi_\delta(u_n) = \int_0^{u_n} \frac{d\sigma}{(1+|\sigma|)^{1+\delta}} d\sigma$ تابع اختباري في (28) و باستعمال (1) نجد

$$\int_\Omega \frac{|Du_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^{1+\delta}} dx \leq \frac{\|\mu\|_{M(\Omega)}}{\delta\alpha}.$$

توطئة 4.4. ليكن $s(.)$ و $p(.)$ معرفين في الفرضية (3.2). إذا كان الافتراض (10) محقق فانه لدينا

$$\int_\Omega |u_n|^{s(x)} dx \leq C, \quad \forall n \geq 1. \tag{32}$$

الاثبات: من أجل إثبات (32)، نقوم بتعديل اثبات المبرهنة 3.2. و ذلك باستبدال (14) بـ (31). هكذا التوطئة 4.4 تم اثباتها.

توطئة 4.5. ليكن $p(.)$ كما هو مشار اليه في (27) اذن يوجد ثابت $C > 0$، بحيث

$$\int_\Omega |Du_n|^{q(x)(p(x)-1)} dx \leq C, \tag{33}$$

من أجل بعض التوابع المستمرة $q(.)$ على $\overline{\Omega}$ التي تحقق

من أجل كل $x \in \overline{\Omega}$، $1 < q(x) < \frac{N}{N-1}$.

الاثبات: نفرض أن $\frac{N}{N-1} < \frac{p^+-1}{p^--1}$، اذن يوجد تابع مستمر $q(.)$ على $\overline{\Omega}$ يحقق

$$1 < q(x) < \frac{N}{N-1}, \quad \text{و} \quad q^+(p^+-1) < \frac{N(p^--1)}{N-1}, \tag{34}$$

بالتالي، يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$(1+\delta_1)\frac{q^+(p^+-1)}{p^- - q^+(p^+-1)} < \frac{N(p^--1)}{N-p^-}. \tag{35}$$

بما أن $1 < p(x) < N$ و $1 < q(x) < N/(N-1)$، نجد أن
$q(x) < p'(x) = p(x)/(p(x)-1)$ و $q(x)(p(x)-1) < \frac{N(p(x)-1)}{N-1}$.
ليكن $\delta > 0$، باستعمال متباينة هولدر نحصل على

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du_n|^{q(x)(p(x)-1)} dx &= \int_\Omega \frac{|Du_n|^{q(x)(p(x)-1)}}{(1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)}} (1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)} dx \\ &\leq 2 \left\| \frac{|Du_n|^{q(x)(p(x)-1)}}{(1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)}} \right\|_{\frac{p(.)}{q(.)}} \left\| (1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)} \right\|_{\frac{p'(.)}{p'(.)-q(.)}}.\end{aligned}$$

من خلال التوطئة 2.1 و التقدير (31) نستنتج أن

$$\int_\Omega |Du_n|^{q(x)(p(x)-1)}dx \le C\max\left\{B_n^{1-\left(\frac{q(.)}{p'(.)}\right)^+}; B_n^{1-\left(\frac{q(.)}{p'(.)}\right)^-}\right\}, \tag{36}$$

بحيث

$$B_n = \int_\Omega (1+|u_n|)^{(1+\delta)\frac{q(x)(p(x)-1)}{p(x)-q(x)(p(x)-1)}}dx.$$

من خلال كون $q(.)$ تابع مستمر و $q(x) < N/(N-1)$، يمكننا اختيار $\delta_2 > 0$ بحيث

$$\delta_2 < \frac{N(p(x)-q(x)(p(x)-1))}{q(x)(N-p(x))} - 1 = \frac{p(x)(N-1)}{q(x)(N-p(x))}\left(\frac{N}{N-1} - q(x)\right).$$

باخذ $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ نجد أن

$$s(x) = (1+\delta)\frac{q(x)(p(x)-1)}{p(x)-q(x)(p(x)-1)} < \frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)},\ \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{37}$$

من خلال (35)، نستنتج أن

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} s(x) \le (1+\delta)\frac{q^+(p^+-1)}{p^- - q^+(p^+-1)} < \frac{N(p^- -1)}{N-p^-} = \min_{x\in\overline{\Omega}}\left\{\frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)}\right\}. \tag{38}$$

الان، من خلال (36)، (37)، (38) و(32) نحصل على (33).

إذا كان $\frac{N}{N-1} \ge \frac{p^+-1}{p^--1}$ و $1 < q(x) < \frac{N}{N-1}$، يمكننا استعمال الفرض $p > p_0$، (36) و (37) للحصول على المطلوب. هكذا تم اثبات التوطئة.

لازمة 4.6 (بخصوص التوطئة 4.4). ليكن $p(.)$ و $q(.)$ المشار اليهما في التوطئة 4.5 و $s(x) = q(x)(p(x)-1)$.

بملاحظة أن (34) تستلزم أن

$$s^+ < \frac{N(p^- -1)}{N-1} < \frac{N(p^- -1)}{N-p^-},$$

من خلال التوطئة 4.4، نجد أن

$$\int_\Omega |u_n|^{q(x)(p(x)-1)}dx \le C. \tag{39}$$

الخطوة 3 المرور للانهاية.

توطئة 4.7. توجد متتالية جزئية (نرمز لها (u_n)) تتقارب حيثما كان تقريبا نحو التابع u ($|u|^{q(.)(p(.)-1)} \in L^1(\Omega)$)، مع $p(.)$ و $q(.)$ مشار اليهما في التوطئة 4.5.

الاثبات: نضع $T(u_n) = \arctan(u_n)$. بواسطة (29) المتتالية $(T(u_n))$ تبقى في مجموعة محدودة من $W_0^{1,p}(\Omega)$ ، بالتالي توجد متتالية جزئية (نرمز لها $(T(u_n))$) بحيث

$$T(u_n) \to w, \quad \text{بقوة في } L^p(\Omega) \text{ و حيثما كان تقريبا في } \Omega. \tag{40}$$

اذن لدينا

$$u_n \to T^{-1}(w) := u, \quad \text{حيثما كان تقريبا في } \Omega. \tag{41}$$

حسب (39)، (41)، و توطئة فاتو نستنتج أن u محدود حيثما كان تقريبا في Ω و $|u|^{q(.)(p(.)-1)} \in L^1(\Omega)$.

توطئة 4.8. لدينا ما يلي

$$Du_n \to Du, \quad \text{حيثما كان تقريبا في } \Omega, \tag{42}$$

الاثبات: بنفس طريقة اثبات الجزء الاول من [[10], التوطئة 3.8]، اذن نجد

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega_\eta\cap\{|u|\leq k\}}(\widehat{a}(x,u_n,Du_n)-\widehat{a}(x,u_n,DT_k(u)))(Du_n-DT_k(u))dx=0 \tag{43}$$

حيث $\Omega_\eta=\{x\in\Omega\mid |u_n-u|\leq\varepsilon\}$، من أجل كل $n\geq n_\varepsilon$ و $|\Omega/\Omega_\eta|\leq\eta$، $\varepsilon\in(0,1)$، $\eta>0$.
باستدلال كما في [10]، نستنتج انه توجد متتالية جزئية $(Du_{n'})$ تتقارب نحو Du حيثما كان تقريبا في $\Omega_\eta\cap\{|u|\leq k\}$.
نضع

$$I_{n,\eta}=\int_{\Omega_\eta\cap\{|u|\leq k\}}|Du_n-Du|^{p^--1}dx.$$

حسب (30) و نظرية فيتالي (Vitali)، المتتالية الجزئية $I_{n',\eta}$ تتقارب نحو صفر. بالاضافة الى ذلك، بحجة التناقض نجد أن كل المتتالية تتقارب نحو الصفر.
من أجل كل $n,m\geq 1$، نكتب

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx=\int_{\Omega_\eta\cap\{|u|\leq k\}}|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx+\\
&\int_{\Omega/\Omega_\eta}|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx+\int_{\Omega_\eta\cap\{|u|>k\}}|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx\\
&\leq C(I_{n,\eta}+I_{m,\eta})+\int_{\Omega/\Omega_\eta}|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx+\int_{\Omega_\eta\cap\{|u|>k\}}|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx\\
&\leq C(I_{n,\eta}+I_{m,\eta})+\\
&\left(|\{|u|>k\}|^{1-\frac{1}{q^-}}+|\Omega/\Omega_\eta|^{1-\frac{1}{q^-}}\right)\left(\int_\Omega|Du_n-Du_m|^{q^-(p^--1)}\right)^{\frac{1}{q^-}}.
\end{aligned}\tag{44}$$

نستعمل التوطئة 4.7، نحصل على

$$|\{|u|>k\}|\leq\frac{C}{k^{q^-(p^--1)}}.$$

حسب (44) و (33)، يعني أن

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx\\
&\leq C\left(I_{n,\eta}+I_{m,\eta}+k^{-(q^--1)(p^--1)}+\eta^{1-\frac{1}{q^-}}\right).
\end{aligned}$$

ناخذ $k\to+\infty$ و $\eta\to 0$، نستنتج أن

$$\lim_{n,m}\int_\Omega|Du_n-Du_m|^{p^--1}dx=0.$$

من خلال هذا نستنتج أن (Du_n) هي متتالية لكوشي بالقياس في Ω، اذن توجد متتالية جزئية نرمز لها (Du_n) و تابع قابل للقياس w بحيث

$$Du_n\to w,\quad \text{حيثما كان تقريبا في } \Omega\ . \tag{45}$$

حسب (30) و التوطئة 4.7 نحصل على $Du=w$. الاثبات انتهى.

اثبات المبرهنة 4.2.

بفضل (31) يمكننا كتابة

$$\int_\Omega\frac{|DT_k(u_n)|^{p(x)}}{(1+|T_k(u_n)|)^{1+\delta}}dx\leq C$$

ناخذ $n \to +\infty$ في هذا التقدير، حسب التوطئة 4.7 و (42) نجد أن

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|DT_k(u)|^{p(x)}}{(1+|T_k(u)|)^{1+\delta}} dx \le C \tag{46}$$

ناخذ $n \to +\infty$ في (29)، نحصل على $T(u) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$. هكذا $u \in L_0^{1,p(.)}(\Omega)$.
نستخدم (2)، (33)، (39)، التوطئة 4.7، (42) و نظرية فيتالي، يمكننا بسهولة المرور الى النهاية في (28). هذا يثبت النظرية 4.2.

المراجع

[1] M. Bendahmane and P. Wittbold. (2009), Renormalized solutions for nonlinear elliptic equations with variable exponents and L^1- data. Nonlinear Analysis TMA 70 (2), 567-583.

[2] L. Boccardo, T. Gallouët. (1992), Nonlinear elliptic equations with right hand side measures, Comm. Partial Dffierential Equations 17, 641-655.

[3] Y. Chen, S. Levine, and M. Rao. (2006), Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math, 66, 1383-1406.

[4] L. Diening, P. Hästö, T. Harjulchto and M. Ružička. (2011), Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

[5] X.L. Fan and D. Zhao. (2001), On the spaces $L^{p(\cdot)}(U)$ and $W^{m,p(\cdot)}(U)$, J. Math. Anal. Appl, 263, -424 446.

[6] O. Kováčik, J. Rákosník. (1991), On spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{1,p(\cdot)}$, Czechoslovak Math. J. 41, 592-618.

[7] J.L. Lions. (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux Limites non linéaires. Dunod, Paris.

[8] J. M. Rakotoson. (1993), Generalized solution in a new type of sets for problems with measures as data, Di fferential Integral Equations 6 (1), 27-36.

[9] J.M. Rakotoson. (1991), Quasilinear elliptic problems with measures as data, Di ff. Int. Equ. 4, 449-457

[10] J. M. Rakotoson. (1994), T-Sets and Relaxed Solutions for Parabolic Equations, Journal of Di fferential Equations, 458-471.

[11] Mihailescu, M. and Radulescu, V., A multiplicity. (2006), result for a nonlinear degenrate problem arising in the theory of eletrorheological fluids, Proc. R. Soc. A, 462 2625-2641.

[12] M.Ruzicka. (2000), Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory, Springer, Berlin. Lecture Notes in Mathematics, 1748.