تدفق سائل ذي سطح حرّ فوق عقبات شبه منحرفة مع تأثير الجاذبيّة والتوتر السّطحيّ

عبد القادر لعياضي* عبد الكريم ومرزوقي **

تاريخ الإرسال25 ديسمبر 2019 تاريخ القبول 06 فيفري 2020

الملخص Abstract :

في هذا العمل، ندرس التّدفّقات الثنائيّة الأبعاد على عقبات شبه منحرفة تحت تأثير الجاذبيّة والتّوتّر السّطحيّ، في المياه ذات العمق الثّابت. نفترض أنّ السّائل غير قابل للضّغط وليس لزجا. نفترض أنّ التّدفّق ليس دورانيّا. يتمّ حلّ المسألة عدديًّا باستخدام تقنيّة المعادلة التّكامليّة الحدوديّة، استنادًا إلى صيغة تكامل كوشي. يتبيّن أنّه بالنّسبة لكلّ من التّدفّقات فوق الحرجة وتحت الحرجة، تعتمد حلول هذه المسألة على ثلاثة معاملات: (1) عدد فرود.

3) زوايا العقبات. توجد عائلات متعدّدة من الحلول لقيم معيّنة للمعاملات 2Weber) عدد ويبر Froude الثّلاثة السّابقة، سوف نناقش هذه النّتائج في نهايّة هذه الورقة.

كلمات مفتاحيّة: تدفّق سائل ذي سطح حرّ، تدفّق كمون، عدد ويبر، توتر سطحيّ، عدد فرود.

Title: Free-flowing liquid flow over trapezoidal obstacles with effect Gravity and surface tension

Abstract: In this work, we study two-dimensional flows over trapezoidal obstacles under the effects of gravity and surface tension in water of a constant depth. The fluid is treated as inviscid and incompressible. The flow is assumed to be irrotational. The problem is solved numerically by using the boundary integral equation technique, based on Cauchy integral formula. It is shown that, for both supercritical and subcritical flows, the solutions of this problem depend on three parameters: (1) the Froude number, (2) the Weber number, (3) the angles of obstacles. Multiple

* قسم الرياضيات, جامعة بسكرة Email :abdelkader.laiadi@univ-biskra.dz

**قسم الرياضيات جامعة المسيلة

families of solutions exist for particular values of the precedent three parameters. We discuss this results at the end of this paper.

Keywords: Free surface flow, potential flow, Weber number, surface tension, Froude number.

المدخل Introduction

خلال العقود الأربعة الماضيّة، كان هناك اهتمام متزايد في دراسة مسائل التّدفّق لسائل ذي سطح حرّ مع وجود حالات غير منتظمة محدودة. استخدمت الطّرق العدديّة والتّحليليّة لحلّ هذه المسائل للحصول على الميزات الأساسيّة لمثل هذا التّدفّق في وضعيات مختلفة. الحلول الخطّيّة للتدفّق فوق بعض العقبات وأيضًا تمّ دراسة، [13] Lamb ولامب[7] Forbes درست من قبل كثير من الباحثين مثل فوربس، وعبد المالك [4] Binder المسائل غير الخطيّة من قبل العديد من المؤلّفين مثل بندر. ومع ذلك فقد واجهوا بعض الصّعوبات في دراسة تقارب الطّرق المستعملة. [1] Abd-el-malek.

أما بالنّسبة للعقبات ذات الأشكال الهندسيّة المعروفة مثل (مثلث، مربع، شبه منحرف...) لقد درس حل لمسألة تدفّق على [8] Forbes منذ القرن الماضي من قبل بعض الباحثين على سبيل المثال، قدم [1] Abd-el-malek عقبة دائريّة مع وجود تأثير الجاذبيّة والتّوتّر السّطحيّ، ودرس عبد المالك العثور على حلّ لتدفّق [9] Hanna مسألة تدفّق فوق عقبة مثلّثيّة مع تأثير الجاذبيّة. وأكدّ المؤلّفون فوق عقبة شبه منحرفة باستعمال طريقة تقطيع السّلسة.

في هذه الورقة، نقوم بدراسة مسألة تدفّق ثنائيّ الأبعاد ولا دورانيّ لسائل غير قابل للضّغط وغير لزج ذي سطح حرّ ذي شكل غير معروف فوق عقبتين شبه منحرفتين مع وجود التّوتّر السّطحيّ والجاذبيّة المدرجة (boundary element)في الشّروط الحدوديّة ويتمّ حل هذه المسألة عدديّا بواسطة طريقة عنصر الحدود.

يتمّ صياغة المسألة على أنّها معادلة تفاضليّة-تكامليّة وعند حلّها نحصل على جملة معادلات جبريّة.

يتمّ حلّ هذه الجملة غير الخطيّة باستخدام طريقة نيوتن. نقوم بصياغة وضعيّة المسألة في المقطع 2 وبتقديم المعادلة التّكامليّة في المقطع 3. الطّريقة العدديّة لحلّ المسألة مفصّلة في المقطع 4، وقدمها هولمس [15] Vanden-Broeck وقد استعملت من قبل العديد من المؤلّفين مثل فادن بروك [3] Belward. وبلوارد [4] Binder، بندر[11,12] Holmes

في المقطع الأخير نناقش النّتائج المحصّل عليها مع ملاحظة تأثير الجاذبيّة والتّوتّر السّطحيّ على شكل السّطح الحرّ للسّائل. ونوضّح ذلك برسم منحنيات الأسطح الحرّة من أجل قيم معيّنة للمعاملات السّابقة.

وضعيّة المسألة

نعتبر تدفّق سائل غير قابل للضّغط وغير لزج ثنائيّ الأبعاد وليس دورانيّا. كما نعتبر منطقة التّدفّق محدودة من الأسفل بعائقين شكلهما شبه منحرف معرّفين بالزّاويتين β وγ حيث $0<|\gamma|<\frac{\pi}{2}$

و$0<|\beta|<\frac{\pi}{2}$، ونعتبر المنطقة أيضا محدودة من الأعلى بسطح حر $M''A$. نختار الإحداثيّات الدّيكارتيّة (x,y) وانظر الشّكل 1). أمّا اتّجاه الجاذبيّة فيكون عكس الاتّجاه الموجب للمحور y.

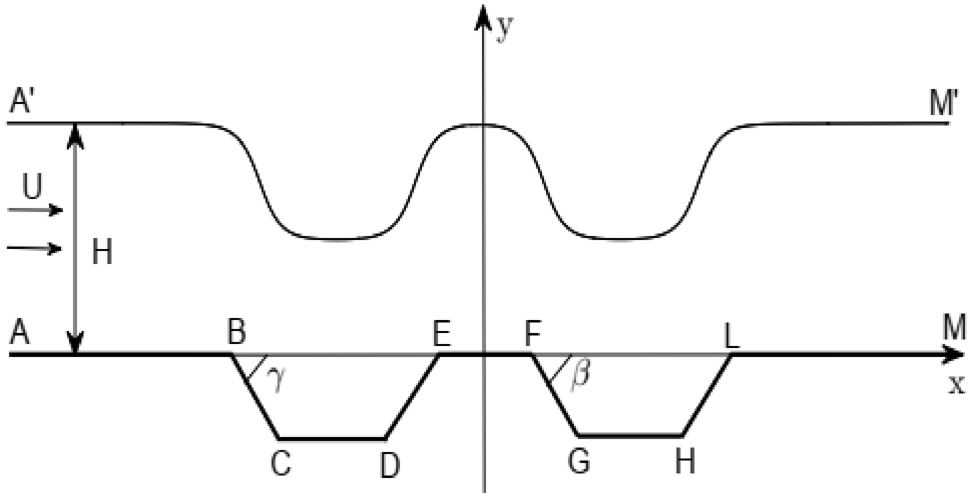
ليكن مرافق شعاع السّرعة المركّبة المعرّف بالعلاقة التّاليّة

$$\omega = u - iv \qquad (2.1)$$

حيث u وv هما مركبتا شعاع السّرعة.

عندما يؤول x إلى لا نهاية ($x\to\infty$) نفرض أنّ التّدفّق يقترب من تيّار منتظم بسرعة منتظمة U وارتفاع الماء ثابت، هو H. نعتبر اصطلاحا شعاع الوحدة للسّرعة هو U وطول الوحدة لارتفاع السّائل هو H. ندرس في هذه المسألة تأثير الجاذبيّة والتّوتّر السّطحيّ على شكل السّطح الحرّ للسّائل. في هذه الحالة، نعتمد على معاملين هما عدد ويبر المعرف بالعلاقة $\delta=\frac{T}{\rho U^2 H}$ وعدد فرود المعرف بالعلاقة $Fr=\frac{U}{\sqrt{gH}}$.

حيث T هو التّوتّر السّطحيّ، g هي الجاذبيّة و ρ هي كثافة السّائل.



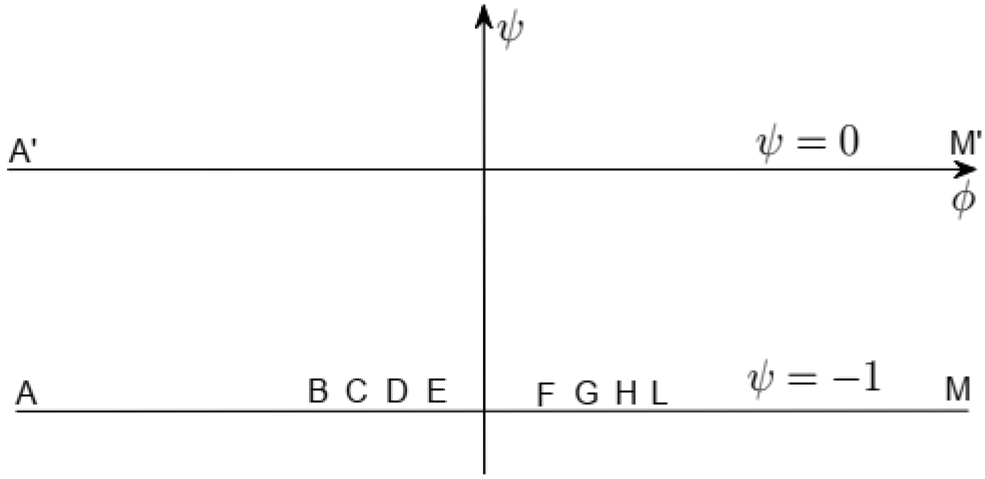
الشّكل 1. نمثّل في المستوي $z=x+iy$ منحني السّطح الحرّ A'M' المعيّن من أجل $Fr=1.5$ ، $\gamma=\beta=-\frac{\pi}{6}$.

نعتبر دالّة الكمون المركّبة المعرفة كالتّالي

$$f(x,y)=\phi(x,y)+i\psi(x,y) \qquad (2.2)$$

حيث ϕ تمثّل دالّة الكمون و ψ دالّة التّيّار.

AM. على خطّ التيار السّفلي $\psi=-1$ ، وأيضا A'M' على خطّ التيار الحرّ للسّائل $\psi=0$ نختار تظهر في الشّكل 2. $f=\phi+i\psi$ منطقة التّدفّق في المستوي في منطقة التّدفّق. $\Delta\phi=0$ التي تحقق معادلة لا بلاس ϕ المسألة الرّياضيّاتيّة هي إيجاد دالّة الكمون



. $f=\phi+i\psi$ الشّكل 2. المستوي

باعتبار وجود تأثير الجاذبيّة والتّوتّر السّطحيّ على شكل السّطح الحرّ للسائل، تكتب معادلة برنولي على الشّكل

$$\frac{1}{2}\left(u^{*2}+v^{*2}\right)+\frac{p^*}{\rho^*}+g^*y^*=C \qquad (2.3)$$

المعرف كالتّالي p_0 و p^* ليكن قانون لابلاس (ضغط لابلاس) الذي يحدّد العلاقة بين

$$p^*-p_0=\frac{T}{R}=K^*T \qquad (2.4)$$

هو p_0 هو ضغط السّائل، p^* هو نصف قطر الانحناء، (the curvature) هو الانحناء $K=\frac{1}{R}$ حيث الضّغط الجوّي. لتكن المتغيّرات، والتي تسمّى المتغيّرات لا بعد، التّاليّة

$$u=\frac{u^*}{U},v=\frac{v^*}{U},K=K^*H,g=\frac{g^*}{H},y=\frac{y^*}{H}$$

نعوّض المعادلة (2.4) في المعادلة (2.3) وباستعمال المتغيّرات لا بعد، تكتب معادلة برنولي على الشّكل

$$\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)+\delta K+\frac{1}{Fr^2}(y-1)=\frac{1}{2} \qquad (2.5)$$

الشّروط الحديّة الحركيّة معرفة بالمعادلات التّاليّة

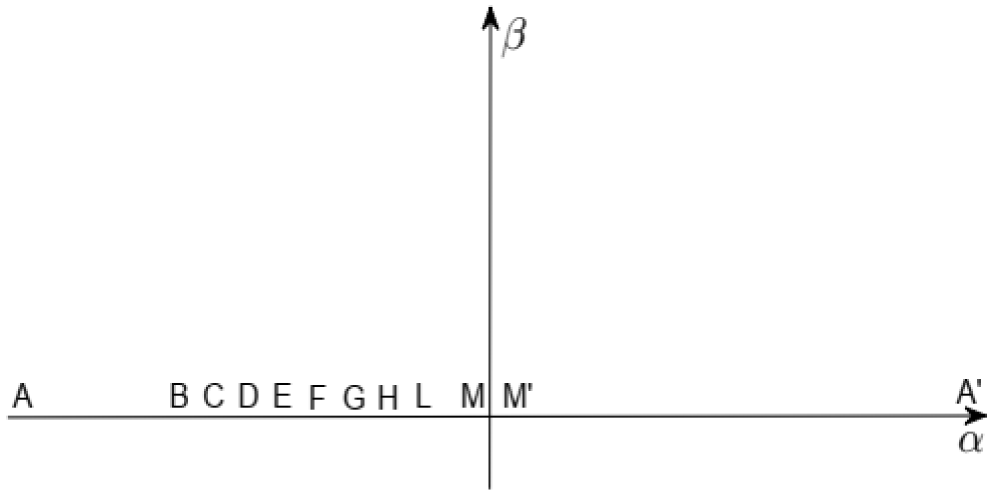
$$\begin{cases} v=0, \quad \psi=-1, -\infty<\phi<\phi_B, \phi_C<\phi<\phi_D, \phi_G<\phi<\phi_H, \phi_E<\phi<\phi_F, \ \phi_L<\phi<+\infty, \\ v=u\tan|\gamma|, \quad \psi=-1, \phi_B<\phi<\phi_C, \phi_F<\phi<\phi_G, \\ v=u\tan|\beta|, \quad \psi=-1, \phi_D<\phi<\phi_E, \phi_H<\phi<\phi_L \end{cases} \tag{2.6}$$

نعرف الدّالّة $\tau-i\theta$ كالتّالي

$$\omega=u-iv=e^{\tau-i\theta} \tag{2.7}$$

(انظر الشّكل 3) ζ نقوم بتحويل منطقة التّدفّق في المستوي السّابق (الشّكل 2) إلى المستوي النّصف العلويّ باستعمال التّحويل التّالي

$$\zeta=\alpha+i\beta=e^{-\pi f}=e^{-\pi(\phi+i\psi)}=e^{-\pi\phi}(\cos\pi\psi-i\sin\pi\psi) \tag{2.8}$$



الشّكل 3. المستوي $\zeta=\alpha+i\beta$

طويلة شعاع السّرعة معرفة بالعلاقة

$$u^2+v^2=e^{2\tau} \tag{2.9}$$

معرّف بالعلاقة θ بدلالة K وأيضا الانحناء

$$K=-e^{\tau}\left|\frac{\partial\theta}{\partial\phi}\right| \tag{2.10}$$

نعوّض (2.9) و (2.10) في المعادلة (2.5)، فنحصل على معادلة برنولي التّاليّة

$$\frac{1}{2}e^{2\tau}-\delta e^{\tau}\left|\frac{\partial\theta}{\partial\phi}\right|+\frac{1}{Fr^2}(y-1)=\frac{1}{2} \quad \text{on} \quad A'M' \tag{2.11}$$

كالتّالي ζ نستعمل العلاقة (2.7). تكون الشّروط الحديّة الحركيّة (2.6) في المستوي

$$\left\{\begin{array}{l} \theta = 0 \text{ من أجل } -\infty < \alpha < \alpha_B, \alpha_C < \alpha < \alpha_D, \alpha_E < \alpha < \alpha_F, \alpha_G < \alpha < \alpha_H \\ \theta = |\gamma| \text{ من أجل } \alpha_B < \alpha < \alpha_C, \alpha_F < \alpha < \alpha_G \\ \theta = |\beta| \text{ من أجل } \alpha_D < \alpha < \alpha_E, \alpha_H < \alpha < \alpha_L \\ \theta \text{ مجهول من أجل } 0 < \alpha < +\infty \end{array}\right.$$

(2.12)

المعادلة التفاضلية التكاملية

نختار المنطقة العلويّة المكوّنة من ζ في المستوي $\tau - i\theta$ لحلّ المسألة نطبّق نظريّة كوشي للتّكامل بالنّسبة للدالّة المحور الحقيقي ونصف الدّائرة ذات القطر الكبير بكفايّة. نأخذ الجزء الحقيقيّ لتكامل كوشي فتكون العلاقة التّاليّة

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \qquad (3.1)$$

لاختصار التّرميز. نستعمل الشّروط الحديّة (2.12). فيكون $\tau(\alpha_0) = \tau(\alpha_0, 0)$ و $\theta(\alpha) = \theta(\alpha, 0)$ حيث التّكامل (3.1)

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\alpha_B} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_B}^{\alpha_C} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_C}^{\alpha_D} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_D}^{\alpha_F} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_F}^{\alpha_G} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \\ + \int_{\alpha_G}^{\alpha_H} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_H}^{\alpha_L} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_L}^{0} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{0}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \end{array}\right]$$

(3.2)

بالتّالي

$$\begin{aligned} \tau(\alpha_0) = &-\frac{\gamma}{\pi}\ln\left|\frac{\alpha_C - \alpha_0}{\alpha_B - \alpha_0}\right| + \frac{\gamma}{\pi}\ln\left|\frac{\alpha_E - \alpha_0}{\alpha_D - \alpha_0}\right| - \frac{\beta}{\pi}\ln\left|\frac{\alpha_G - \alpha_0}{\alpha_F - \alpha_0}\right| + \\ &\frac{\beta}{\pi}\ln\left|\frac{\alpha_L - \alpha_0}{\alpha_H - \alpha_0}\right| - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \end{aligned} \qquad (3.3)$$

) يكون $\psi = 0$ هذه المعادلة معرفة على خطّ السّطح الحرّ للسّائل. باستعمال العلاقة (2.8) (في حالة

$$\alpha = e^{-\pi\phi}, \alpha_0 = e^{-\pi\phi_0} \qquad (3.4)$$

$-\infty < \phi < +\infty$ نعوّض (3.4) في (3.3) فنجد من أجل

$$\hat{\tau}(\phi_0) = -\frac{\gamma}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_C} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_0}}\right| + \frac{\gamma}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_E} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_0}}\right| - \frac{\beta}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_G} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_F} + e^{-\pi\phi_0}}\right| +$$
$$\frac{\beta}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_L} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_H} + e^{-\pi\phi_0}}\right| + \int_{-\infty}^{\phi}\frac{\hat{\theta}(\phi)e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}}d\phi \tag{3.5}$$

حيث $\hat{\theta}(\phi) = \theta\left(e^{-\pi\phi}\right)$ و $\hat{\tau}(\phi_0) = \tau\left(e^{-\pi\phi_0}\right)$.

على الشّكل التّالي : $\hat{\tau}$ و $\hat{\theta}$ إذا تكتب المعادلة التّفاضليّة-التّكامليّة (2.11) بدلالة

$$\frac{1}{2}e^{2\hat{\tau}} - \delta e^{\hat{\tau}}\left|\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}\right| + \frac{1}{Fr^2}(y-1) = \frac{1}{2} \quad \text{on } A'M' \tag{3.6}$$

التي تحدّد شكل السّطح الحرّ للسّائل نستعمل العلاقة (2.7) ونحسب تكامل (x, y) لتعيين الإحداثيّات الدّيكارتيّة المتطابقة التّاليّة

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{u - iv} \tag{3.7}$$

ومنه نجد أنّ

$$x(\alpha) = x_\infty - \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{e^{-\tau(\alpha_0)}\cos\theta(\alpha_0)}{\alpha_0}d\alpha_0 \quad , \ 0 < \alpha < +\infty \tag{3.8}$$

$$y(\alpha) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{e^{-\tau(\alpha_0)}\sin\theta(\alpha_0)}{\alpha_0}d\alpha_0 \quad , \ 0 < \alpha < +\infty \tag{3.9}$$

باستعمال (3.4)، تكتب العلاقتين (3.8) و(3.9) بالشّكل

$$\hat{x}(\phi) = x\left(e^{-\pi\phi}\right) = x_\infty + \int_{-\infty}^{\phi} e^{-\hat{\tau}(\phi_0)}\cos\hat{\theta}(\phi_0)d\phi_0 \quad , -\infty < \phi < +\infty \tag{3.10}$$

$$\hat{y}(\phi) = y\left(e^{-\pi\phi}\right) = 1 + \int_{-\infty}^{\phi} e^{-\hat{\tau}(\phi_0)}\sin\hat{\theta}(\phi_0)d\phi_0 \quad , -\infty < \phi < +\infty \tag{3.11}$$

نعوض (3.11) في معادلة برنولي (3.6)، نتحصّل على معادلة تفاضليّة-تكامليّة سنقوم بحلّها عدديّا في المقطع الموالي.

الطريقة العدديّة

في المقطع السّابق، المعادلة (3.6) كانت معادلة تفاضليّة-تكامليّة غير خطيّة وهو الشّرط الحدّي غير الخطّي في المسألة. نقوم في هذا المقطع بتقديم الطّريقة العدديّة لحلّ هذه المعادلة. استعمل هذه الطّريقة العديد من المؤلّفين [15] Vanden-Broeck. وBinder [4]مثل

$-\infty<\phi<+\infty$. أولا: نقوم بحساب التّكامل في (3.5) عدديّا مستعملين قاعدة متوازي الأضلاع، وأن

مجالا جزئيّا على الشّكل التّالي N نقوم بتقسيم هذا المجال إلى:

$$\phi_I=\left[\frac{-(N-1)}{2}+(I-1)\right]\Delta,\quad I=1,\dots,N,-\infty<\phi<+\infty \tag{4.1}$$

نحسبها في منتصف كلّ تقسيم وتكون على الشّكل ϕ_0 يمثّل خطوة التّقسيم. بالنّسبة للدالّة $\Delta>0$ حيث

$$\phi_M=\frac{\phi_{I+1}+\phi_I}{2},\, I=1,\dots,N-1 \tag{4.2}$$

باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، تكتب العلاقة (3.5) على الشّكل:

$$\begin{aligned}\tau_M=\hat{\tau}(\phi_M)=&-\frac{\gamma}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_C}+e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_B}+e^{-\pi\phi_M}}\right|+\frac{\gamma}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_E}+e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_D}+e^{-\pi\phi_M}}\right|-\frac{\beta}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_G}+e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_F}+e^{-\pi\phi_M}}\right|+\\&\frac{\beta}{\pi}\ln\left|\frac{e^{-\pi\phi_L}+e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_H}+e^{-\pi\phi_M}}\right|+\sum_{j=1}^{N}\frac{\theta_j e^{-\pi\phi_j}\Delta w_j}{e^{-\pi\phi_j}-e^{-\pi\phi_M}}\end{aligned} \tag{4.3}$$

دالّة الوزن معرفة بالعلاقة w_j. تسمى $\theta_j=\hat{\theta}(\phi_j)$, $j=1,\dots,N$ حيث

$$w_j=\begin{cases}\frac{1}{2} & : \; j=1,N\\ 1 & : \; j=2,\dots,N-1\end{cases}$$

N معادلة غير خطيّة ذات N نعوّض (4.3) في (3.6) وباستعمال (4.1) و (4.2) نحصل على جملة من $(\theta_I, I=1,\dots,N)$. مجهولا

$\left(x_I=\hat{x}(\phi_I), y_I=\hat{y}(\phi_I)\right)$. نستعمل طريقة أولر لحلّ المعادلة التّفاضليّة (3.7) عدديّا وتعيين المعادلات الوسيطيّة لرسم منحني السّطح الحرّ للسائل.

$$\begin{cases}x_1=x_\infty\\ x_{I+1}=x_I+\Delta e^{-\tau_M}\cos\theta_M,\quad I=1,\dots,N-1\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}y_1=1\\ y_{I+1}=y_I+\Delta e^{-\tau_M}\sin\theta_M,\quad I=1,\dots,N-1\end{cases}$$

العلاقة (4.2). $\Re$. نتأكّد من أنّ المعادلة (3.6) تحقق منصفات كلّ تقسيم للمجال الحقيقيّ $\theta_M = \dfrac{\theta_{I+1}+\theta_I}{2}$ حيث . $(\theta_I, I=1,...,N)$ مجهولا N نحصل على جملة معادلات جبريّة غير خطيّة ذات

في النّقاط (4.1) يكون لدينا(Finite différences) نستعمل طريقة الفروق المنتهيّة لتقريب $\dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}$

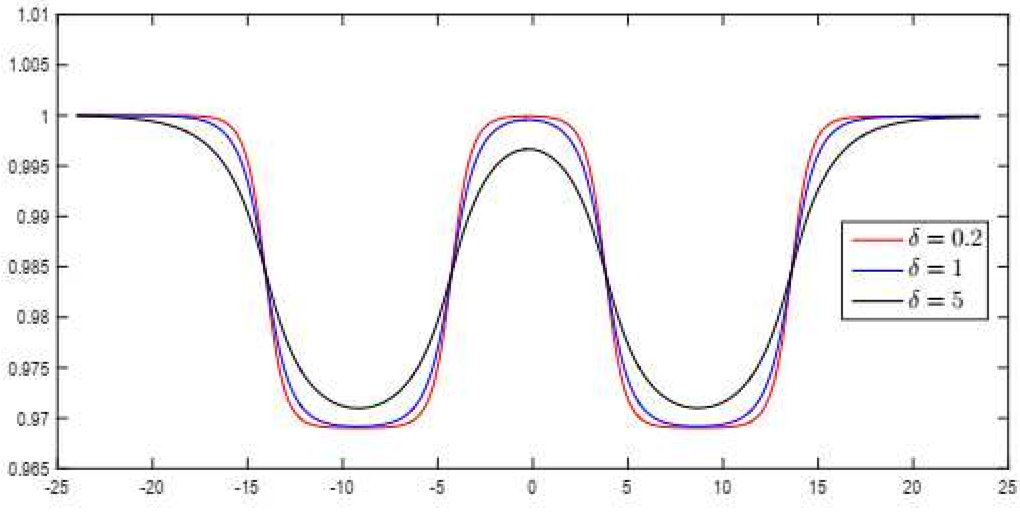
المشتقّة $\dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} = \dfrac{\theta_{I+1}-\theta_I}{\Delta}, I=1,...,N-1$

نحلّ الجملة السّابقة باستعمال طريقة نيوتن. δ و Fr عند تثبيت قيم للمعاملين

مناقشة حلول المسألة

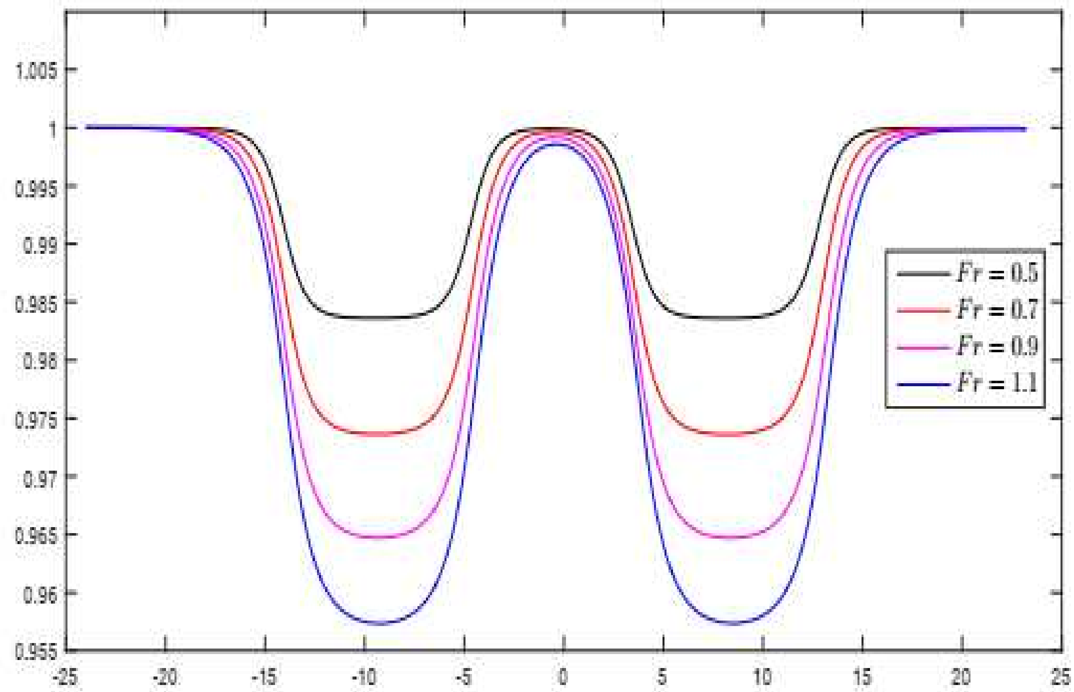
نستعمل الطّريقة العدديّة المفصلة في المقطع السّابق لتعيين حلول المسألة من أجل كلّ القيم الممكنة للمعاملات عدد . β وγ ومختلف قيم الزّوايا $N=401, \Delta=0.12$. نحدّد كلّ الحلول من أجل القيم δ وعدد ويبر Fr فرود

لمعرفة تأثير الجاذبيّة والتّوتّر N وتكبير العددΔ للحصول على نتائج أحسن، نقوم بتصغير خطوة التّقسيم السّطحيّ على شكل السّطح الحرّ للسّائل نقوم برسم منحني السّطح الحرّ للسائل من أجل قيم المعاملات السّابقة على شكل السّطح الحرّ للسّائل. β ونوضّح ذلك بأمثلة، انظر الشّكلين 4 و5. الشّكل 6 يبين تأثير الزّاويّة δ و Fr



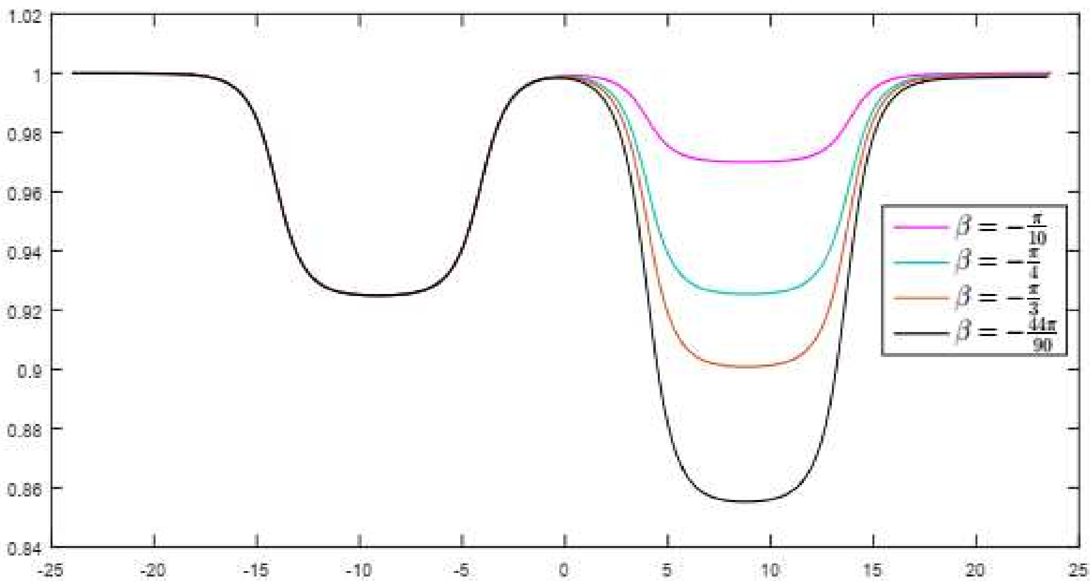
الشّكل 4. منحنيات الأسطح الحرّة من أجل

.δ ومن أجل مختلف قيم عدد ويبر $\beta=\gamma=-\dfrac{\pi}{6}$ و $Fr=1.2$



الشّكل 5. منحنيات الأسطح الحرّة من أجل

$\delta = 2$ و $\beta = \gamma = -\dfrac{\pi}{4}$ **ومن أجل مختلف قيم عدد فرود** Fr .



الشّكل 6. منحنيات الأسطح الحرّة من أجل $\delta = 2$ و $\beta = \gamma = -\dfrac{\pi}{4}$ **ومن أجل مختلف قيم عدد فرود** Fr .

المراجع References :

[1] M. B. Abd-el-Malek, S. N. Hanna and M. T. Kamel, (1991) Approximate solution of gravity flow from a uniform channel over triangular bottom for large Froude number. Appl. Math. Modelling. 15, 25-32.

[2] G. K. Batchelor, (1967) An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press,.

[3] S. R. Belward, (1999) Fully non-linear flow over successive obstacles: hydraulic fall and supercritical flows, J. Austral. Math. Soc. Ser. B. (1999) 40, 447-458.

[4] B. J. Binder, F. Dias and J. M. Vanden-Broeck, (2006) Steady free-surface flow past an uneven channel bottom. Theor. Comput. Fluid. Dyn. 20, 125–144.

[5] G. Birkhoff and E.H. Zarantonello, (1957) Jet, Wakes and Cavities, Academic Press Inc., New York,.

[6] F. Dias and J. M. Vanden-Broeck, (1989) Open channel flow with submerged obstructions. J. Fluid. Mech. 206, 155-170.

[7] L. K. Forbes and L. W. Schwartz, (1982) Free-surface flow over a semi-circular obstruction in a channel. J. Fluid. Mech. 114, 299-314.

[8] L. K. Forbes, (1983) Free-surface flow over a semi-circular obstruction, including the influence of gravity and surface tension. J. Fluid. Mech. 127, 283-297.

[9] S. N. Hanna, M. N. Abdel-Malek and M. B. Abd-el-Malek, (1996) super-critical free-surface flow over a trapezoidal obstacle. J. Comput. Appl. Math. 66, 279-291.

[10] S. N. Hanna, (1994) Influence of surface tension on free surface flow over a polygonal and curved obstruction, J. Comput. Appl. Math. 51, 357-374.

[11] R. J. Holmes, G. C. Hoking, L. K. Forbes and N. Y. Baillard, Waveless, (2013) Sub-critical flow past symmetric bottom topography, Euro. J. Appl. Math. 24, 213-230.

[12] R. J. Holmes and G. C. Hoking, (2017) A note on waveless sub-critical flow past symmetric bottom topography, Euro. J. Appl. Math. 28, 562-575.

[13] H. Lamb, (1957) Hydrodynamics, 6th ed. Dover, New York,.

[14] A. Merzougui and A. Laiadi, (2014) Free surface flow over a triangular depression, TWMS J. App. Eng. Math. 4(1), 67-73.

[15] J. M. Vanden-Broeck, (2010) Gravity-capillary free surface flows, New York: Cambridge University Press,