المجلة التاريخية الجزائرية
ISSN: 2572-0023 / EISSN: 2716-9065
https://www.asjp.cerist.dz/en/PresentationRevue/664
المجلد:08، العدد:01 (2024)، ص225 - 242

إسهامات الرياضياتيين المسلمين في ابتكار التحليل: مفهوما النهاية واللانهاية في أعمال ثابت بن قرة أنموذجا

Contributions of Muslim mathematicians to the invention of analysis: The concepts of limit and infinity in the works of Thabit Ibn Qurra as a model

عبد الهادي واقيد *
مخبر الابستيمولوجيا وتاريخ الرياضيات
جامعة البليدة 01 (الجزائر)
hadiouakid@univ-blida.dz

ناجي تمار
مخبر الابستيمولوجيا وتاريخ الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)
nadji. temar@g.ens-kouba.dz

أحمد آيت مختار
مخبر نظرية النقطة الصامدة وتطبيقاتها
المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)
ahmed.aitmokhtar@g.ens-kouba.dz

معلومات المقال

تاريخ الارسال: 2024/03/04
تاريخ القبول: 2024/05/10

الكلمات المفتاحية:
- ✓ الرياضياتيون المسلمون
- ✓ التحليل
- ✓ مفهوم النهاية
- ✓ ثابت بن قرة

الملخص:

هدفُ هذه الدراسة هو إبراز إسهامات الرياضياتيين المسلمين التي أدت إلى ابتكار التحليل. فرغم اعتراف المختصين في تاريخ الرياضيات بفضل الرياضياتيين المسلمين في تطوير الهندسة وابتكار الجبر، إلّا أنهم ينسبون كل الفضل في ابتكار التحليل الرياضياتي إلى الأوروبيين.

بدأت الرياضيات في الحضارة الإسلامية بمرحلة الاكتساب من الأمم السابقة، تلتها فترةُ إبداعٍ مع تطوّر كبير في الهندسة وابتكار الجبر، هذان العلمان كانا السبب الرئيسي في ميلاد التحليل بعد أن ورثهما الأوروبيون بشكل مباشر من مؤلفات العلماء المسلمين. يَدرُس التحليل الحديث كمّيات اللانهاية ويعتمد في ذلك على مفهوم النهاية الذي تعود جذوره إلى "طريقة إفناء الفرق" الهندسية، لكن أعمال ثابت بن قرة في القرن التاسع ميلادي مهّدت لابتكار التحليل، إذ تضمّنت مفهومي النهاية واللانهاية مع إضافة الحساب الجبري إلى هذه الطريقة.

Article info

Received: 04/03/2024
Accepted: 10/05/2024

Key words:
- ✓ Muslim mathematicians
- ✓ Analysis
- ✓ Concept of limit
- ✓ Thabit Ibn Qurra

Abstract:

This study aims to show the contributions of Muslim mathematicians that led to the invention of analysis. Although mathematics historians acknowledge Muslim mathematicians in developing geometry and inventing algebra, they attribute all the credit for inventing mathematical analysis to the Europeans.

Mathematics in Islamic civilization began with the acquisition from previous nations, followed by a period of creativity with great development in geometry and the invention of algebra. These two sciences were the main reason for the birth of analysis after being inherited directly by the Europeans from Muslim scholars. Modern analysis studies infinity quantities based on the limit concept, which has its roots in the geometric "method of exhaustion". However, the works of Thabit Ibn Qurra in the ninth century AD included the concepts of limit and infinity by adding algebraic calculation to this method.

*المؤلف المرسل

مقدمة

إن دراسة تاريخ العلوم العربية والإسلامية يربطنا ثقافيا بحضارتنا ويحثنا على العمل في سبيل رفع مستواها. هذا المجال الواسع لم يُستغل لحد الآن بالشكل اللازم والدقيق ودراسته لازالت بطيئة، إذ لا نزال نجهل الكثير من الأعمال العلمية التي أنجزها العلماء العرب والمسلمين. دراسة تاريخ الرياضيات في الحضارة الإسلامية بالخصوص لها أهمية كبرى. من جهة، تسمح لنا بمعرفة الخطوات والمراحل التي مرّت بها الرياضيات عند المسلمين من ناحية الأفكار والإنجازات وبالتعرف على أهم المساهمين والمبدعين. من جهة أخرى، تخوّل لنا أن ننسب الفضل إلى مستحقيه من علماء الرياضيات المسلمين.

سيطر المؤرخون الأوروبيون من القرن السابع عشر إلى القرن العشرين الميلادي على كتابة تاريخ الرياضيات. لعبت المواقف الإيديولوجية وغياب بعض الوثائق دورا مهما في التشجيع على كتابة تاريخ غير صحيح. على سبيل المثال، كانوا يقولون عن الرياضيات اليونانية إنّها رياضيات يونانية بحتة ولا علاقة لها بالرياضيات المصرية ولا البابلية ولا الهندية التي سبقتهم. لهم في ذلك مبررات وبراهين إلى غاية 1930 إذ تمت الترجمات والدراسات الأولى للوثائق البابلية من لوحات مسمارية وآثار، ذلك ما غيّر من هذه الأفكار وظهرت علاقة علمية كبيرة بين أعمال الرياضيات البابلية واليونانية (قرقور، صفحة 14).

ابتكار عِلم التحليل الرياضياتي لم يأت من العدم، بل جاء بعد قرون طويلة من جهود الرياضياتيين عبر التاريخ، منها جهود علماء الرياضيات المسلمين الذين كان لهم الفضل في لعب دور الوسيط بين الحضارات السابقة والحضارة الغربية. من جهة، لم يكتف الرياضياتيون المسلمون بالحفاظ على أعمال اليونانيين في الهندسة، بل ترجموها وبرعوا فيها وأضافوا إليها التنقيح اللازم. من جهة أخرى، كانوا سباقين في ابتكار عِلم الجبر وتدوينه. لا ينكر المؤرخون أنّ الرياضياتيين المسلمين طوّروا الهندسة وابتكروا الجبر، هذان العلمان اللذان ورثتهما أوروبا من رياضيات الحضارة الإسلامية كانا أساسا لميلاد التحليل. غير أن التحليل يُنسب أساسا للعلماء الأوروبيين منذ القرن السابع عشر، لذلك فإنّ هدف هذا البحث هو أن نوضح إسهامات علماء الرياضيات المسلمين في ابتكار التحليل.

مفهوم النهاية أساسي في التحليل الرياضياتي، فكلٌّ من مفاهيم الاستمرار والاشتقاق والتكامل يتم تعريفها بواسطة النهايات. يعود أصل مفهوم النهاية تاريخيا إلى طريقة إفناء الفرق (method of exhaustion) التي استخدمها اليونانيون ثم استعملها وبرع فيها العلماء المسلمون، أبرز من استخدم هذه الطريقة هو ثابت بن قرة الذي طوّرها وأضاف لها الحساب الجبري اللازم. كانت تُستخدم هذه الفكرة في حساب مساحات وأحجام الأشكال المنحنية (الدائرة أو الأسطوانة مثلا) عن طريق تقريبها بمساحات وأحجام أشكال معروفة. مبدأ عملها بالأساس هو تقريب مساحة دائرة مثلا بمساحة مربع مناسب تُحيط به الدائرة كخطوة أولى، ثم مضلع ثماني، وهكذا بمضاعفة الأضلاع كل مرة يصبح الفرق بين مساحات المضلعات والدائرة التي تحيط بها لامتناهي الصغر، أي يؤول إلى الصفر. إذا واصلنا مضاعفة الأضلاع إلى **اللانهاية** يمكن القول إنّ

"**نهاية**" مساحات المضلعات تساوي مساحة الدائرة. أما مفهوم النهاية "بالشكل الحديث" فهو نِتاج الرياضياتيين في أوروبا من القرن السابع عشر إلى القرن التاسع عشر الميلادي، انطلاقا من لامتناهيات الصغر (infinitesimals) التي تُنسب إلى نيوتن (Isaac Newton 1727-1643) وليبنيز (1716-1646 Wilhelm Leibniz) وصولا إلى دالمبير (Le Rond d'Alembert 1783-1717) وكوشي (1789-1857 Augustin-Louis Cauchy) وفيرشتراس (Wilhelm Weierstrass 1897-1815). غير أن أعمال ثابت بن قرة، في القرن التاسع الميلادي في حساب مساحات وأحجام بعض الأشكال الهندسية، تحتوي على فكرة لامتناهيات الصغر وعلى فكرة إفناء الفرق التي تعتبر "**النموذج الهندسي الأصلي**" لمفهوم النهاية. وصلت مؤلّفات ثابت بن قرة، وغيرُها الكثير من مؤلفات علماء الرياضيات المسلمين والترجمات العربية لأعمال الحضارات السابقة خاصة اليونانية، إلى أوروبا فكانت أساسا ارتكز عليه الرياضياتيون الغربيون للعمل على مسائل التحليل الرياضياتي.

1. بعض مظاهر الرياضيات في مرحلة ما قبل الحضارة الإسلامية

1.1. الرياضيات لدى البابليين والمصريين القدماء

ازدهرت الهندسة في الحضارة البابلية (2500 ق.م – 60 ق.م) من جراء نشاطها التجاري، فاكتشف البابليون مساحة المربع والمستطيل وشبه المنحرف والمثلث وأنّ الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة، لكن هذا كلّه كان دون برهان (قرقور، صفحة 17). أما الرياضيات المصرية فشمِلت الحساب ونظرية العدد والهندسة والفلك، إذ بُنِيَ الحساب المصري ونظرية العدد والهندسة على نظام عدّ خاص وهو نظامٌ عشري غير وضعي، عكس نظام العدّ عند البابليين (قرقور، صفحة 27)، فالعدد ما هو إلا جمع الأعداد المكونة له من جميع الجهات، لأن موقع الأعداد غير مهم من الأعلى إلى الأسفل أو من اليمين إلى اليسار أو العكس (Katz, 2009, pp. 3-4). تجلى اهتمام المصريين القدماء بالهندسة وإنشاءاتها في بناء الأهرامات التي لا تزال شاهدة على ذلك لحد الآن. عرفوا كذلك مساحات المثلث والمستطيل وشبه المنحرف. لكنهم مثل البابليين، لا نجد عندهم البراهين على صحة هذه القواعد، إذ يبدو أن قواعدهم قامت على أساس تجريبي (قرقور، الصفحات 31-32).

2.1. الرياضيات لدى اليونانيين

اعتمد الحساب عند اليونانيين على الحروف اليونانية ذات الأصل الفينيقي، وكان نظام العدِّ عشريا غير وضعي. أمّا علم الهندسة فهو بحر العلوم اليونانية، إذ كان أهم ميدان اهتم به اليونانيون، ليس فقط من جانب المضمون لكنه جُعِل أساسا لكل الرياضيات (قرقور، الصفحات 38-39).

ورث اليونانيون كمّا هائلا من المعارف الرياضياتية، منها الصحيح ومنها الخاطئ، لكنهم بالبرهان تمكّنوا من غربلة هذه المعلومات. الأمر الذي تميز به اليونانيون هو استعمالهم للمنطق العلمي في الرياضيات

متمثلا في البرهان الهندسي، فقبلوا من المعلومات ما صح بالبرهان ورفضوا ما لم يصح (Katz, 2009, p. 33).

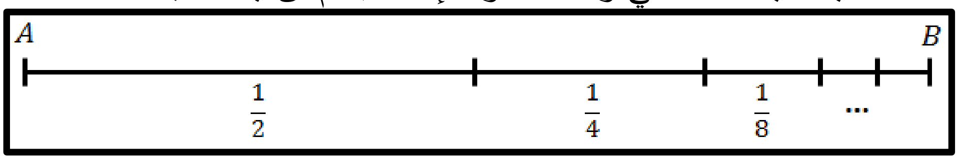
يُرجّح أن الخطوة الأولى في بناء الهندسة النظرية قام بها فيثاغورس، الذي ألحّ على تحديد المفاهيم وصياغة مبادئ عامة واستنتاجها عن طريق منطق صارم. في مدرسته في القرنين السادس والخامس قبل الميلاد، تم تعريف الخط المستقيم بأنه ذو طول وليس له عرض وسمك وتعريف الدائرة والمماس، مفاهيم نظرية بدت بعيدة عن المشاهدة والتجربة (ڤرڤور، صفحة 41). أكاديمية أفلاطون كانت أكثر حرصا على تمحيص الحقائق وأكثر اهتماما بالمنطق (ڤرڤور، صفحة 42). أما أرسطو فوضع قواعد في دراسة الرياضيات واشترط استعمال البرهان في بناء المعرفة واستنتاج معارف جديدة من حقائق تمت برهنتها أو من بديهيات. كل ما سبق استوعبه أوقليدس الذي يُعد أكثرهم أثرا، إذ تم تدريس الهندسة المستوية على الطريقة التي وضعها في كتاب الأصول وسميت بالهندسة الأوقليدية (ڤرڤور، الصفحات 43-44).

فضّل اليونانيون تَجنُّب النهج العددي تمامًا والتركيز على المقادير ببساطة باعتبارها كيانات هندسية (Dunham, 1990, p. 10). ممن ساهموا في تطوير الهندسة، نَذكُر: فيثاغورس (600 ق. م)، أفلاطون (348 ق. م)، أرسطو (322 ق. م)، أوقليدس (300 ق. م)، أرخميدس (212 ق. م). أهم الكتب اليونانية هو كتاب "الأصول" لأوقليدس، الذي يتكوّن من 13 مقالة في الهندسة، كلها تتبعُ منهج أرسطو العلمي (ڤرڤور، صفحة 39).

3.1. الجذور الأولى لمفهوم النهاية وارتباطه بمفهوم اللانهاية

الأفكار الأولى المرتبطة بمفهوم النهاية، ولو بشكل غير مباشر، أثارها الفيلسوف اليوناني زينون من إيليا (495-430 ق.م) عندما قدّم عدة مفارقات حول الحركة واللانهاية. زينون ادّعى أن الحركة مجرد وهم، وأعطى عددا من الحجج (اشتهرت بمفارقات زينون) لدعم ادعائه. مفارقاتٌ أساسها مفهوم اللانهاية الذي يُعتبر مصدرا للصعوبات والتناقضات (Fischbein, 2001, p. 316).

من أهم المفارقات التي قدمها زينون ليثبت أن الحركة مستحيلة، نذكر مفارقة التقسيم الثنائي: "للانتقال من نقطة A إلى نقطة أخرى B (انظر الشكل 1)، لابد للجسم أوّلا أن يقطع نصف المسافة بين النقطتين. لكن لِقطع كل المسافة يجب قطع نصف النصف المتبقي أيضا، وهكذا يجب قطع نصف المسافة المتبقية دوما إلى اللانهاية. هذا يعني أن الجسم لكي يقطع المسافة بين النقطتين عليه أن يقطع عددا لانهائيا من المسافات، لكن عددا لانهائيا من المسافات يستحيل قطعه في وقت محدود، إذا فالجسم لن يصل أبدا".



الشكل 1: تمثيلٌ لمفارقة التقسيم الثنائي

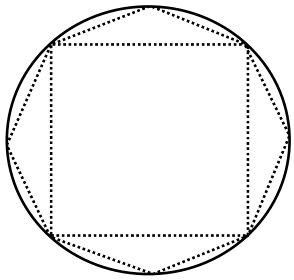
ردَّ أرسطو بأن المسافة AB قابلة للتقسيم بشكل لانهائي من حيث المبدأ، لكن لا يمكن تنفيذ ذلك فعليا في العالم الحقيقي. فاللانهاية حسبه موجودة بشكل "**احتمالي**" وليست "**فعلية**" (Kolar & Tatjana, 2012, p. 390). رغم أن هذه المفارقة تتضمن جانبا فلسفيا، إلا أن الجواب الرياضياتي يعتمد على مفهوم النهاية؛ لأن نهاية المجموع "$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ إلى اللانهاية" تساوي الواحد (Sarvestani & Kaper, 2001, p. 18).

تعود الجذور الأولى للتحليل عموما إلى الهندسة في الأصل. تتعلق أقدم مشاكل التحليل بحساب مساحات الأسطح وأحجام المجسمات. بعض حلول هذه المسائل كانت معروفة لدى البابليين والمصريين واليونانيين مثل مساحات المربع والمستطيل والمضلعات عموما. لكِنّ الأشكال والمجسمات المنحنية مثل الدائرة والأسطوانة وغيرهما كانت تشكل صعوبات كبيرة لأنها كانت مختلفة، فهي تعتمد على معرفة نوع من الأعداد يُسمى "**كمّيات غير قابلة للقياس**"، مثل العدد π غير القابل للقياس مع الأعداد الطبيعية، هذه الكمّيات التي اكتشفها اليونانيون لم تكن مألوفة لديهم. كان اكتشاف الكميات غير القابلة للقياس حسب (Thiele, 2003, p. 6) الأزمة الأولى في أُسس الرياضيات.

في الرياضيات اليونانية، كانت مساحة أيّ شكل تُحسب عن طريق محاولة جعلها تساوي مساحة مُربّع، ومن هنا جاءت ما نسميه "**مسائل التربيع**" (Thiele, 2003, p. 14). الشكل المنحن الذي اهتم به اليونانيون كثيرا هو الدائرة. نجح أبقراط في تربيع بعض الأشكال تُسمى "**الهلاليات**" (الهلال شكل ينتج من تقاطع دائرتين)، بعد هذا النجاح، صار اليونانيون أكثر تفاؤلا بشأن تربيع الدائرة (Dunham, 1990, p. 20). ظلَّ هذا المشكل دون إجابة لأجيال وقرون عديدة إلى غاية 1882 حين أثبت الرياضياتي الألماني فيرديناند ليندمان (Ferdinand Lindemann1939-1852) أنّ تربيع الدائرة مستحيل (Sonar, 2021, p. 23).

في حالة استحالة حساب مساحة شكل ما عن طريق تربيعه، استعمل اليونانيون فكرة أخرى وهي فكرة التقريبات (Thiele, 2003, p. 15). اعتمادا على أُسس حدسية، يمكن تقريب مساحة شكلٍ منحنٍ بواسطة مضلع مناسب يُحيط به هذا الشكل المنحني كخطوة أولى، الخطوة الثانية هي مضاعفة أضلاع المضلع بشكل كافٍ للحصول على تقريب أفضل.

في القرن الخامس قبل الميلاد، اهتم السفسطائي أنتيفون (The sophist Antiphon) بمشكلة تربيع الدائرة. قام برسم مضلعات منتظمة داخلية تُحيط بها الدائرة، ثم ضاعف عدد الأضلاع لعددٍ كبير بشكل كافٍ واستنتج أن مساحة المضلع الأخير يمكن أن تساوي مساحة الدائرة. طريقته كانت تعتمد على جعل عدد الأضلاع منتهيا، أي **دون مرور إلى النهاية**. لكن أرسطو انتقد هذه الطريقة معتبرا إياها تتعارض مع جميع مبادئ الرياضيات (Thiele, 2003, p. 17).



الشكل 2: تقريب مساحة دائرة عن طريق مضلعات منتظمة داخلية

بعد ذلك، جاء السفطسائي برايسون (The sophist Bryson) بفكرة أخرى، وهي إضافة عائلة من المضلعات الأخرى التي تحيط بالدائرة من الخارج، ثم بمضاعفة أضلاع المضلعات الداخلية والخارجية إلى **لانهاية**، خلَص إلى أنه يجب أن يوجد مضلع في **النهاية** تكون مساحته تساوي مساحة الدائرة. لكن هذه الفكرة تمّ رفضها كذلك من قبل أفلاطون وأرسطو بحجة أنّ هذا **المرور المستمر إلى النهاية** يتضمّن وجود فرقٍ بين مساحة الدائرة والمضلعات بكميات **لامتناهية الصغر**، وهو ما كان غير مقبول لدى اليونانيين (Thiele, 2003, pp. 17–18). الحجة الثانية لعدم موافقة اليونانيين على هذه الطريقة هي أن المضلعات لا يمكن أن تصير دائرة حتى ولو ضاعفنا عدد أضلاعها إلى اللانهاية (Edwards, 1979, p. 7). لقد تجنب اليونانيون "**استعمال النهاية**" بشكل صريح، كان لديهم ما يُسمى "الخوف من اللانهاية" الذي كان مسؤولاً ربما عن تفكيرهم المنطقي في حل آخر (Edwards, 1979, p. 16). كان مفتاح الحل لهذه المشاكل في "**طريقة إفناء الفرق**" (Method of exhaustion).

تُعتبر طريقة إفناء الفرق أحد أهم إنجازات اليونانيين، لكنّ تاريخ تطوّرِها ليس واضحا بالشكل اللازم (Borzacchini, 2006, p. 433). تُرجّح العديد من الدراسات أن يودوكسوس (Eudoxus) هو أول من ابتكرها، لكن أرخميدس هو من استعملها بشكل مُكثّف في حساب مساحات وأحجام الأشكال المنحنية، لذا تُنسب لهما معا (Baron, 1969, p. 34) (Grabiner, 2005, p. 29) (Sonar, 2021, p. 36).

لم يطلق اليونانيون على فكرة إفناء الفرق أي تسمية معينة (Knorr, 1978, p. 219). أول من أطلق عليها هذه التسمية هو غريغوري من سانت فنسنت (Grégoire de Saint-Vincent 1667-1584) سنة 1647 (Sonar, 2021, p. 36) (Thiele, 2003, p. 18). مفهوم النهاية كان هو المفهوم الأساسي الموجود بشكل ضمني في طريقة إفناء الفرق (Sarvestani & Kaper, 2001, p. 19)، لذلك يسميها بعض المختصين في تاريخ الرياضيات مثل (Grabiner, 2005, p. 29) (Dijksterhuis, 1987, p. 130)بطريقة "المرور غير المباشر للنهاية".

للتخلص من مشكل اللانهاية المُتضمن في حساب المساحات والأحجام، تعتمد طريقة إفناء الفرق على الفكرة التالية: إذا كانت لدينا أيّة مساحة مُحددة مُسبقا، مهما كانت صغيرة، فيمكننا إيجاد مضلع منتظم داخل الدائرة يكون الفرق بين مساحته ومساحة الدائرة أقل من هذه المساحة المحددة مُسبقا (Dunham, 1990, p.

(91. إن الجزء "**أقل من أي كمية محددة مسبقا**" كان هو الذي يحمل مفتاح نجاح هذه الطريقة، لأنه كان الحل لمشكل الحاجة إلى لانهاية من الأضلاع لحساب مساحة دائرة وألغى وجود الكميات اللامتناهية الصغر.

تلقى ثابت بن قرة هذه الطريقة من اليونانيين وأضاف عليها التحسين اللازم في عمله على حساب مساحة قطع مكافئ، وذلك بإدخال الكميات لامتناهية الصغر والخواص الجبرية، خاصة مع ابتكار الجبر في فترة الخوارزمي. كانت طريقة ثابت أكثر عمومية من طريقة أرخميدس دون علمه بنتائج الرياضياتي اليوناني في قياس مساحة قطعٍ مكافئ (Rashed, 2015, p. 499).

2. إسهامات الرياضياتيين المسلمين

1.2. تطوّر الرياضيات في الحضارة الإسلامية

اعتمدت الحضارة الإسلامية في بداياتها على الإرث الفكري للحضارات السابقة من اليونانية والبابلية والهندية والمصرية، غير أنها تميّزت عن سابقاتها بغربلة أفكارهم من الشوائب المخالفة للعقل (خروبي، 2022، صفحة 171). كان الأمر ذاته في علوم الرياضيات، إذ انطلق العلماء المسلمون في رحلة الاكتساب من الحضارات الأخرى، ثم جاءت بعد ذلك فترة من الإبداع والازدهار.

فضلا عن المساهمة الفعالة في الهندسة ونظرية الأعداد، ظهرت على يد الرياضياتيين المسلمين مواد جديدة منها حساب المثلثات وأهمها ميلاد علم الجبر (قرقور، صفحة 60). نشوء علم المثلثات مستقلا بذاته بدأ في فترة الحضارة الإسلامية في القرن التاسع الميلادي، وكل ما كان قبل ذلك عبارة عن معلومات متفرقة مرتبطة بعلم الفلك (قرقور، صفحة 109).

بعد قرن من الفتح خلال النصف الثاني من القرن الثامن الميلادي، جاء تطورٌ سريع للثقافة الإسلامية التي استوعبت بشغف معارف المناطق المفتوحة حديثًا. أصبحت العاصمة الشرقية بغداد مركزًا عالميًا جديدًا، وإسكندرية جديدة، حيث تمت دراسة العلوم القديمة لليونان والهند وبلاد ما بين النهرين (Edwards, 1979, pp. 81-82).

في عام 766 ميلادي، أسّس الخليفة المنصور عاصمته الجديدة بغداد، وهي المدينة التي أصبحت مركزًا تجاريًا وفكريًا مزدهرًا. تم الترحيب بالإنجازات الفكرية لجميع سكان الخلافة. أنشأ الخليفة هارون الرشيد، الذي حكم من 786 إلى 809 ميلادي، مكتبة في بغداد حيث تم جمع المخطوطات من مختلف الأكاديميات في الشرق التي أنشأها علماء فارّون من اضطهاد الأكاديميات القديمة في أثينا والإسكندرية. تضمنت هذه المخطوطات العديد من النصوص الرياضياتية والعلمية اليونانية الكلاسيكية. أنشأ خليفة هارون، الخليفة المأمون (813 م- 833م)، معهدًا للأبحاث سمّاه بيت الحكمة. سرعان ما بدأ برنامج الترجمة إلى اللغة العربية، دُعِيَ إلى هذا المعهد علماء من جميع أنحاء الخلافة لترجمة الأعمال اليونانية والهندية وكذلك لإجراء بحوث أصيلة. بحلول نهاية القرن التاسع، تمت ترجمة العديد من الأعمال الرئيسية لِأوقليدس وأرخميدس

وغيرهم من علماء الرياضيات اليونانيين إلى اللغة العربية وكانت متاحة للدراسة للعلماء المجتمعين في بغداد. كما استوعب العلماء المسلمون التقاليد الرياضية القديمة للبابليين والهنود (Katz, 2009, p. 266).

كان الهنود مفتونين بالأرقام والحسابات، ولكن لم يكن لديهم اهتمام كبير بالهندسة والبراهين الاستنتاجية عكس العلماء العرب. خدم هذا الاختلاف في الاهتمامات الرياضياتيين المسلمين، إذ سمح لهم بالحساب بحرية باستخدام الأعداد الكسرية والجذور غير الناطقة على حد سواء. هذا التطوّر كان أكثر ممّا وصل إليه اليونانيون الذين أعاقتهم الكميات التناسبية (Edwards, 1979, p. 82).

وبحلول نهاية القرن التاسع الميلادي، كانت أهم كلاسيكيات الرياضيات اليونانية معروفة جيدًا في العالم الإسلامي. وقد درسها علماء الإسلام وكتبوا تعليقات عليها. كانت أهم فكرة تعلموها من دراستهم لهذه الأعمال اليونانية هي فكرة البرهان. لقد استوعبوا أنه لا يمكن للمرء أن يعتبر مشكلة رياضية تم حلها إذا لم يتمكن من إثبات صحة الحل. **كيف يمكن إثبات ذلك، خاصة بالنسبة لمسائل الجبر؟** الجواب بدا واضحا، البراهين الحقيقية الوحيدة كانت هندسية. لقد كانت الهندسة هي التي تم العثور عليها في النصوص اليونانية، وليس الجبر. وضع علماء الإسلام على عاتقهم عمومًا مهام تبرير القواعد الجبرية، سواء البابلية القديمة أو الجديدة التي اكتشفوها بأنفسهم، من خلال البراهين الهندسية (Katz, 2009, p. 271).

2.2. ميلاد علم الجبر على يد العلماء المسلمين

أنتج علماء الحضارة الإسلامية أيضًا علومًا أصيلة، مما ساهم بشكل كبير في تطوير الرياضيات. من ناحية التخطيط، يمكننا القول إنهم أتقنوا تقنيات الحساب (Baumann, 2005, p. 75). رغم امتلاك الحضارات السابقة للحضارة الإسلامية عدة أفكار ومعارف حول الهندسة والحساب لكنهم لم يهتدوا إلى تأسيس علم الجبر الذي كان من ابتكار علماء الرياضيات المسلمين.

كانت المساهمة الرئيسية للعلماء المسلمين في الرياضيات هي ابتكار الجبر (Baumann, 2005, p. 68). عمِل عالم الرياضيات والفلكي محمد بن موسى الخوارزمي (ت. 850 م) في بغداد في أوائل القرن التاسع، وألّف كتبًا ذات أهمية تاريخية في الحساب والجبر، كان أولها عرضًا لفن الحساب الهندوسي (Edwards, 1979, p. 82). أوّل كتاب تم تأليفه في الجبر هو كتاب "**المُختصر في حساب الجبر والمقابلة**" للخوارزمي. كان الجبر قبل الخوارزمي طرائقا متفرقة، فصار له الفضل في تنظيم مفاهيمه ومسائله، وهو أوّل من سمّاه "**علم الجبر والمقابلة**" وهو أوّل من وضع أسسه (قرقور، صفحة 68).

كتاب الخوارزمي، الذي نُشر بين 813 و833 ميلادي، يعتبره اليوم مؤرخو العلوم أول حدث في تاريخ الجبر الطويل (Djebbar, 2013, p. 51). لم تخف على معاصري الخوارزمي ولاحقيه أهمية هذا الكتاب. منهم من نشر كتبا مُخصَّصة للجبر وحده ومنهم من مزج بين الجبر والهندسة اليونانية مثل مؤلف ثابت بن قرة "تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية". تطوّر علم الجبر بعد ذلك على يد أبي كامل (ت. 930م)

والكرجي (ت. 1029م) والخيّام (ت. 1139م) ثم في الغرب الإسلامي بين القرنين الحادي عشر والرابع عشر الميلادي (قرقور، صفحة 60).

لقد أخذ علماء الرياضيات الإسلاميين المواد التي طورها البابليون ودمجوها مع التراث اليوناني الكلاسيكي للهندسة، وأنتجوا جبرًا جديدًا، وشرعوا في توسيعه (Katz, 2009, p. 271). إن الجانب المنهجي لهذا العمل والبحث عن الدقة التي تتجاوز بكثير الاحتياجات العملية يُظهران أن هذا علم، إذ تم تطوير قدر كبير من المعرفة من أجله، حتى التقنيات التي تم تصورها كانت بهدف تطبيقها (Baumann, 2005, p. 75).

3.2. مفهوم النهاية ومفهوم اللانهاية في أعمال ثابت بن قرة

1.3.2. حياة ثابت بن قرة

عاش أبو الحسن ثابت بن قُرّة الحراني (826 م–901 م) في مرحلة مهمة من تاريخ الرياضيات في النصف الثاني من القرن التاسع الميلادي في بغداد التي كانت حينها القلب الثقافي للعالم ومركزه السياسي (راشد، 2011، صفحة 128). كان ثابتٌ رياضياتيا على دراية بمؤلفات أرخميدس وأوقليدس، وعالم فلك وفيزيائيا ومترجما للنصوص اليونانية (Taleb & Bebbouchi, 1986, p. 128). كان يتقن اليونانية والعبرية والفارسية فضلا عن العربية (قرقور، صفحة 59). اطّلع على معارف الأوائل وله اكتشافات في مختلف العلوم غير الرياضيات مثل الفلك والفلسفة (خروبي، 2022، صفحة 176).

2.3.2. أعمال ثابت بن قرة في الرياضيات

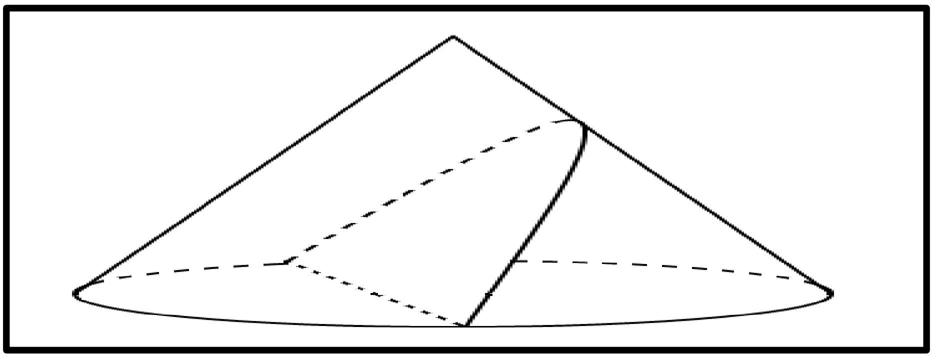
إتقان ثابتٍ للّغة اليونانية سهّل له العمل على الترجمة إلى اللغة العربية (راشد، 2011، صفحة 133)، فترجم عدة كتب يونانية منها كتاب "حول الكرة والأسطوانة" لأرخميدس وأصلح عدة كتب منها كتاب "**الأصول**" لأوقليدس (قرقور، صفحة 59). جمع ثابت كذلك بين الجبر والهندسة اليونانية وكتب في ذلك مؤلفه "تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية" (قرقور، صفحة 80). كما يتضمن رصيده أيضا عدة نتائج في الرياضيات، منها اقتراحه برهانا جديدا لنظرية فيثاغورس وإضافة تعليقات على نظرية التوازي لِأوقليدس (Taleb & Bebbouchi, 1986, p. 128).

كغيره من العلماء المسلمين، ساهم ثابت بن قرة في الحفاظ على تراث الهندسة اليونانية الكلاسيكية ودراسته في العالم الإسلامي مع إحراز المزيد من التقدم فيه، مع استخدام تقنية إفناء الفرق لإعطاء البراهين (Katz, 2009, p. 365). استعمل بن قرة فكرة إفناء الفرق في حساب مساحة قطعة من قطع مكافئ بأسلوبه الخاص مع مزجها بالحساب الجبري، إذ تضمنت حساباته كميات لامتناهية الصغر وأفكارا حول مفهوم النهاية وكانت طريقته مختلفة عن طريقة أرخميدس. حسب (Youschkevitch, 1976, p. 124) فإن بعض مؤلفات أرخميدس حول حساب مساحة قطع مكافئ لم يعرفها ثابت. نقرأ في كتاب (Katz, 2009, p. 305) ما يلي:

"المؤلفون المسلمون فهموا أعمال اليونانيين وأرادوا تجاوزها، أي العمل في حساب أحجام المجسمات عبر طريقة إفناء الفرق التي ابتكرها يودكسوس واستخدمها أرخميدس على نطاق واسع. اتضح أنه على الرغم من أن علماء الرياضيات المسلمين قرأوا كتاب أرخميدس "حول الكرة والأسطوانة"، إلا أنهم لم يكن لديهم كتابه "المخروطيات والأشكال الكروية" الذي أظهر فيه أرخميدس كيفية حساب حجم الأشكال المتكونة عن طريق دوران قطع مكافئ حول محوره. غير أن ثابت بن قرة وجد برهانه الخاص، وهو طويل ومعقد للغاية".

كانت القطوع المخروطية مستعملة بكثرة في رياضيات البلاد الإسلامية لبناء جذور المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة وحتى الرابعة (Youschkevitch, 1976, p. 123). اهتم ثابت بن قرة بهذا المجال، فعملَ على مساحات السطوح المنحنية وخصائص المخروطات، وله أعمال على لامتناهيات الصغر (راشد، 2011، صفحة 129). من نتائجه في ذلك نذكر (Taleb & Bebbouchi, 1986, p. 128):

- حساب مساحة قطعة من قطع مكافئ من خلال مجموع مساحات مضلعات.
- حساب حجم مجسم ناتج من دوران قطعة من قطع مكافئ.



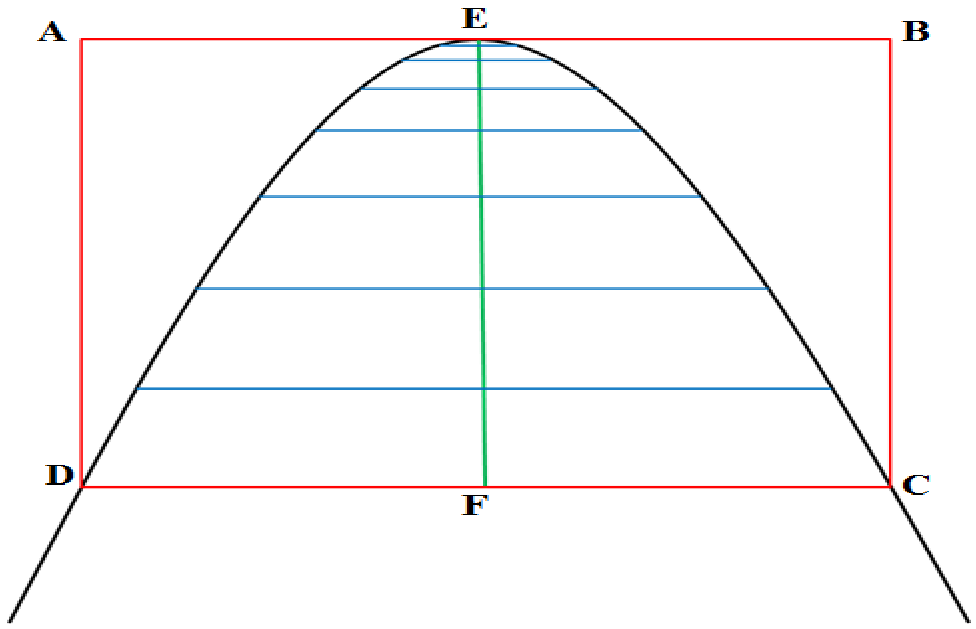
الشكل 3: قطعة من قطع مكافئ من مخروط

عملُ ثابت بن قرة على لا متناهيات الصغر موجود في ثلاث مؤلفات: **"في مساحة قطع المخروط الذي يسمى المكافئ"، "في مساحة المجسمات المكافئة"، "كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها"**، إذ حدّد مساحات وأحجام هذه الأشكال (راشد، 2011، صفحة 135).

وجد ثابت أنه مرغم على إيجاد طريق جديد لأنه كان يجهل أعمال أرخميدس في القطع المكافئ والمجسمات المخروطية والكروية. ابتكر في كتابه "في مساحة قطع المخروط الذي يسمى المكافئ" أدوات رياضياتية ضرورية لتحديد مساحة قطعة من القطع المكافئ واستخدم حسابا مكثفا لا يخلو من الصعوبة إلى درجة تتجاوز ما كانت عند أرخميدس، ذلك لتأمين التقريب الضروري لطريقة إفناء الفرق لبرهنة وجود النهاية. يحتل الكتاب مكانة مهمة للغاية ضمن أعمال ثابت بن قرة خصوصا وفي تاريخ رياضيات اللامتناهيات في الصغر عموما، فهو أوّل كتاب خصّصه لمساحات السطوح المنحنية (راشد، 2011، صفحة 144).

تضمّن الكتاب ثلاث مستويات وكل مستوى تمهيدي للذي يليه. الأول حول القضايا الحسابية والثاني حول القطع المستقيمة والثالث حول مساحة القطع المكافئ. كل ذلك لحساب مساحة القطع المكافئ عن طريق تجزئته إلى مضلّعات صغيرة بحيث تكون مساحاتها كميات لامتناهية الصغر (راشد، 2011، صفحة 145).

اشتملت طريقة بن قرة على حسابات طويلة ومعقدة. اعتمد في حلّه على 15 توطئة حسابية ثم شرع في حساب مساحة قطعة من قطع مكافئ ابتداء من القضية 16 إلى القضية 20 (Youschkevitch, 1976, p. 126). يمكن أن نلخص فكرة ثابت بن قرة مع تجنّب تعقيدات الحسابات الرياضياتية كما يلي:
استعمل ثابت بن قرة طريقة ذكية لحساب مساحة قطعة من قطعٍ مكافئ. قسّم قطعة من محور تماثلها (قطعة مستقيمة عمودية على القاعدة في منتصفها وتصل إلى الرأس) إلى قطع مستقيمة غير متساوية أطوالها متناسبة مع متتالية المربعات 1^2، 2^2، 3^2، … (Youschkevitch, 1976, p. 125).



الشكل 4: طريقة تجزئة ثابت بن قرة لقطعة من قطع مكافئ (القطعة داخل متوازي الأضلاع ABCD)

لتكن DEC قطعة من قطع مكافئ قطرها EF، وليكن ABCD متوازي الأضلاع المرفق بهذه القطعة بحيث EF عمودي على DC (انظر الشكل 2). قام ثابت بن قرة بتجزئة القطع المكافئ إلى مضلعات باستعمال القطع المستقيمة التي تقطع القطر EF (تنتج المضلعات إذا ربطنا بين أطراف القطع المستقيمة (بالأزرق) انطلاقا من القاعدة DC وصولا إلى الرأس E). إذا جمعنا مساحات هذه المضلعات كلّها، سنجدها تساوي مساحة القطع المكافئ مع هامش خطأ صغير.

باستعمال فكرة إفناء الفرق (وهنا يدخل مفهوم النهاية واللانهاية معا)، إذا كانت التجزئة **لانهائية** (تصغير المضلعات إلى لانهاية) ستكون مساحات المضلعات **لامتناهية في الصغر**. عندئذ **مجموع هذه المساحات ستكون نهايته تساوي مساحة القطع المكافئ.**

لكن كيف نحسب مجموع هذه المساحات؟ أجاب ثابتٌ عن السؤال باستعمال خصائص النهاية أيضا، إذ برهن بدقة أنّ **مجموع هذه المساحات يساوي ثُلثي مساحة متوازي الأضلاع المرفق بالقطعة**. بالتالي وصل إلى النتيجة التالية (راشد، 2011، صفحة 173) (Youschkevitch, 1976, p. 126) (Rashed, 2015, p. 487):

"**مساحة القطع المكافئ لانهائية، لكنّ مساحة أيّة قطعةٍ منه تساوي ثُلثي مساحة متوازي الأضلاع المرفق بها**"

هذه النتيجة صحيحة كذلك إذا كان قُطرُ القطع المكافئ غير عمودي على الضلع DC. تَمكَّنَ ثابت بن قرة من حساب المساحة بنفس الفكرة في هذه الحالة أيضا.

استطاع ثابت بن قرة أن يحسب مساحة قطعة من قطع مكافئ بهذه الطريقة الاستثنائية التي لا تخلو من الصعوبة. لا يُمكِننا الادّعاء أنه عرَف مفهوم النهاية مثلما نُعرّفه اليوم في التحليل الحديث، لكنه بالتأكيد استخدم خواص هذا المفهوم كفكرة هادية في حساب المساحات.

يقول (Sonar, 2021, p. 4): "بالمعنى الضيق، التحليل ليس سوى فرع من الرياضيات يدرس عمليات اللانهاية وكميات لامتناهية الصغر". كانت لدى ثابت بن قرة تصورات فيما يخص مفهوم اللانهاية، الذي يُعدّ من المفاهيم الأساسية التي يتضمنها التحليل. فبالإضافة إلى استعماله لكميات لامتناهية الصغر في أعماله حول مساحة القطوع المخروطية، كانت لدى ثابت أفكار حول الكميات لامتناهية الكبر. حسب (Taleb & Bebbouchi, 1986, p. 129) تصوراته ذُكرت في مؤلف غير مترجم ومحفوظ في المتحف البريطاني بعنوان "**أسئلة مطروحة لثابت بن قرة الحرّاني**" (Questions posées à Thābit Ibn Qurra al Harrani) منسوب لأبي موسى بن أُسيْد. هذا المؤلف، حسب (راشد، 2011، صفحة 136)، عبارة عن مراسلة فلسفية مع ابن أُسيْد يدافع فيها ثابتٌ عن مفهوم اللانهاية الفعلي. كان أرسطو يعتقد أن اللانهاية احتمالية وغير فعلية، فهو يرى مثلا أنّ جمع الأعداد الطبيعية إلى لانهاية 1+2+3+... احتمالي فقط وغير ممكن في الواقع. مفهوم اللانهاية الفعلي تم قبوله في الرياضيات فقط بعد أعمال جورج كانتور (1845–1918 Georg Cantor) في أواخر القرن التاسع عشر، إذ أثبت كانتور أن مجموعة الأعداد الطبيعية كلها تشكل كيانا واحدا لانهائيا.

تحدّث ابن قرّة كذلك عن أنواع الأعداد وأن بعضها يمكن أن تكون لانهائية. في سؤال عن كون لانهاية ما لا يمكن أن تكون أكبر من لانهاية أخرى، فقد أوضح من خلال مثال عددي أن هذه الفكرة خاطئة، إذ أن كُلّا من الأعداد الزوجية والأعداد الفردية من النوع اللانهائي، وأنهما متساويان ويساويان نصف الأعداد الطبيعية التي هي أيضا من النوع اللانهائي، ويمكن أيضا أن نتخيل نوعا لانهائيا يساوي ثلث نوع لانهائي آخر أو ربعه. الخلاصة أن ثابت بن قرة يرى بوجود كميات لانهائية غير متساوية فيما بينها (Taleb & Bebbouchi, 1986, p. 129).

حساب مساحات الأسطح المنحنية وأحجام المجسمات المنحنية يدخل ضمن مجال واسع يسمى "**هندسة لامتناهيات الصغر**" أو "**جبر لامتناهيات الصغر**". انتهى البحث في هذا المجال بعد أرخميدس. كانت بداية العودة إليه في القرن التاسع مع أعمال الكندي وبني موسى. ثابت بن قرة، الذي كان تلميذا لبني موسى، هو أول من جمع بين تقاليد أرخميدس وجبر الخوارزمي مع استعمال عمليات حسابية وجوهرية، فحفز طريقا في البحث سيستمر في التفرع والتقدم (Rashed, 2015, pp. 97-98). حسب (Djebbar, 2013, p. 46)، فإن أكثر المؤلفات أهمية في حساب المساحات والأحجام خلال القرن التاسع كانت أعمال بن قرة حول القطوع المخروطية ومنها القطوع المكافئة.

4.2. الأوروبيون ورثة مباشرون للرياضيات من العلماء المسلمين

بعد سعيهم في تحصيل ما عند الأمم السابقة، نجح علماؤنا الأوائل في بناء صرح علمي مازال الغرب يستلهم منه في شتى العلوم التقنية وينسبون التقدم إليهم غاضين الطرف عن إنجازات هؤلاء العباقرة المسلمين (خروبي، 2022، الصفحات 171-172).

ضمّت المناطق التي تم فتحها من طرف العرب في نهاية القرن الحادي عشر عدة مخطوطات علمية وسكانا قادرين على فك رموز هذه المخطوطات وهذا ما سمح للمسيحيين بفهمها (Baumann, 2005, p. 78). تم الحفاظ على التراث الثقافي اليوناني إلى حد ما طوال العصور الوسطى من خلال تقلص الإمبراطورية البيزنطية المتمركزة في القسطنطينية. إلّا أن الهيمنة العربية في منطقة البحر الأبيض المتوسط هي التي غذّت هذا التراث بشكل فعال خلال قرون العصور المظلمة، ثم نقلته في النهاية إلى أوروبا الغربية (Edwards, 1979, p. 81).

بحلول القرن الخامس عشر، كانت الحضارة العلمية الإسلامية في حالة انحدار وكان هناك عدد قليل من العلماء ذوي نتائج في السنوات التالية. لكن حتى قبل القرن الخامس عشر، استؤنف النشاط الرياضي في أوروبا. كان العامل الرئيسي في هذا الإحياء هو عمل مترجمي القرن الثاني عشر، الذين أتاحوا للأوروبيين جزءًا من الأعمال الرياضياتية الإسلامية، وأهمها أعمال الخوارزمي في الحساب والجبر (Katz, 2009, p. 317).

على الرغم من المصادر الرياضياتية المحدودة المتاحة للأوروبيين في مطلع الألفية، إلا أن العلماء عرفوا أن هناك تقليدًا قديمًا في الرياضيات يعود إلى اليونانيين، ولكن لم يكن من الممكن الوصول إليه فعليًا في ذلك الوقت. هذا التراث، بالإضافة إلى جزء من الرياضيات التي تم تطويرها في العالم الإسلامي، لم يتم جلبها إلى أوروبا الغربية إلا من خلال عمل المترجمين. اكتشف الباحثون الأوروبيون الأعمال العلمية اليونانية الكبرى (المترجمة إلى العربية في المقام الأول) بدءًا من القرن الثاني عشر وبدأوا عملية ترجمتها إلى اللاتينية (Katz, 2009, p. 326). تمت ترجمة كتاب الأصول لأوقليدس إلى اللاتينية في أوائل القرن الثاني عشر. قبل ذلك، بالطبع، كانت الإصدارات العربية متاحة في إسبانيا (Katz, 2009, p. 328).

كان كُتّاب الجبر في أوروبا في العصور الوسطى ورثة مباشرين للعمل الإسلامي (Katz, 2009, p. 348). من بين أسباب ظهور العلوم العربية في المناطق اللاتينية هو أن بعض المهتمين قرروا أن يذهبوا حيث تزدهر العلوم في الفترة بين القرنين العاشر والحادي عشر الميلادي ثم الانخراط في رحلة الترجمة، منهم من جاء من إسبانيا مثل جيان من إشبيلية (Jean of Sevilla) (Djebbar, 2013, p. 171). منهم من جاء من إنجلترا مثل روبرت من تشيستر (Robert of Chester) الذي أنتج أول ترجمة لاتينية لكتاب الجبر للخوارزمي في عام 1145 (Bressoud, 2019, p. 66). من هؤلاء أيضا من قدِم من إيطاليا مثل جيرارد من كريموني (Gerard of Cremone) الذي ترجم كتاب "**أشكال القطع**" لثابت بن قرة وكتاب الخوارزمي في الجبر (Djebbar, 2001, p. 148). بداية من القرن الثاني عشر تسارعت وتيرة الترجمة من العربية بسبب الفتوحات واستمرت حتى القرن الخامس عشر مع توفر المخطوطات العربية (Djebbar, 2013, pp. 172-173). كانت كتب الخوارزمي وكتب ثابت بن قرة من أبرز الكتب التي اهتم بها العلماء اللاتينيون في العصور الوسطى (Djebbar, 2013, pp. 174-175).

في عام 1202، نشر ليوناردو من بيزا (Leonardo of Pisa)، المعروف لدى المؤرخين باسم فيبوناتشي (Fibonacci)، كتابه الأساسي "**كتاب الحسابات**" (**Liber** abaci). سافر فيبوناتشي على نطاق واسع عبر شمال أفريقيا حيث درس الرياضيات. ركّز في كتابه على إدخال الأرقام العربية وشرح الرياضيات التي كانت مفيدة للتجار، لكنه تضمن فصلا عن "**الجبر والمقابلة**" اقتبس لأمثلته من الخوارزمي وغيره من علماء الرياضيات المسلمين.

تمثل دورُ علماء الرياضيات المسلمين في نقل اكتشافات سابقيهم والحفاظ عليها وإثرائها. فقط من خلال النصوص العربية تعرفت أوروبا على القطوع المخروطية لأول مرة. العلماء العرب تشهد لهم أعمالهم التي استعملوا فيها طريقة إفناء الفرق، كما استعملوا طرقا جديدة تماما لإيجاد نتائج كانت عند أرخميدس ولاكتشاف نتائج اخرى قيمة تستحق الذكر، منها مؤلف ثابت بن قرة "**كتاب في مساحة قطع المخروط الذي يسمى المكافئ**" (Youschkevitch, 1976, p. 124). هذا الأخير، ترك نتاجا رياضياتيا ضخما في عدة ميادين أخر مثل الهندسة والفلك ونظرية الأعداد (راشد، 2011، صفحة 135)، وله فضل في الرياضيات التحليلية، إذ مهدت أبحاثه لظهور علم التفاضل والتكامل (أي علم التحليل) من خلال ترجماته واكتشافاته الجديدة حول الأعداد والقطوع المخروطية عموما (خروبي، 2022، الصفحات 177-178).

3. ابتكار التحليل الرياضياتي

1.3. ميلاد علم التحليل من الهندسة والجبر

بحلول نهاية القرن الثاني عشر الميلادي، كانت العديد من الأعمال الرئيسية في الرياضيات اليونانية وبعض الأعمال الإسلامية متاحة لعلماء القراءة اللاتينية في أوروبا. خلال القرون التالية، تم استيعاب هذه الأعمال وبدأ الأوروبيون أنفسهم في ابتكار رياضيات جديدة (Katz, 2009, p. 327).

بالنسبة للعديد من المؤرخين، ولادة الجبر كانت مع كتاب الجبر والمقابلة للخوارزمي. لا يستخدم العمل أية رموز وكل شيء مكتوب بالكلمات، بل إن الأرقام مكتوبة بالكامل باستعمال الحروف. كل مسألة يتم شرح حلّها بشكل عام وبمثال عددي ثم يتم إثبات صحة الحل بالبرهان الهندسي (Baumann, 2005, pp. 70-71)، وكان المجهول لدى الخوارزمي يمثل عددا أو كمّية هندسية (Baumann, 2005, p. 72).

متتبعا أسلوب الخوارزمي، نشر جيرولامو كاردانو (Girolamo Cardano 1576-1501) في عام 1545 كتابه "**الفن العظيم أو قواعد الجبر**" (Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis). كان الكتاب خاليا بأكمله تقريبا من أي رمز أو اختصار مع استخدام الحجج الهندسية (Bressoud, 2019, pp. 67-68).

حدث تغيير بداية من نهاية القرن السادس عشر بإدخال الاختصارات والرموز. في عام 1591، نشر فرانسوا فييت (François Viète 1603-1540) كتاب "**مقدمة في الفن التحليلي**" (Isagoge in Artem Analyticem)، تمّ فيه استخدام الحروف لتمثيل الكميات غير المعروفة والثوابت وتمّ استبدال الحجج الهندسية بقواعد تحافظ على توازن المعادلات. كان ديكارت (René Descartes 1650-1596) هو من أسس ممارسة استخدام الحروف الأخيرة في الأبجدية (x,y,z, ...) للمتغيرات وتلك التي في البداية (a,b,c, ...) للثوابت (Bressoud, 2019, p. 69).

في القرن السابع عشر كان كلٌّ من بيير دو فيرما (Pierre de Fermat 1665-1607) وديكارت يعملان في نفس الوقت على مسائل مختلفة، لكنّ كلاهما توصّل إلى ترجمة المشكلة الهندسية بلغة الجبر فظهرت ما يُسمى اليوم بِـ "**الهندسة التحليلية**". إنها تجسّد العلاقة بين الجبر والهندسة عندما يتم تفسير المنحنى الهندسي بمعادلة جبرية. كان ذلك الجمع بين الجبر والهندسة متمثلا في المستوى الديكارتي (Bressoud, 2019, pp. 70-71).

قبِل الجميع آنذاك هذه الطريقة في مزاوجة المعادلات الجبرية بالمنحنيات الهندسية. بعد ذلك، ظهر جون واليس (John Wallis 1703-1616) الذي قرأ كتاب ديكارت "الهندسة" (La Géométrie)، فألّف هو الآخر كتابه "**حساب لامتناهيات الصغر**" (Arithmetica Infinitorum) في عام 1656. كما يوحي العنوان، حوّل واليس مشكلة حساب المساحات والأحجام إلى اتجاه جديد بتحويل التركيز من الهندسة إلى الحساب (Bressoud, 2019, p. 81).

الحقيقة هي أن التحليل لم يكن ليظهر إلا بعد ابتكارين مهمين: الأوّل هو ابتكار علم الجبر ثم العمل بقواعده الدقيقة مع استعمال التدوين بالرموز، والثاني هو الجمع بين الجبر والهندسة عبر الإحداثيات الديكارتية (Bressoud, 2019, p. 197).

2.3. فضل الرياضياتيين المسلمين في ابتكار التحليل

لعبت الحضارة الإسلامية دورًا مزدوجًا في تاريخ الرياضيات. دور الربط الزمني من خلال السماح بنقل

المعرفة بين العالم اليوناني في العصور القديمة وأوروبا الغربية في أواخر العصور الوسطى، ودور الوسيط الجغرافي من خلال تجميع المعرفة اليونانية والفارسية والهندية (Baumann, 2005, p. 75).

انتقلت جوانب مختلفة من الأعمال الرياضياتية الإسلامية إلى أوروبا خلال القرنين الثاني عشر والثالث عشر. في بعض مجالات الرياضيات، كانت الأفكار الأولى في أوروبا عبارة عن نتائج مباشرة لعمل العلماء المسلمين الأصلي أو تعديلاتهم على العمل اليوناني أو الهندي (Katz, 2009, p. 369). الكلمة الإنجليزية "Algebra" نفسها مشتقة من كلمة "**الجبر**" العربية (Bressoud, 2019, p. 65)، وكلمة "**Algèbre**" الفرنسية كذلك تأتي من كلمة "الجبر" التي تظهر في عنوان مؤلف الخوارزمي (Baumann, 2005, p. 71).

أحد أهم أسباب ابتكار التحليل هو علم الجبر الذي ابتكره ووضع أوّل أُسسه علماء الرياضيات المسلمين. يقول (Bressoud, 2019, p. 64) في كتابه حول تاريخ التحليل: "**التحليل مكتوب بلغة الجبر. في الواقع، بالنسبة للعديد من الطلبة، فإنه يرقى إلى ما يزيد قليلاً عن إتقان التلاعب بالتعبيرات الجبرية (...) بينما ننتقل إلى القرن السابع عشر، سنرى الجبر يلعب دورًا مركزيًا (..) قد يبدو من الغريب تخصيص قسم لتاريخ الجبر في تاريخ التحليل، لكن التحليل يعتمد بعمق على الترميز الجبري**".

يقول (Rashed, 2015, p. XV): "**إن تعبيرات «الرياضيات الحديثة المبكرة» أو «الرياضيات الكلاسيكية» هي المصطلحات المستخدمة عادة للإشارة إلى الرياضيات التي تطورت خلال القرنين السادس عشر والسابع عشر في أوروبا الغربية، مع استبعاد كل المناطق الأخرى (...) إذا فحص المرء مكونات هذه «الرياضيات الحديثة المبكرة»، فسرعان ما يلاحظ أن هذه الفصول بعيدة كل البعد عن كونها معاصرة؛ فكل منها له تاريخه الخاص، والابتكارات أو الاكتشافات ليست متزامنة بأي حال من الأحوال. بشكل أكثر عمومية، يبدو المشهد العالمي للرياضيات في القرنين السادس عشر والسابع عشر وكأنه مركب، وهو صرح يتكون من عناصر مختلفة ذات أصول يمكن إرجاعها إلى العديد من التواريخ المختلفة. بالفعل، فإن بعض الفصول، مثل الهندسة المستوية وهندسة المقاطع المخروطية تعود إلى ألف عام**". يضيف نفس الكاتب (Rashed, 2015, p. 83): "**الرياضيات الكلاسيكية تعود بعض فصولها إلى الرياضيات اليونانية. لنأخذ على سبيل المثال الهندسة المستوية، وهندسة المقاطع المخروطية، والهندسة الكروية. فصول أخرى متجذرة في الرياضيات العربية، كما تشهد بذلك التخصصات الجبرية ودراسة التحويلات الهندسية. مع ذلك، فقد تطورت نماذج أخرى في أوروبا في القرن السابع عشر، مثل التحليل لامتناهي الصغر**".

تعريف مفهوم النهاية بالشكل الحديث لم يظهر في الرياضيات قبل زمن فيرشتراس. لكن هذا التعريف يشمل طرائق البرهان التي كانت لدى علماء الرياضيات المسلمين وتطورت خلال القرن السابع عشر في أوروبا، ثم وصلت إلى شكلها الحديث مع كوشي.

خاتمة

لقد بدأت الرياضيات تاريخيا بالهندسة ثم تطوّرت مع ابتكار الجبر، وبفضل الجمع بين الهندسة والجبر تمّ ابتكار التحليل الذي صار بعد ذلك فرعا مستقلا. كان لعلماء الإسلام فضلٌ كبيرٌ في تطوّر كل هذه الفروع الأساسية في الرياضيات. حسب (ڨرڨور، صفحة 44) فقد "**جنّد الغربيون كل الوسائل لدراسة ما في حوزتهم من المخطوطات اليونانية والعربية واللاتينية حتى صار من الصعب الوصول إلى جديدٍ في الموضوع**". لكننا نؤمن أن هذا لا يمنعنا من بذل المزيد من الجهود لتوضيح الحقائق التاريخية الخاصة بتاريخ العلوم الإسلامية عموما وتاريخ الرياضيات خصوصا، مع إبراز دور الرياضياتيين المسلمين وإسهاماتهم الكبيرة في تقدّم الرياضيات.

فَرَضت أعمال ومؤلفات العلماء المسلمين، التي انتقلت إلى أوروبا، على الغربيين الاعتراف بفضل الحضارة الإسلامية في تطوّر علم الهندسة وابتكار علم الجبر. أما ابتكار التحليل فينسُبه مؤرخو الغرب إلى أسلافهم من الرياضياتيين في أوروبا، ابتداء بِنيوتن وليبنيز اللّذيْن اهتمّا بموضوع لامتناهيات الصغر وصولا إلى كوشي الذي عرّف عدة مفاهيم أساسية في التحليل (الاستمرار والاشتقاق والتكامل) باستعمال مفهوم النهاية. لكنّ هذا البحث يوضّح أنّ أعمال ثابت بن قرة، وغيره من الرياضياتيين المسلمين، في الهندسة والجبر كانت هي القاعدة التي انطلق منها الرياضياتيون في أوروبا نحو ابتكار التحليل. يُضاف إلى ذلك أنّ ثابت بن قرّة استخدم في أعماله خواص مفهومي النهاية واللانهاية لحساب مساحة القطع المكافئ من خلال طريقة إفناء الفرق قبل الرياضياتيين الأوروبيين. كانت طريقة إفناء الفرق أحد المصادر المستخدمة بالفعل في القرن الثامن عشر في براهين حساب قيمة النهاية، غير أنّ نتائج كوشي ترجع إلى تقنيات الجبر المعروف حينها أكثر من كونها ترجع إلى تقنيات طريقة إفناء الفرق الهندسية (Grabiner, 2005, pp. 30-31).

أدّت مساهمات ثابت بن قرة الكبيرة في موضوع لامتناهيات الصغر إلى انطلاقات جديدة في الرياضيات. عولِج الموضوع بعده من طرف المَهاني وإبراهيم ابن سنان وابن سهل ومن بعدهم من طرف ابن الهيثم. هذا في حد ذاته يوضح الدور الأساسي لأعمال ثابت بن قرة في هذا المجال كما هو الحال في العديد من الأعمال الأخرى (Rashed, 2015, p. 485). بالنسبة لثابت بن قرة، كان العمل في هندسة لامتناهيات الصغر يعتمد على أُسس متينة وقد حقق أيضًا تقدمًا كبيرًا. لقد جمع قدرًا كبيرًا من المعرفة وهو ما يكفي لتوفير أساس للانطلاقات الجديدة، لقد حان الوقت لورثة عمله لقبول التحدي (Rashed, 2015, p. 499).

انتقلت طريقة إفناء الفرق، التي تُعتبر النموذج الأصلي الهندسي لمفهوم النهاية المركزي في التحليل الحديث، من اليونانيين إلى الرياضياتيين المسلمين الذين استخدموها بدورهم في البراهين الهندسية وطوروا استعمالها بإتقان مع ابتكار علم الجبر، ثم وصلت إلى أوروبا بفضل دور الحضارة الإسلامية في الحفاظ على أعمال اليونانيين وترجمتها، وبفضل جهودهم في تنقيح هذه الأعمال وتدوينها من طرف العلماء المسلمين لكي تكون مُتاحة للدارسين. بل أكثر من ذلك، ابتكر علماء الرياضيات المسلمين علوما وطرائقا جديدة أكثر من

التي كانت لدى سابقيهم. هذا يثبت أنّ ابتكار التحليل الرياضياتي في مُجمله لا يمكن أن يُنسب لعالم واحد أو فئة معينة، بل هو نتيجةٌ لتراكم عدة معارف كان نصيبٌ كبيرٌ منها لعلماء الرياضيات المسلمين، وأنّ الرياضيات في الحضارة الإسلامية لم تقلّ أهمية عن رياضيات اليوم.

قائمة المراجع:

Baron, M. E. (1969). **The origins of the infinitesimal calculus (1st ed.)**. Oxford: Pergamon Press.

Baumann, P. (2005). **Histoire des mathématiques**. Strasbourg, DEUG MIAS 1re année: UFR de mathématique et d'informatique — Université Louis Pasteur.

Borzacchini, L. (2006). **Why Rob Archimedes of his Lemma?** Mediterranean journal of mathematics, 3, 433–448.

Bressoud, D. M. (2019). Claculus Reordered: A history of the big ideas. New Jersey: Princeton University Press.

Dijksterhuis, E. J. (1987). **Archimedes. (C. Dikshoorn, Trans.)** New Jersey: Princeton University Press.

Djebbar, A. (2001). **Une histoire de la science arabe: Introduction à la connaissance du patrimoine scientifique des pays d'Islam.** Entretiens avec Jean Rosmorduc. Paris: Seuil.

Djebbar, A. (2013). **L'age d'or des sciences arabes.** Paris: Le Pommier.

Dunham, W. (1990). **Journey through the genius: The great theorems of mathematics**. New York: John Wiley & Sons.

Edwards, C. H. (1979). **The historical development of the calculus (1st ed.).** New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Fischbein, E. (2001, November). **Tacit models and infinity**. Educational studies in mathematics, 48, 309-329.

Grabiner, J. V. (2005). **The origins of Cauchy's rigorous calculus**. New York: Dover Publications, Inc.

Katz, V. J. (2009). **A history of mathematics: An introduction (3rd ed.)**. (D. Lynch, Ed.) Boston: Pearson Education, Inc.

Knorr, W. R. (1978). **Archimedes and the Elements: Proposal for a revised chronological ordering of the Archimedean corpus**. Archive for history of exact sciences, 19, 211-290.

Kolar, V. M., & Tatjana, H. (2012). **Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. Educational studies in mathematics(80), 389.**

Rashed**,** R. (2015). Classical mathematics from al-Khwārizmī to Descartes. (M. H. Shank, Trans.) Abingdon: Routledge.

Sarvestani, A. K., & Kaper, W. (2001, May). **Contemplating problems taken from the history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept**. Netherlands: Universiteit van Amsterdam.

Sonar, T. (2021). **3000 Years of Analysis: Mathematics in history and culture**. Cham, Switzerland: Springer Nature.

Taleb, K., & Bebbouchi, R. (1986). **Les infiniment grands de Thabit Ibn Qurra.** Premier colloque international sur l'histoire des mathématiques arabes, (pp. 126-131). Alger.

Thiele, R. (2003). **Antiquity. In H. N. Jahnke**, A history of analysis (Vol. 24, pp. 1-39). Rhode Island, Providence, USA: American Mathematical Society.

Youschkevitch, A. P. (1976). **Les mathématiques Arabes (VIII-XV siècles)**. (M. Cazenave, & K. Jaouiche, Trads.) Paris: Librairie philosophique J. Vrin.

رشدي راشد. (2011). **الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة:** الجزء الأول، المؤسسون والشارحون (الإصدار 1، المجلد 1). **(نقولا فارس، بدوي المبسوط، منى غانم، نزيه المرعبي، محمود حكيم، المترجمون)** بيروت، لبنان: مركز دراسات الوحدة العربية.

فتيحة خروبي. (ديسمبر, 2022). **فضل العلماء المسلمين في بعث الحركة العلمية بمدينة حران: العالمان ثابت بن قرة والبتاني أنموذجا.** مجلة البحوث التاريخية، 06(02)، 193-169.

يوسف قرقور. (بدون سنة). **تاريخ الرياضيات 1، دروس لأساتذة التعليم المتوسّط،** مطبوعة غير منشورة. القبة، الجزائر: المدرسة العليا للأساتذة.