# Les principes de la croissance des populations : population stable et population stationnaire

# The pricipales of population growth: stable population and stationary population

Ali Lakrouf, Université de Batna 1
Azzedine Metatha, Université de Batna 1
Adel Baghezza, Université de Batna 1

## Résumé

Cette recherche traite trois questions fondamentales de la démographie mathématique : La première question porte sur l'accroissement des populations. Nous analyserons le caractère évolutif des populations humaines dans le temps, nous examinerons les fondements de la mesure de l'accroissement naturel de la population, et nous aborderons le principe du renouvellement des générations . La deuxième question sera consacrée à l'étude de la population stable. Nous donnerons les caractéristiques de cette dernière, et nous verrons également comment une population tend vers la stabilité. La troisième question traitera la population stationnaire et ses caractéristiques. Nous parlerons également de manière brève de quelques indicateurs démographiques, ainsi que la dynamique de la population algérienne à la lumière de ces approches.

Mots-clés: Population, dynamique de population, indicateurs démographiques, population stable, population stationnaire.

## Abstract

This research treats three fundamental questions of mathematic demography: The first question concerns the population growth, we will speak in particular of the evolutionary character of the human populations, we will give the bases of the measurement of the natural increase of the population. The second question will be devoted to the study of the stable population. The third question will treat the stationary population. We will also briefly discuss some demographic indicators, as well as the dynamics of the Algerian population in light of these approaches.

**Keywords** : population, population dynamics, demographic indicators , stable model, stationary model .

## Introduction

Pendant toute son histoire la population mondiale a connu un équilibre entre les naissances et les décès ce qui engendrait une stagnation de son chiffre au cours des dizaines de siècles. A partir du XIX siècle, les progrès de la médecine et de l'hygiène, notamment vont permettre une explosion démographique. La population mondiale passe d'environ 1 milliard en 1800 à 1.5 milliards en 1900 pour attendre 2.5 milliards en 1950. Depuis janvier 2018, nous sommes 7.5 milliards à peupler la Terre. On estime que cette population augmente de 80 millions de personnes chaque année, soit 1.2 % en plus par an.

Avec cette dynamique de populations, les projections à l'horizon 2050 parlent d'environ 10 milliards d'habitants. Ce chiffre se stabilisera auteur de 11 milliards aux environs de 2100.

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population humaine.

Ces modèles représentent aujourd'hui un objet d'étude de toute première importance, aussi bien en démographie pure qu'en géographie humaine. Ils sont habituellement utilisés, d'une part, pour ''formuler une théorie permettant de relier différents phénomènes démographiques au sein d'une même population'' (Jane Menken Ansley et al .1995.p1545) et, d'autre part, leurs usages permettent la comparaison de ces phénomènes entre différentes populations. En d'autres termes les modèles démographiques peuvent servir à aider à la compréhension des phénomènes démographiques au sens strict, c'est-à-dire la fécondité, la mortalité et les mouvements migratoires, en particulier dans les régions du monde souffrant d'imperfections au niveau de leurs appareil statistique. De plus ces modèles peuvent, entre autres, nous donner une description déchiffrable de l'histoire des populations et ses perspectives.

Ces notions relatives à la dynamique et aux modèles des populations ont fait l'objet d'une attention particulière dès le XVIIIème siècle, de la part de nombreux auteurs, parmi lesquels Leonhard Euler (1707-1785) qui a discuté plusieurs questions démographiques, se basant sur l'hypothèse d'une population « Pn » croissante d'année en année suivant la formule $P(n+1) = r\ Pn$. A cette même époque Jean-Henri Lambert (1728-1777) propose dans son mémoire une équation de la mortalité, rendant compte de l'évolution de la survie d'une population en fonction de son âge.

Inspiré par les idées de ces précurseurs, l'économiste et démographe britannique Thomas Robert Malthus (1766-1834 ) qui est bien connu de tous les démographes car son nom est associé à la définition du concept « malthusienne », il en avait conclu dans sa série dissertations que la population croît selon les termes d'une suite géométrique (1,2,4,8,16…),alors que les moyens de subsistance (la nourriture) progressent suivant une suite arithmétique(1,2,3,4…..). Malthus redoutait les crises majeures des sociétés dues à une croissance trop rapide des populations par rapport aux subsistances. Cela pourrait selon lui conduire à des catastrophes. Son œuvre fait toujours un grand écho au sein de la communauté scientifique.

A citer également le mathématicien britannique Benjamin Gompertz (1779-1865) qui a mis au point une formulation mathématique de la loi de mortalité, lie la survie à l'âge. Et le Belge Pierre-François Verhulst (1804-1849) qui a établi un modèle de croissance de population, appelé « logistique ».Ce modèle se caractérise par la croissance d'une population tel que le taux d'accroissement diminue quand l'effectif progresse.

Sans oublier le pionnier de l'analyse démographique Wilhelm Lexis (1837-1914) à qui on lui doit notamment l'estimation de la durée normale de la vie humaine (théorie de la mortalité). On retient aussi de son œuvre le diagramme de Lexis. Ces modèles constituent dès lors la clé de voûte de la démographie moderne (Robert Schoen.2009. p759).

Au début du XX siècle le mathématicien américain Alfred James Lotka (1880-1949) apporte de très importantes contributions à la théorie de la dynamique des populations. C'est à lui que l'on doit la définition du concept de population stable et la démonstration de la convergence vers l'état stable. Ainsi, une population soumise indéfiniment à une fécondité et une mortalité par âge invariables tend vers une structure par âge et un taux d'accroissement invariables. Mais on a rarement recouru à ce modèle et il est resté longtemps sans application. Toutefois, après la Deuxième Guerre mondiale son utilisation devient fréquente.

Les questions en matière de dynamique et croissance de population sont encore nombreuses, nous allons cependant nous attacher à trois points essentiels:

Comment peut-on calculer de manière intelligible, uniforme, et méthodique la croissance d'une population? Quelles sont les conditions à remplir pour que cette dernière tende vers la stabilité ou la stationnarité? Comment engendrer la population stable et la population stationnaire ? Telles sont quelques-unes des questions auxquelles nous allons essayer d'apporter ci-après des réponses.

Pour atteindre cette triple cible, nous avons adopté une démarche qui va s'organise autour de trois axes : le premier rappelle comment la population s'accroitra ou décroitra. On décrira en particulier le caractère évolutif des populations humaines dans le temps. En mettant l'accent, en particulier sur l'indicateur clef de cette évolution, à savoir la reproduction et le renouvèlement. Cet axe constituera le fondement de la compréhension et la conception des deux sections qui suivent. Ainsi, dans le deuxième axe nous essayerons d'étudier le modèle stable de population et ses taux vitaux sous-jacents. Le troisième est centré sur le concept de la population stationnaire. C'est-à-dire dans le cas où les régimes de natalité et de mortalité s'équilibreraient, l'effectif. C'est le cas particulier de la « population stable ». Nous ferons aussi le point sur la dynamique de la population algérienne et ses indices relatifs à l'accroissement, à la fécondité et à la procréation.

# I-Dynamique des populations

**Accroissement de la population**

La dynamique des populations est l'étude des fluctuations en nombre des populations; elle est d'une importance fondamentale en démographie, car toutes les populations subissent, à des degrés divers, des variations (accroissement ou diminution) en nombre sur une courte ou longue période. Nous reprenons à ce propos une phrase de la contribution de Jean Bourgeois Pichat, qui indique que la dynamique de population constitue le noyau dur de la démographie (Jean Bourgeois –Picha.1994.p13)

La croissance d'une population fait partie intégrante de cette dynamique, elle est exprimée par le taux d'accroissement du nombre d'individus au sein de cette population par unité de temps.

Cela nous amènera à évoquer, les quatre facteurs qui modifient la dynamique d'une population :

-Naissances( N) :le nombre de nouveau-nés dans une population enregistrés au cours d'une période donnée ( généralement l'année) dans un territoire donné.

- Décès (D) = le nombre d'individus décédés dans une population au cours d'une période donnée.

- Immigration ( I ) : le nombre d'individus déplaçant dans une population par unité de temps

-Emigration( E) : le nombre d'individus sortant d'une population par unité de temps.

Ainsi, la fécondité, la mortalité et la migration sont l'ensemble des paramètres par lesquels on espère saisir la forme générale de la croissance, de la décroissance ou de la stabilisation de toute population (Daniel Courgeau, Robert Franck.2007 p39-45).

Dans ce premier paragraphe, trois indicateurs sont utilisés fréquemment dans les démonstrations qui vont suivre, à savoir :

**-Taux de brut de natalité(TBN)** ce taux est calculé en divisant le nombre de naissances vivantes survenues au cours d'une année donnée, par la population totale moyenne de la même l'année, tous âges et sexes confondus.

- **Taux brut de mortalité(TBM)** est le rapport entre le nombre annuel de décès et la population totale moyenne sur une période donnée dans un territoire donné.

- **Taux d'accroissement naturel (r)** correspond à la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité. (En Anglais « PGR » *Population growth rate*). Il correspond à la variation d'une population au cours d'une période de temps. Autrement dit il décrit le rythme de cette évolution (augmentation ou diminution).Un taux d'accroissement naturel positif signifie qu'il y a croissance exponentielle de la population. Un taux négatif signifie qu'il y a décroissance exponentielle de la population qui tend vers une extinction (Figure 1).

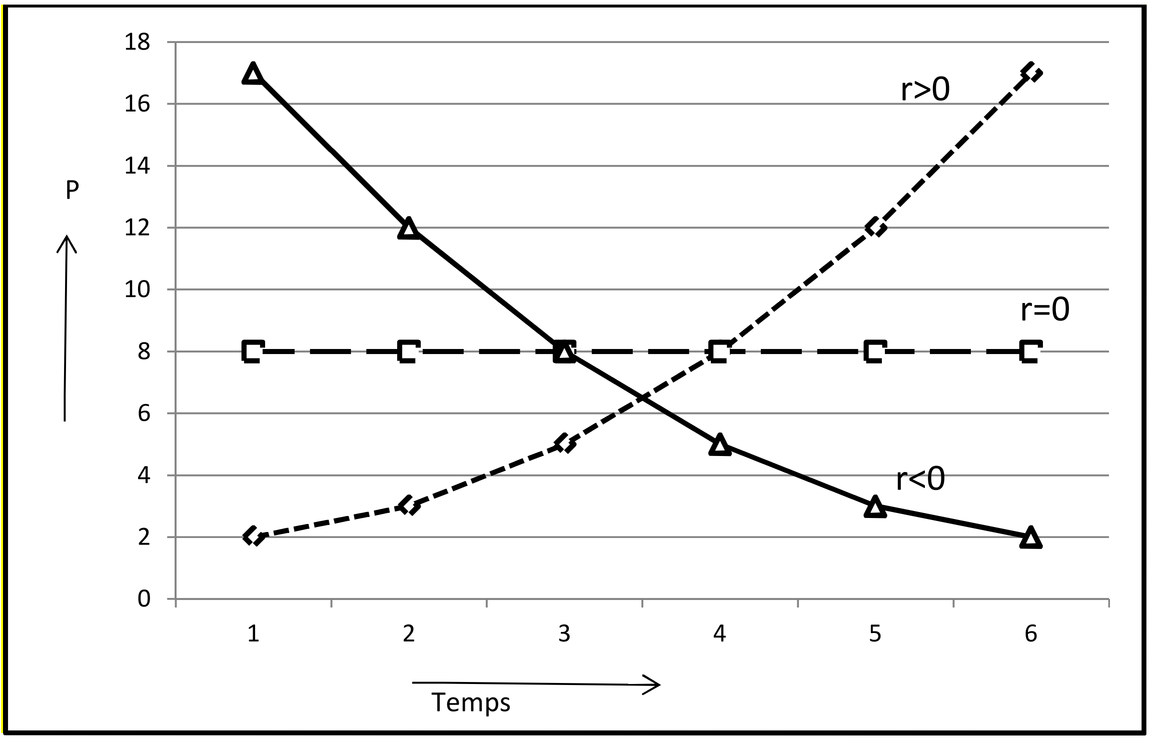
Ces indices s'expriment comme suit :

$$TBN = \frac{N}{P}$$

$$TBM = \frac{D}{P}$$

$$r = TBN - TBM = \frac{N-D}{P}$$

**Figure 1 : Accroissement d'une population selon r**




**Démonstration**

Appelons $P_t$ *et* $P_{t+1}$ les effectifs d'une population à deux dates différentes : t et t+1

$$P_{t+1} = P_t + N - D + I - E$$

Si le solde migratoire est nul ( /I-E=0/) on aura :

$$P_{t+1} = P_t + N - D$$

Si N=D la population tend vers la stationnarité ($P_t = P_{t+1} = P_{t+2} = \cdots = P_{t+n}$), nous y reviendrons dans le troisième axe.

Si /I-E=0/, et N $\neq$ D on aura :

$$AN = N - D \neq 0$$

$$r = \frac{N-D}{P_t} = \frac{AN}{P_t} = TBN - TBM$$

$$AN = rP_t$$

Où:

- AN est l'accroissement naturel d'une population.

Il en résulte l'expression suivante:

$$P_{t+1} = P_t + AN = P_t + rP_t = P_t(1+r)$$

A supposer que le taux d'accroissement r soit constant entre t et t+n, on déduit :

$$P_{t+2} = P_{t+1} + rP_{t+1} = P_{t+1}(1+r) = P_t(1+r)^2$$

En procédant de la même manière pour les différents $P_t$ on obtient une série géométrique du genre$P_t$, $P_{t+1}$, $P_{t+2}$, $P_{t+3}$…….. $P_{t+n}$ .

Donc la population $P_t$ après n années plus tard peut être décrite par la formule suivante:

$$P_{t+n} = P_t(1+r)^n$$

A l'aide des propriétés de Taylor (Jean-Luc Chabert & al.1993.p455), il est possible de montrer que :

$$e^r = 1 + \frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \dots\dots\dots \frac{r^n}{n!}$$

Ce qui se simplifie en $e^r = 1 + r$

En d'autres termes $e^{rn}=(1+r)^n$

La relation finale s'écrit alors : $P_{t+n} = P_t \ e^{rn}$

C'est la relation fondamentale de l'accroissement des populations.

On a donc ce qu'appelle la fonction exponentielle qui variait extrêmement brusquement.

Il nous a paru intéressant d'essayer de nous servir des statistiques algériennes pour évaluer son taux d'accroissement. Ainsi, la population algérienne est passée de 25.022 millions en 1990 à 39.9963millions en 2015 (Office National des Statistiques.2016.p5),soit une augmentation de 14.941 millions. Son accroissement intercensitaire est :

$$P_{2015} = P_{1990}\,(1+r)^{25}$$

$$(1+r)^{25} = \frac{P_{2015}}{P_{1990}}$$

$$1 + r = \sqrt[25]{\frac{P_{2015}}{P_{1990}}}$$

Cette analyse nous amènera à :

$$r = \sqrt[25]{\frac{P_{2015}}{P_{1990}}} - 1 = \sqrt[25]{\frac{39963}{25022}} - 1 = 1.0189 - 1 = 0.0189 = 1.89\%$$

Ainsi, le taux moyen de la croissance de la population algérienne entre 1990 et 2015 est 1.89%.

**Le temps de doublement de la population**

On peut calculer le temps n que mettrait une population pour se doubler, si son taux d'accroissement est conservé constant. Cela nous ramène à poser **:**

$$P_{t+n} = 2P_t$$

Cela implique $2P_t = P_t \ e^{rn}$

$$e^{rn} = 2$$

En passant par le logarithme népérien, on obtient:

$$\ln 2 = rn$$

$$n = \frac{ln2}{r} = \frac{0.693}{0.0189} = 37\ ans$$

Ainsi au rythme de son accroissement annuel moyen de 1990 à 2015 la population algérienne doublerait en 37 ans, soit en 2052 où elle frisera les 80 millions (Ce résultat est réalisable sous l'hypothèse que le rythme de croissance se maintiendrait jusqu'à l'année finale). Toutefois cette piste est loin d'être prévisible étant donné que la population algérienne ne pourrait pas conserver durant les prochaines décennies un tel taux d'accroissement constant. En effet, des études ont montré que la décroissance de rythme des populations est un phénomène inévitable. Autrement-dit il est non susceptible de se maintenir pour les générations à venir (George Tapinos et al.1991.p5).

On sait que Malthus avait prédit mathématiquement ,dans son ouvrage intitulé ''Essai sur le principe de la population''(Thomas Robert Malthus.1798), que sans frein, la population augmente de façon exponentielle ou géométrique , il pensait ainsi une durée de 25 ans comme période maximum de doublement d'une population croissant sans entraves ( Louis Henry et Paul Vincent.1947.p663) .On voit aujourd'hui que cette question ne fait pas l'unanimité .Des populations peuvent se doubler en au moins de 20 ans seulement. A titre illustratif, la population algérienne est passée d'environ 10,5 millions d'habitants en 1962, à 21 millions en 1982. Le taux moyen annuel correspondant à cette croissance est environ 3.5 %. Notant également que de nombreux pays africains subsahariens connaissent des taux d'accroissement frisant les 4 %, auquel correspond une période de doublement comprise entre 15 et 16 ans.

**Le remplacement des générations**

Le renouvellement des générations est le degré de remplacement d'une génération par la suivante. Il est mesuré par deux indices :

-le taux brut de reproduction, noté habituellement R, est le nombre moyen de filles, nées vivantes, mises au monde par femme, en l'absence de mortalité et de migrations entre la naissance et la fin de la période féconde. Il ne diffère de la descendance finale que par le taux de féminité des naissances, égal à 100/205 =0,488 (Calot Gérard, Sardon J.-P.2001.p338).

-le taux net de reproduction. Ce taux est souvent représenté par la lettre $R_0$. Il s'exprime par le nombre moyen de filles qui seraient nées d'une femme si elle a traversé sa vie de la naissance à la fin de ses années reproductives en se conformant aux taux de fécondité et de mortalité par âge d'une année donnée. Cet indice est la machine motrice de la dynamique démographique. En effet il illustre clairement ce qui se passe réellement dans une population en éliminant analytiquement les effets de momentum. C'est –à-dire qu'il supprime les effets de la structure par âge, ce qui peut fausser considérablement les taux de croissance ou de déclin de la population, ainsi que les taux de natalité et de mortalité.

Comme l'indice synthétique de fécondité, Ces deux taux peuvent être calculé en mesure longitudinale et transversale, c'est- à-dire la méthode de la génération fictive.

Traditionnellement, ces deux indicateurs de remplacement sont calculés dans le cadre de populations fermées. C'est pourquoi, dans la littérature, le taux net de reproduction à la naissance ne prend en compte que la seule mortalité. Cette limitation revient à ne s'intéresser qu'à la reproduction naturelle et à laisser de côté l'effet des migrations sur le remplacement (Calot Gérard, Sardon J.-P.2001.p344).

Le taux brut de reproduction est toujours supérieur au taux net de reproduction, car celui-ci il prend en compte le fait que certaines femmes vont mourir avant d'entrer et de terminer leurs années de procréation.

Si le taux net de reproduction est supérieur à 1, les générations mères sont remplacées par des générations filles plus importantes, si la valeur est inférieure à l'unité les générations filles ne remplacent plus les générations mères et la population tendra vers l'extinction. Un taux de reproduction net de 1 indique qu'une génération est exactement remplacée par la génération suivante.

Plus fondamentalement : un taux net de reproduction inférieur à 1 mènera à une baisse naturelle de population, un taux supérieur à 1 donnera une hausse naturelle de population d'une génération à l'autre, et un taux nul mènera la population à la stagnation.

On comprend aisément qu'un $R_0$ de 0,85 indique qu'une génération est remplacée par seulement 85%, et la population est intrinsèquement en baisse de 15% de génération en génération. Puisqu'en définitive, il manquera 15 femmes dans la nouvelle génération par rapport aux 100 femmes de départ.

**Application au cas de l'Algérie pour l'année 2015**

D'après les données de l'office National des Statistiques, le taux de fécondité estimé en 2015 pour l'ensemble de l'Algérie est de 3.1 enfants par femme. Mais ce taux ne fait aucune différence entre naissances féminines et masculines.

Les naissances enregistrées en 2015 se repartissent selon le sexe comme suit :

Sexe masculin : 530 599

Sexe féminin : 509 429

Le taux de féminité est 509 429/ (530 599+509429)= 0.489.

**Tableau 1 : Fécondité par âge , ISF et table de mortalité féminine (Algérie 2015)**

| Age | fx 2015 | ${}_5L_{x,x+5}$ 2015 | ${}_5P_{x,x+5}$ | Fx*${}_5P_{x,x+5}$ |
|---|---|---|---|---|
| 15-19 | 9.7 | 483497 | 0.96699 | 9.38 |
| 20-24 | 87 | 481428 | 0.96286 | 83.76 |
| 25-29 | 156.8 | 478978 | 0.95796 | 150.21 |
| 30-34 | 167.3 | 476369 | 0.95274 | 159.39 |
| 35-39 | 126.3 | 473388 | 0.94677 | 119.58 |
| 40-44 | 62 | 469633 | 0.93927 | 58.23 |
| 45-49 | 8.9 | 464515 | 0.92903 | 8.26 |
| 50-54 | - | 456746 | - | - |
| $\sum fx$ | 3.1 | - | - | 2.94 |

Source : Calculs effectués sur la base des données de l'ONS.2016.p5-6

Le taux brut de reproduction (hors mortalité féminine) = 3.1*0.489=1.52 filles par femme. Le taux net de reproduction (incorporant l'effet de la mortalité) vaut :

$0.489\sum_{x=15}^{50} fxPx$ =0.489*2.94=1.44 filles par femme.

Conclusion : pour ne pas dépasser le niveau de remplacement des générations, c'est –à-dire la stagnation de la population, la fécondité des femmes algériennes doit encore baisser d'à peu près 30 %.

Selon les perspectives démographiques mondiales des Nations Unies, l'Algérie n'atteindra le niveau $R_0=1$ que sur la période 2040-2045( United Nations.2017.p 32 ).

## II- Le modèle stable

On peut montrer que lorsqu'une population fermée, sans échange migratoire avec l'extérieur et soumise à des conditions de fécondité et de mortalité invariables pendant une période de temps suffisamment longue sa structure par âge et son taux annuel d'augmentation tendent à devenir constants (Shiva S Halli and K vaninadha.1992.p30-32). Ce taux constant est appelé dans ce cas, le taux intrinsèque d'accroissement naturel .Une population qui a atteint ce stade s'appelle une population stable.

Le concept d'une population stable n'est pas nouveau. Bien qu'il ait été introduit pour la première fois en démographie dans les années 1900 par Alfred James Lotka. le mathématicien Suisse Leonhard Euler est considéré, comme cela a été illustré plus haut, comme le premier à établir les principales propriétés de ce modèle au dix-huitième siècle (Leonhard Euler.1760. p144-165).

**Démonstration**

Soit $f_x$ le taux de fécondité à un âge donné (ou pour une tranche d'âge), qui se définit comme le nombre d'enfants nés vivants des femmes de cet âge au cours de l'année(Nt), rapporté à la population moyenne de l'année des femmes de même âge(Fx).

Soit sous forme mathématique:

$$\mathrm{t}f_x = \frac{\mathrm{N_t}}{\mathrm{tF}x} \rightarrow \mathrm{N_t} = \mathrm{tf}_x\,\mathrm{tF}_x \quad \text{(I)}$$

L'effectif d'une population de femmes à un instant *t* est le nombre de naissances passées pondérées par les probabilités de survie :

$$tF_x = \quad \mathrm{N}_{\mathrm{t}-x}\ \ \mathrm{P}_x \qquad \text{( II)}$$

Où:

$\boldsymbol{tF_x}$ est le nombre de femmes d'âge $\boldsymbol{x}$ en t.

$\mathrm{N_{t-x}}$ est le nombre de celles –ci à leur naissance ( en t-x).

$\mathrm{P_x}$ représente la probabilité de survivre de ces femmes de leur naissance jusqu'à l'âge $x$.

.

**Exemple** : les femmes âgées de 30 ans en 2000 se sont les naissances de 1970 en soustrayant les décès au cours de la période 1970-2000 , ainsi :

$$2000F_{30} = N_{1970} \times P_x$$

En injectant l'équation ( II) dans l'équation initiale (I) on obtient :

$$N_t = f_x \quad N_{t-x} P_x \qquad (\text{III})$$

On a vu déjà que l'effectif final s'écrivait :

$$E_1 = E_0(1 + r) \longrightarrow E_n = E_0(1 + r)^n$$

Un taux brut de natalité constant appliqué à une population exponentielle va donner des naissances qui augmentent en progression géométrique et on peut écrire :

$$N_1 = \mathrm{N}_0 + r\mathrm{N}_0 = \mathrm{N}_0(1 + r)$$
$$\mathrm{N}_2 = N_1(1 + r) = N_0(1 + r)^2$$
$$\mathrm{N}_3 = N_2\,(1 + r) = N_0(1 + r)^3$$

On aura donc pour les naissances à l'instant t-x l'expression :

$$N_{t-x} = \mathrm{N}_0(1 + r)^{\mathrm{t-x}} \qquad (\text{IV})$$

Et à l'instant t :

$$\mathrm{N}_t = N_0(1 + r)^{\mathrm{t}} \qquad (\text{V})$$

En injectant une seconde fois l'équation (IV) dans l'équation (III) nous obtenons :

$$N_t = N_0(1 + r)^{t-x} \; f_x \;\; P_x$$

Soit sous forme mathématique :

$$N_t = \; f_x\, N_0\,(1 + \boldsymbol{r})^t\,(1 + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{x}} \quad P_x$$

Remplaçons $\mathrm{N_t}$ par son expression donnée par (V), on aura:

$$\mathrm{N_t} = f_x \; N_t(1 + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{x}} \quad \mathrm{P}_x$$

En simplifiant les $N_{\,t}$ on aura:

$$\sum_{15}^{49} f_x \;(1 + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{x}} \quad \mathrm{P}_x \qquad = 1$$

Telle est la célèbre loi d'une population stable.

Et comme $(1 + \boldsymbol{r}\,)^{-\boldsymbol{x}} \;\; = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{xr}}$

Finalement on aura:

$$\sum_{15}^{49} f_x \;\; \mathrm{P}_x \qquad \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{xr}} = 1$$

L'équation montre ainsi comment une trajectoire de naissance exponentielle est perpétuée par une fécondité et une mortalité spécifiques. La réalisation que les taux vitaux constants donnent une population qui se développe de façon exponentielle, mais maintient une composition d'âge constante est probablement la plus profonde compréhension de la démographie mathématique (Robert Schoen.2009. p760).

Cette formule peut être vérifiable comme suit:

Soit les données suivantes :

$$\begin{cases} \mathrm{r} = 0.012 \\ \text{fx (taux de fécondité : colonne 2)} \\ \text{Px( probabilité de survie :colonne3)} \end{cases}$$

**Tableau 2 : Caractéristiques d'une population stable**

| Age | Fx | $P_x$ | $1+\mathbf{r}$ | $(1+\mathbf{r})^{-x}$ | $f_x$ $P_x$ | $(1+\mathbf{r})^{-x}\mathbf{f_x}$ $P_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15-19 | 0.114 | 0.938 | 1.012 | 0.8115 | 0.1069 | 0.0867 |
| 20-24 | 0.323 | 0.924 | 1.012 | 0.7646 | 0.2984 | 0.2281 |
| 25-29 | 0.341 | 0.908 | 1.012 | 0.72033 | 0.3096 | 0.2230 |
| 30-34 | 0.312 | 0.893 | 1.012 | 0.6786 | 0.2786 | 0.1890 |
| 35-39 | 0.287 | 0.879 | 1.012 | 0.6393 | 0.2522 | 0.1612 |
| 40-44 | 0.153 | 0.869 | 1.012 | 0.6023 | 0.1325 | 0.0798 |
| 45-49 | 0.068 | 0.851 | 1.012 | 0.5674 | 0.0579 | 0.0328 |
| Total | ISF=7.99 | | | | 7.18 | 1 |

Ainsi, le tableau ci –dessus illustre clairement que la somme de $(1+\mathbf{r})^{-x}\mathbf{f_x}$ $P_x$ égale 1 ce qui montre que la population en question tend vers la stabilité .On constate également que :

- l'indice synthétique de fécondité ISF = la somme des taux de fécondité =7.99 enfants par femme (colonne 2).
- le taux brut de reproduction TBR = $0.488\sum_{15}^{49} fx$ = 0.488* 7.99=3.89 filles par femme.
-le taux net de reproduction TNR = $0.488\sum_{15}^{49} fx$=0488 *7.18 =3.5 filles par femme.

**Remarque :**

On n'observe plus de populations réelles qui soient parfaitement stables. Celles-ci sont une construction théorique obtenue en appliquant n'importe quelle population de départ des lois de mortalité et de fécondité qui demeurent invariables dans le temps (André Lambert.2013.p1).

Néanmoins, Il existe en fait beaucoup de populations réelles qui peuvent être qualifiées de semi-stables: par exemple, toutes les populations qui ont connu au cours de leur histoire passée des mouvements de mortalité et de fécondité constants, en l'absence de mouvements migratoires; c'était le cas de beaucoup de populations du Tiers-Monde . Avant le début du phénomène de transition démographique qui a vu les taux de mortalité et de fécondité baisser substantiellement. Il n'est pas interdit de penser qu'a l'avenir, on pourrait de nouveau voir émerger des populations semi-stables dans la mesure ou la fécondité, tombée à un bas niveau, oscillerait faiblement dans un contexte de déclin faible de la mortalité (André Lambert.2013.p1).

L'Algérie a vécu cette situation de la quasi stabilité de sa population au cours des années soixante et soixante- dix où les taux de fécondité et mortalité ont guère changés, engendrant une répartition par âge et un taux d'accroissement naturel de très faible variation.

Lotka a proposé un indicateur alternatif pour mesurer l'accroissement naturel d'une population. Il introduit d'abord la « longueur moyenne appelée 'a' d'une génération. C'est l'intervalle du temps entre deux générations » ( Jacques Véron.2008.p3).

Une estimation du taux *r* est obtenue à partir du taux net de reproduction $R_0$ compte tenu d'une relation approchée (Alfred J. Lotka . 1939.p149).

Pour enchainé, reprenant la formule fondamentale de la population stable :

$$\sum_{15}^{49} f_x \ \mathrm{P}_x \qquad \boldsymbol{e^{-xr}} = 1$$

On sait que la quantité ($\sum_{15}^{49} f_x$ $\mathrm{P_x}$) s'appelle le taux net de reproduction ( $\mathrm{R_0}$). On obtient ainsi $\sum_{15}^{49} \mathrm{R}_0 \boldsymbol{e^{-xr}} = 1$

On aura $\mathrm{R}_0 \sum_{15}^{49} \boldsymbol{e^{-xr}} = 1$ Or $\mathrm{R_0}$ est indépendant de la somme.

$$\mathrm{R}_0 \sum_{15}^{49} (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{x}} = 1$$

$$\sum_{15}^{49} (\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{-\boldsymbol{x}} = \frac{1}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{\mathbf{15}}} + \frac{1}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{\mathbf{16}}} + \cdots + \frac{1}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{r})^{\mathbf{49}}}$$

Cette dernière expression se rapproche de la quantité $(1 + r)^{-a}$
Où a est l'intervalle moyen entre les générations, il représente également l'âge moyen à la maternité (Accouchement). Il est situé auteur de 30 ans dans la plupart de société.
On aura

$$R_0 (1 + r)^{-a} = 1$$

Nous pouvons en déduire que :

$$R_0 = \frac{1}{(1 + r)^{-a}} = (1 + r)^a$$

Finalement nous obtenons la loi de Lotka:

$$r = \sqrt[a]{R_0} - 1$$

**Propriétés de la population stable**

**-Population d'âgé x (Px)**

$$tP_x = N_{t-x} \ p_x = N_0 (1 + \mathbf{r})^{t-x} \ p_{\mathbf{x}}$$
$$tP_x = N_0 \ (1 + \mathbf{r})^{\mathbf{t}} (1 + \mathbf{r})^{\mathbf{x}} p_x$$
$$tP_x = N_t \ (1 + \mathbf{r})^{-x} p_x \qquad \text{( I)}$$

**-Population totale( P)**

$$P = \sum_0^w tP_x = Nt \sum_0^w (1 + r)(1 + r)^{-x} P_x \ \text{( II)}$$

**-La proportion de l'effectif d'âge $x$ (C $x$) en temps t**

$$tC_x = \frac{Px}{P} = \frac{N_t \ (1 + r)^{-x} p_x}{N_t \sum (1 + r)^{-x} \ p_x}$$

$$tC_x = \frac{(1 + r)^{-x} p_x}{\sum (1 + r)^{-x} \ p_x}$$

C'est la même chose pour $C_x$ en temps t+1

$$(t + 1)C_x = \frac{N_{t+1} \ (1 + r)^{-x} p_x}{N_{t+1} \sum (1 + r)^{-x} \ p_x} = \frac{(1 + r)^{-x} p_x}{\sum (1 + r)^{-x} \ p_x}$$

On trouve

$(t + 1)C_x = C_x$ (III) Donc la répartition par âge est invariable.

**- Le taux brut de natalité ( TBN)**

$$TBN = \frac{N_t}{\sum_0^w P_x} = \frac{N_t}{N_t \sum (1+r)^{-x} P_x}$$

$$TBN = \frac{1}{\sum (1+r)^{-x} P_x} \quad \text{( IV)}$$

On a déjà vu que

$$tC_x = \frac{(1+r)^{-x} p_x}{\sum (1+r)^{-x}\, p_x}$$

$$tC_x = \left(\frac{1}{\sum (1+\mathbf{r})^{-\mathbf{x}}\, p_x}\right) \times (1+\mathbf{r})^{-x} p_x$$

Nous pourrons alors conclure que : $\mathrm{tC_x} = \mathrm{TBN}(1+\mathrm{r})^{-\mathrm{x}} P_x$

## III- Le modèle stationnaire

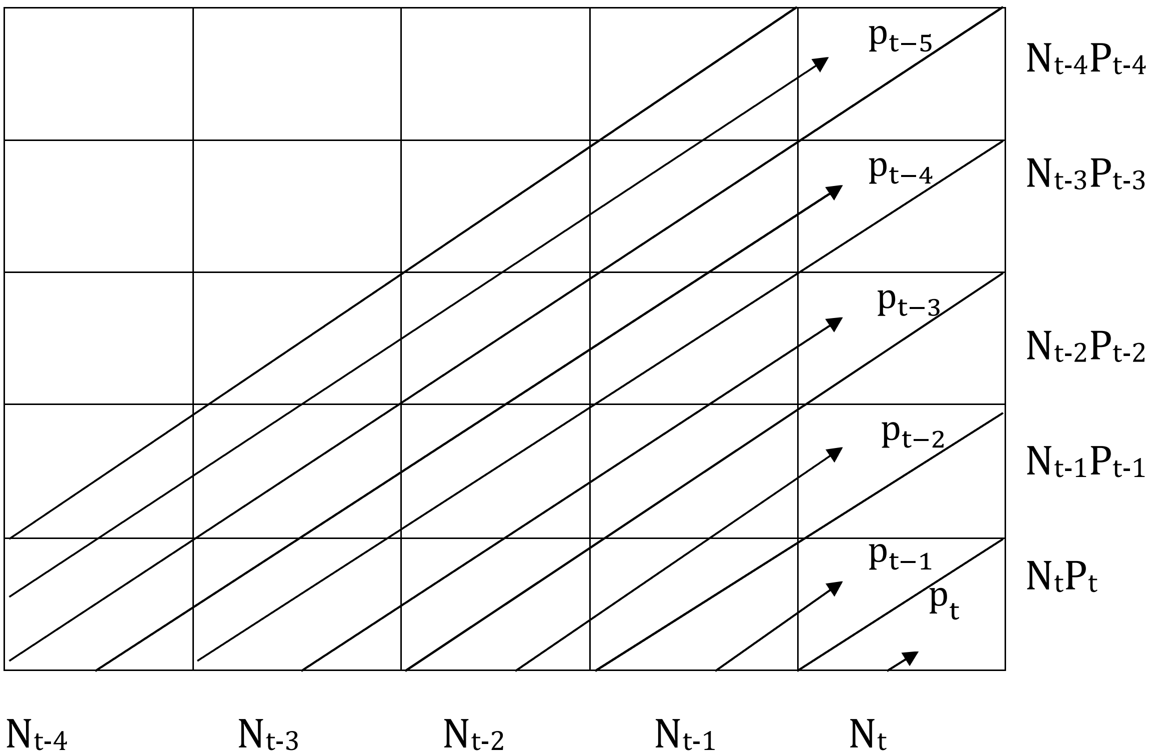
Une population stationnaire est une population stable à taux d'accroissement nul. Pour chaque unité de temps, le nombre de naissances est égal au nombre de décès. Dans une population stationnaire, non seulement la structure par âge est invariable, mais le nombre de naissance d’année en année est constant.

**Propriétés de la population stationnaire**

**-La population totale**

Soit $P_x$ la probabilité de survie et E l’effectif total de la population. Pour calculer l’effectif total, on pourra raisonner en s’appuyant sur la figure fournie par le tableau ci-dessous :

**Figure 2:Evolution d’une population**




On trouve:

$$E = (\mathrm{N_t} \times \mathrm{p_t}) + (\mathrm{N_{t-1}} \times \mathrm{p_{t-1}}) + (\mathrm{N_{t-2}} \times \mathrm{p_{t-2}}) + (\mathrm{N_{t-3}} \times \mathrm{p_{t-3}}) + \cdots$$

Par définition on a:

$$N_t = \mathrm{N_{t-1}} = \mathrm{N_{t-2}} = \mathrm{N_{t-3}} = \cdots = \mathrm{N_{t-n}}$$

On aura donc:

$$E = \mathrm{Nt}(\mathrm{p_t} + \mathrm{p_{t-1}} + \mathrm{p_{t-2}} + \mathrm{p_{t-3}} + \cdots)$$

$$\mathrm{p_t} = \frac{S_0 + S_1}{2S_0}$$

$$E = Nt(\frac{S_0 + S_1}{2S_0} + \frac{S_1 + S_2}{2S_0} + \frac{S_2 + S_3}{2S_0} + \frac{S_3 + S_4}{2S_0} + \cdots$$

$$E = Nt(\frac{S_0 + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 + 2S_5}{2S_0}$$

$$E = Nt\frac{2(0.5\ S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4)}{2S_0} = Nt\frac{0.5S_0 + S_1 + S_2 + S_3}{S_0}$$

$$\frac{0.5S_0 + S_1 + S_2 + S_3}{S_0} = \mathrm{e_0}(\text{espernece de vie à la naissance})$$

L’espérance de vie à la naissance est égale à la durée de vie moyenne d’une population fictive qui vivrait toute son existence dans les conditions de mortalité de l’année considérée. Cet indice ($e_0$) permet de quantifier les conditions de mortalité d’une année donnée.

Finalement on peut ecrire :

$$E = \mathrm{Ne_0} \quad (\mathrm{I})$$

- **Le TBN et le TBM**

Nous voyons immédiatement, que le taux de natalité, et le taux de mortalité sont donnés par:

$$TBN = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Ne_0}} = \frac{1}{\mathrm{e_0}}$$

Et

$$\mathrm{TBM} = \mathrm{TBN} = \frac{1}{\mathrm{e_0}} \quad (\mathrm{II})$$

Il en résulte que le taux brut de natalité et le taux brut de mortalité sont égaux entre eux et égaux à l’inverse de l’espérance de vie.

**-Effectif d’une sous population**

Soit Ea+ l’effectif de la population à l’âge a et plus

$$E_{a+} = \mathrm{N}(\mathrm{p_a} + \mathrm{p_{a+1}} + \mathrm{p_{a+2}} + \mathrm{p_{a+3}} + \mathrm{p_{a+4}} + \cdots)$$

$$E_{a+} = \mathrm{N}(\frac{\mathrm{s_a} + \mathrm{s_{a+1}}}{2\mathrm{S_0}} + \frac{\mathrm{s_{a+1}} + \mathrm{s_{a+2}}}{2\mathrm{S_0}} + \frac{\mathrm{s_{a+2}} + \mathrm{s_{a+3}}}{2\mathrm{S_0}} + \cdots)$$

$$E_{a+} = 2\mathrm{N}\left(\frac{0.5\mathrm{s_a} + \mathrm{s_{a+1}} + \mathrm{s_{a+2}} + \mathrm{s_{a+3}} + \cdots \ldots}{2\mathrm{s_0}}\right)$$

$$T_{a+}\ (\text{le nombre d'années vecues à l'age a}) =$$
$$0.5\mathrm{s_a} + \mathrm{s_{a+1}} + \mathrm{s_{a+2}} + \mathrm{s_{a+3}} + \mathrm{s_{a+4}} \ldots \ldots$$

L'espérance de vie à l'âge a ( $\boldsymbol{e_a}$ ) est alors donnée par :

$$e_a = \frac{\mathrm{T_a}}{\mathrm{S_a}} \rightarrow \mathrm{T_a} = \mathrm{e_a} \times \mathrm{s_a} \rightarrow \mathrm{T_a} = \mathrm{e_a} \times \mathrm{s_a}$$

L'équation objectif s'écrit donc :

$$P_{a+} = \frac{\mathrm{Nt} \times \mathrm{e_a s_a}}{\mathrm{S_0}} \qquad \text{(III)}$$

**Exemple** : calculons l'effectif des 20 âge et plus

$$E_{20+} = \mathrm{N}(\mathrm{p_{20}} + \mathrm{p_{21}} + \mathrm{p_{22}} + \mathrm{p_{23}} + \mathrm{p_{24}} + \cdots)$$

$$E_{20+} = \mathrm{N}(\frac{\mathrm{s_{20}} + \mathrm{s_{21}}}{2\mathrm{S_0}} + \frac{\mathrm{s_{21}} + \mathrm{s_{22}}}{2\mathrm{S_0}} + \frac{\mathrm{s_{22}} + \mathrm{s_{23}}}{2\mathrm{S_0}} + \cdots)$$

$$E_{20+} = \mathrm{N}\left(\frac{0.5\mathrm{s_{20}}+\mathrm{s_{21}}+\mathrm{s_{22}}+\mathrm{s_{23}}}{\mathrm{s_0}}\right)$$

$$T_{20} = 0.5\mathrm{s_{20}} + \mathrm{s_{21}} + \mathrm{s_{22}} + \mathrm{s_{23}}$$

$$e_x = \frac{\mathrm{T_x}}{\mathrm{S_x}} \rightarrow \mathrm{T_x} = \mathrm{e_x} \times \mathrm{s_x} \rightarrow \mathrm{T_{20}} = \mathrm{e_{20}} \times \mathrm{s_{20}}$$

Ce qui nous donne:

$$E_{20+} = \frac{\mathrm{N} \times \mathrm{e_{20} s_{20}}}{\mathrm{S_0}}$$

**Remarque**

Le taux net de reproduction dans une population stationnaire égale à 1, ainsi

$$r = \sqrt[a]{R_0} - 1$$

$$r = \sqrt[a]{1} - 1 = 0$$

Selon sa dernière révision (2017), The world population prospects estime que, l'Algérie devrait atteindre ce modèle de population en 2100. A cette date sa population se stagnera autour de 62.5 millions (United Nations.2017.p23).

## Conclusion

Pour conclure, l'étude nous a permis de constater comment une population se développe de façon exponentielle si elle est soumise à un taux d'accroissement naturel positif et fluctuant, ce que nécessite une trajectoire de naissance et de mortalité spécifiques. Elle peut se doubler, ou tripler en fonction de la grandeur de ce taux. On note cependant que le taux net de reproduction $R_0$ caractérisera l'importance de la croissance de toute population. Il indique combien de filles vont remplacer une femme, donc à quel rythme les «générations se renouvellent ».

On a vu ensuite les calculs permettant d'aboutir à la population stable et la population stationnaire et leurs conceptualisations. Ainsi, afin de parvenir à une population stable, il est nécessaire de développer des hypothèses plus complexes et restrictives que celles développées pour une population stationnaire. Il s'agit d'impliquer les taux de fécondité qui devraient être constants , et de remplacer l'hypothèse du nombre de naissances constant par une augmentation à un rythme constant d'une année à l'autre au cours de la stabilité de la population. En outre la répartition par âge est invariable, et le taux d'accroissement naturel (r) doit être constant et déférent de zéro, contrairement à celui qui caractérise la population stationnaire où le taux de natalité est égal à celui de mortalité.

Ces considérations montrent donc avec évidence que nos réflexions ne s'arrêtent pas là, étant donné que les réponses à nos problématiques soulèvent d'autres questions pertinentes, notamment celles relatives à l'histoire et les perspectives d'évolution de la population algérienne compte tenu de ce qui précède, en sachant que très peu d'écrits avaient été produits dans cette étendue en Algérie. Ces questions pourront être approfondies lors de recherches ultérieures.

## Références

1- Alfred J. Lotka (1939). Theorie analytique des associations biologiques, deuxième .partie Hermann. Paris.

2-André Lamber (2013). De la singularité de la répartition par âge de toute population stable. août 2013. asbl ADRASS. Belgique.

3- Calot Gérard, Sardon J.-P (2001). Fécondité, reproduction et remplacement. Les mesures longitudinales du remplacement. In Population, 56 année, n°3, INED. Paris.

4- Daniel Courgeau, Robert Franck (2007). La démographie, science constituée ou en voie de Constitution ? Esquisse d'un programme. In population 2007 Vol. 62 . INED. Paris.

5- George Tapinos et al (1991) .Conséquences de la croissance démographique rapide dans les pays en développement : INED .Paris.

6-Leonhard Euler (1760).Recherche sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Histoire de l'académie Royale des sciences et belles lettres.

7- Louis Henry . Paul Vincent (1947). Rythme maximum d'accroissement d'une population stable .In Population Année 1947. .N 4. INED . Paris.

8- Jacques Véron (2008). Alfred J. Lotka and the Mathematics of Population. In Electronic Journal for History of Probability and Statistics. Vol N1. Paris.

9-Jane Menken et al (1995). Population Modèles démographiques : les cinquante premières années de Population. In population. 50 année, n°6. 1995 INED .Paris

10-Jean Bourgeois –Picha (1994). La dynamique des population . INED.Paris. PUF.

11-Jean-Luc Chabert & al(1993). Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce, Editions Belin. Paris.

12- Office National des Statistiques (2016) . Démographie algérienne .N740 . Alger.

13-Robert Schoe (2009). The metastable birth trajectory.In demographic research .Max Planck Institute for Demographic Research..volume 21, article 25, published 18 november. Rostock .Germany.

14- Shiva S Halli and K vaninadha rao (1992)..Advenced technique of population analyse. New York .DPPC.

15-Thomas Robert Malthus(1798). An essay on the principe of population. London .

16- United Nations. The world population prospects (2017). Department of Economic and Social Affairs Population Division. New York.