

« Élaboration d'un modèle pour l'estimation des probabilités de défaut par les chaînes de Markov en vue de la mise en place d'une stratégie optimale de provisionnement au sein des banques Algériennes. »

A Model for estimating default probability by Markov chains in order to implementing an optimal provisioning strategy in Algerian banks.

Dr. Sid-Ahmed MOKHTARI^{*1} Dr. Khaled HAMIDI²

¹Maître de conférences « A » à l'ENSSEA. Email: msido70@yahoo.fr

²Maître de conférences A, à l'ENSSEA Email: issemiw@gmail.com

Date de réception: 2022-03-15 Date de révision: 2022-03-25 Date d'acceptation: 2022-05-27

Résumé

Résumé

En mettant à profit la réglementation algérienne concernant le provisionnement des créances calculés en grande partie selon Bâle I, l'objectif de cette étude est l'élaboration d'un modèle de risque de crédit permettant aux banques l'estimation des probabilités de défaut de leurs emprunteurs par le biais d'une modélisation des migrations pluriannuelles des classes de créances basée sur les chaînes de Markov.

L'application du modèle sur un portefeuille de 705 clients ayant contracté des crédits immobiliers et des crédits d'investissement auprès de la Banque Nationale d'Algérie « BNA » nous a permis la constitution des provisions économiques ajustées au risque et couvrant la perte attendue sur le portefeuille.

Mots clés : Probabilité de défaut ; classement des créances, Chaînes de Markov ; Matrices de transition ; Provisionnement des créances.

Abstract

Abstract

By taking advantage of the Algerian regulations concerning the provisioning of receivables calculated largely according to Basel I, the objective of this study is the development of a credit risk model allowing banks to estimate the probability of default of their borrowers through a modeling of multi-year migrations of debt classes based on Markov chains.

The application of the model on a portfolio of 705 customers having contracted real estate loans and investment loans with the National Bank of Algeria "BNA" allowed us to constitute risk-adjusted economic provisions and covering the expected loss in credit loans portfolio.

Keywords: Default probability; ranking of claims, Markov chains; Transition matrices; Provisioning the loans.

***corresponding author**

Introduction:

Le traitement des créances impayées impose aux banques une gestion proactive des risques leur permettant d'assurer une visibilité en termes d'évolution des créances détenues dans leurs bilans. Toutefois, les banques algériennes ne se sont pas encore ajustées à ces outils puisque l'étude de la réglementation prudentielle montre que ces établissements financiers continuent à appliquer, dans la majorité des cas, les règles et recommandations du premier accord de Bâle. Dans cette perspective, nous essayerons d'élaborer un modèle en vue d'anticiper une stratégie de provisionnement optimale d'un portefeuille de créances bancaires et permettre, ainsi, d'estimer les probabilités de défaut des emprunteurs afin de mesurer, in fine, les pertes auxquelles sont exposées les banques sur un horizon donné. Dans cet article, nous tenterons de répondre à la question suivante : « Comment peut-on estimer la probabilité de défaut et prévoir ainsi une stratégie de provisionnement optimale en vue d'atténuer le risque de perte sur un portefeuille de créances bancaire ? ».

Le phénomène traité est celui de la migration entre les classes de créances préalablement provisionnées qui sera modélisée sur la base des « chaîne de Markov ». Le risque encouru sur un client est calibré à travers la capacité de la créance à migrer d'une classe de risque à l'instant t vers une autre classe plus risquée à l'instant $t + 1$.

1. Modélisation du risque de crédit

La modélisation du risque de crédit a comme principal objectif l'estimation quantitative de la probabilité de défaut de l'emprunteur. Le modèle élaboré doit être testé par le biais d'un monitoring et d'ajustements afin de démontrer sa capacité prédictive. Le risque de crédit présenté par une contrepartie dépend de nombreux facteurs qui lui sont endogènes ou exogènes. Ces derniers changent en permanence et le niveau de risque est susceptible de varier dans un sens ou dans l'autre¹. Le modèle doit donc être appliqué en continu ou avec une fréquence élevée. Le risque doit faire l'objet d'une mise à niveau ce qui signifie que le modèle doit logiquement être alimenté de toute évolution des données traitées, permettre un calcul immédiat et informer ses utilisateurs des variations de niveau de risque.

¹ On parle de *downgrading* en cas de dégradation du risque et d'*upgrading* en cas d'amélioration.

Dans notre cas nous avons opté pour un modèle de migration qui permet leurs affectations à une classe de risque appelée un rating. La finalité de notre modèle est d'arriver à constituer les provisions suffisamment nécessaires à la couverture des pertes attendues, ce qui permettra à la banque d'éviter une immobilisation importante des fonds constitués en provision et impacter, ainsi, sa stratégie de financement par ailleurs.

2. Construction d'un modèle basé sur les « chaînes de Markov »

Lorsqu'il s'agit de formaliser un problème par un modèle quantitatif, le but est de trouver une description suffisamment réaliste en exploitant les techniques de calcul dont on dispose. La modélisation est une simplification de la réalité, qui vise à la reproduire afin de mieux en connaître ses aspects. Les chaînes de Markov permettent de définir l'état d'un système à un instant t uniquement à partir d'un certain nombre de ses états précédents.

3.1. Définition d'une chaîne de Markov

Une Chaîne de Markov est une suite de variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aléatoires qui peuvent admettre un certain nombre d'états e_i différents dans l'espace E . L'état change au cours du temps discret sous forme de transition d'un état vers un autre. A chaque changement, le nouvel état est choisi avec une distribution de probabilité fixée au préalable, et ne dépendant que de l'état présent. Autrement dit, Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans un ensemble dénombrable E est une Chaîne de Markov d'espace d'états E si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $(X_0, X_1, \dots, X_{k+1})$ dans E on a :

$$\{P(X_k = e_k, \dots, X_0 = e_0) > 0$$

$$\{P(X_{k+1} = e_{k+1} / X_k = e_k, \dots, X_0 = e_0) = P(X_{k+1} = e_{k+1} / X_k = e_k)$$

La chaîne est dite homogène si on a, de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i, j \in E$ on a :

$$P(X_{k+1} = j / X_k = i) = P(X_1 = j / X_0 = i) = P_{ij}$$

Avec P_{ij} est la probabilité de transition de l'état i vers l'état j .

3.2. Formulation du problème

Selon la réglementation de la Banque d'Algérie², une créance peut être classée, selon son degré de risque, dans quatre catégories distinctes notées C_0 : Créance courante ; C_1 : Créance à problèmes potentiels ; C_2 : Créance très risquée ; C_3 : Créance compromise.

²Règlement banque d'Algérie n°14-03 du 16 février 2014 modifiant et complétant l'Instruction N°74-94 du 29 novembre 1994.

Les établissements de crédit ont l'obligation de constituer des provisions afin de couvrir le risque inhérent de chaque créance. Le provisionnement des crédits accordés est en fonction des taux suivants : 1 à 3% pour les créances courantes, 20% pour une créance à problèmes potentiels, 50% si la créance est très risquée et 100% si la créance est compromise.

Le système de provisionnement mis en place par la Banque d'Algérie est un provisionnement en ex-post, ceci signifie que les pertes ne sont enregistrées qu'après être intervenues, le risques de crédit apparait souvent trop tard dans le système comptable. Au fil du temps, une créance peut migrer d'une classe vers une autre ou rester sur sa classe initiale, ce phénomène peut être assimilé à un processus markovien. On définit une suite de variable aléatoire N_t avec $t \in T$ définit sur un espace d'état discret E fini dénombrable $E = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$. L'état change au cours du temps discret T et à chaque changement, le nouvel état est choisi avec une distribution de probabilité et ne dépend que de l'état présent. C'est-à-dire :

$$P(N_t = C_j / N_0, N_1, \dots, N_{t-1}) = P(N_t = C_j / N_{t-1} \in C_j)$$

3.3. Probabilité de transition et matrice de transition

Soit T_t la table de transition en termes de nombre dont les éléments notés $n_{c_i c_j}$ représentent le nombre de créances classées C_i en $t - 1$ puis classées en C_j en t avec C_i et $C_j \in E$.

$$T_t = \begin{pmatrix} n_{c_0 c_0} & n_{c_0 c_1} & n_{c_0 c_2} & n_{c_0 c_3} \\ n_{c_1 c_0} & n_{c_1 c_1} & n_{c_1 c_2} & n_{c_1 c_3} \\ n_{c_2 c_0} & n_{c_2 c_1} & n_{c_2 c_2} & n_{c_2 c_3} \\ n_{c_3 c_0} & n_{c_3 c_1} & n_{c_3 c_2} & n_{c_3 c_3} \end{pmatrix}$$

Les éléments de la diagonale, c'est-à-dire les $n_{c_i c_j}$ avec $i = j$ représente le nombre de créances qui n'ont pas changé de classe pendant la période $t - 1$ à t ; Les éléments en dessous de la diagonale, c'est-à-dire les $n_{c_i c_j}$ avec $i > j$ représente le nombre de créances qui ont changé de classe en amélioration vers une classe moins risquée sur la période de $t - 1$ à t ;

Les éléments en dessus de la diagonale, c'est-à-dire les $n_{c_i c_j}$ avec $i < j$ représente le nombre de créances qui ont changé de classe en dégradation vers une classe plus risquée sur la période de $t - 1$ à t ;

La somme des éléments d'une ligne représente le nombre de créances classées C_i en $t - 1$; $\sum_{j=0}^3 n_{c_i c_j} = N_{c_i}^{(t-1)}$ Avec $N_{c_i}^{(t-1)}$ = nombre de

créances classées C_i en en $t - 1$. La somme des éléments d'une colonne représente le nombre de créances classées C_i en $t : \sum_{i=0}^{i=3} n_{c_i c_j} = N_{c_j}^{(t)}$ Avec $N_{c_j}^{(t)}$ le nombre de créances classées C_i en t . Une fois les tables de transition élaborées, on passe à la construction des matrices de transition stochastiques M_t indiquant la probabilité de transition d'un état à un autre sur la période $t - 1$ à t . Ces matrices de transition peuvent être calculées par la méthode dite des cohortes, elle consiste à faire le rapport entre le nombre de passage d'une classe C_i à une classe C_j sur la période allons de $t - 1$ à t et le nombre créances classées C_i en $t - 1 : P_{C_i C_j} = \frac{n_{c_i c_j}}{N_{c_i}^{(t-1)}}$

Les matrices de transition M_t se présentent comme suit :

$$M_t = \begin{pmatrix} P_{C_0 C_0} & P_{C_0 C_1} & P_{C_0 C_2} & P_{C_0 C_3} \\ P_{C_1 C_0} & P_{C_1 C_1} & P_{C_1 C_2} & P_{C_1 C_3} \\ P_{C_2 C_0} & P_{C_2 C_1} & P_{C_2 C_2} & P_{C_2 C_3} \\ P_{C_3 C_0} & P_{C_3 C_1} & P_{C_3 C_2} & P_{C_3 C_3} \end{pmatrix}$$

Avec $P_{C_i C_j} = P(N_t = C_j / N_{t-1} = C_i)$

L'ensemble des éléments de ces matrices sont des probabilités conditionnelles. Chacune des lignes de ces matrices constitue une distribution d'une loi de probabilité ce qui implique que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

$$\begin{cases} 0 \leq P_{C_i C_j} \leq 1 & \forall i, j \in E \\ \sum_{i \in E} P_{C_i C_j} = 1 \end{cases}$$

3.4. Graphique de transition

Ces matrices peuvent être illustrées graphiquement en mettant en évidence la relation de transition entre les états. Les sommets du graphe sont les différents états du processus, on associe à chaque transition possible entre eux une flèche orientée et affectée d'une probabilité de transition.

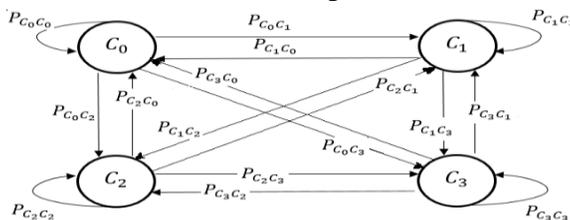


Figure N° 1. Illustration graphique des transitions entre les classes de risque.

3.5. La distribution future de la probabilité des états

L'analyse du régime transitoire d'une chaîne de Markov à temps discret consiste à déterminer le vecteur $\pi^{(t)}$ des probabilités d'état à l'instant t :

$$\pi^{(t)} = [\pi_{C_0}^{(t)}, \pi_{C_1}^{(t)}, \pi_{C_2}^{(t)}, \pi_{C_3}^{(t)}]$$

$$\pi^{(t)} = [p(N_t = C_0), p(N_t = C_1), p(N_t = C_2), p(N_t = C_3)]$$

Ce vecteur dépend de la distribution initiale $\pi^{(0)}$ et des matrices de transition M_t . On dit que les matrices M_t sont homogènes si : $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ avec $n \in T$. Si les matrices M_t sont homogènes et égales à M on aura : $\pi^{(n)} = \pi^{(0)}M^n$. Pour une chaîne inhomogène qui est caractérisée par sa distribution initiale $\pi^{(0)}$ et par une suite de matrices de transition M_1, M_2, \dots, M_n dépendantes du temps t c'est-à-dire pour chaque période on a une matrice de transition différente on aura : $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \times M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ Avec M_n : la matrice de transition de la période n . Le modèle construit dans cette section est une formulation mathématique du phénomène de migration des créances entre les classes de risque, il peut être exploité comme un outil de gestion de risque au sein des banques algériennes dans afin d'évaluer le risque de passage d'un client d'une C_i vers une autre classe C_j avec j supérieur à i (risque de dégradation) donné par les matrices de transition.

3. Application sur un portefeuille de créances

L'étude empirique porte sur un portefeuille constitué de 705 créances détenues par la Banque Nationale d'Algérie sur des clients particuliers ayant un besoin de financement pour un projet immobilier ou un projet d'investissement dans le cadre des dispositifs de l'Etat (ANSEJ, CNAC, ANGEM). La sélection des créances s'est effectuée sur une base de données physique, disponible et fiable. Nous avons subdivisé notre portefeuille en deux parties, d'une part, les crédits d'investissement et de l'autre part les crédits immobiliers. Ce choix est dû aux comportements différents entre les deux types de créance, à la différence des profils des emprunteurs (particuliers et investisseurs) et à la maturité des crédits qui sont à long terme pour les crédits immobiliers et à moyen terme pour les crédits d'investissement.

3.1. Élaboration des matrices de transition

3.1.1. Table de transition à un horizon d'un an

En exploitant les données de notre portefeuille nous pouvons construire trois tables de migration en termes de nombre, chacune démontre les passages des créances d'une année à l'année suivante. Une table de transition T_t est un tableau de contingence constitué des éléments $n_{C_i C_j}$ qui représentent le nombre de passage d'une classe C_i à une classe C_j sur la période de $t - 1$ à t avec C_i et $C_j \in E$. E est un espace d'état discret, fini et dénombrable : $E = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$

- **Table de transition pour les crédits d'investissement en nombre :**

	2011 – 2012	2012 – 2013	2013 – 2014
	C_0 C_1 C_2 C_3	C_0 C_1 C_2 C_3	C_0 C_1 C_2 C_3
$T_{2012}^{invest} =$	$\begin{pmatrix} C_0 & 249 & 53 & 31 & 14 & 347 \\ C_1 & 15 & 8 & 8 & 13 & 44 \\ C_2 & 10 & 7 & 3 & 19 & 39 \\ C_3 & 3 & 2 & 1 & 6 & 12 \\ \hline & 277 & 70 & 43 & 52 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} C_0 & 216 & 34 & 27 & 0 & 277 \\ C_1 & 25 & 16 & 11 & 18 & 70 \\ C_2 & 10 & 6 & 11 & 16 & 43 \\ C_3 & 14 & 5 & 10 & 23 & 52 \\ \hline & 265 & 61 & 59 & 57 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} C_0 & 200 & 23 & 26 & 16 & \\ C_1 & 25 & 8 & 6 & 22 & \\ C_2 & 19 & 6 & 9 & 25 & \\ C_3 & 19 & 8 & 6 & 24 & \\ \hline & 263 & 45 & 47 & 87 & \end{pmatrix}$

Il est à noter que dans une table T_t la somme des éléments de la ligne C_i correspond au nombre de créances classées C_i en début de période tandis que la somme des éléments de la colonne C_j correspond au nombre de créances classées C_j en fin de période. En revanche, le nombre des créances qui ont eu une amélioration de classement (les éléments au-dessous de la diagonale) est en hausse sur toute la période, entre 2011 et 2012 il était de 38 puis il passe 70 entre 2012 et 2013 puis à 83 pour la période 2013-2014. Ceci peut s'expliquer d'une part par l'amélioration de la situation financière des PME qui coïncide avec l'amélioration de la situation économique du pays et d'autre part par la bonne volonté des clients. Par ailleurs, le nombre de crédits qui ont une stagnation dans le classement (représenté par la somme de la diagonale de chaque table) est de l'ordre de 266 pour les deux premières tables puis il passe à 241 sur la période 2013-2014.

Table de transition pour les crédits immobiliers en nombre :

2011 – 2012		2012 – 2013		2013 – 2014	
$C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3$		$C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3$		$C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3$	
$T_{2012}^{immob} =$	$C_0 \begin{pmatrix} 198 & 21 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 232 \\ 13 \\ 12 \\ 6 \end{matrix}$	$T_{2013}^{immob} =$	$C_0 \begin{pmatrix} 184 & 13 & 9 & 1 \\ 16 & 3 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 207 \\ 28 \\ 9 \\ 19 \end{matrix}$	$T_{2014}^{immob} =$	$C_0 \begin{pmatrix} 177 & 14 & 16 & 10 \\ 10 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 217 \\ 17 \\ 15 \\ 14 \end{matrix}$
	207 28 9 19		217 17 15 14		198 20 18 27

Le nombre de créance ayant eu une amélioration de classement est de 14 créances pour la première table, ensuite pour la deuxième table entre 2012 et 2013 il y a eu une augmentation vers 35 créances, puis on a enregistré une diminution sur la troisième table à 26 créances.

En outre, les créances qui ont eu une stabilité dans leur classement sont en diminution sur toute la période soit 206 créances au début de la période, puis 195 créances entre 2012 et 2013 pour finir à 187 créances entre 2013 et 2014.

L'analyse de ces tables de transition nous permet de dire que le risque auquel la banque est confrontée est résumé sur la partie supérieure de la diagonale, la somme de ces éléments nous donne le nombre de créance en dégradation dans la note, c'est-à-dire le passage d'une classe C_i à une classe C_j avec $j > i$.

Le montant des provisions constituées par la banque est largement supérieur au montant des impayés constatés. Ces remarques ne peuvent que nous confirmer l'utilité d'un modèle d'identification du risque, d'anticipation de la perte et de suivi des clients.

3.1.2. Matrice de transition stochastique à un horizon de 1 an

Le risque de transition est modélisé par une probabilité conditionnelle $P_{C_i C_j} = P(N_t = C_j / N_{t-1} = C_i)$ issue de la théorie sur les Chaînes de Markov sous l'hypothèse que toute l'information passée est résumée en $(t - 1)$. Ces probabilités sont les probabilités conditionnelles $P_{C_i C_j} = P(N_t = C_j / N_{t-1} = C_i)$ avec i et j prennent des valeurs de 0 à 3. On aura :

$$P_{C_i C_j} = \frac{n_{C_i C_j}}{N_{C_i}^{(t-1)}}$$

$N_{C_i}^{(t-1)}$ = nombre de créances classées C_i en $t - 1$ (la somme de la ligne i de la table T_t). Une matrice de transition sur un an nous donne une synthèse

des changements intervenus sur le classement des créances des emprunteurs entre le début et la fin de l'année.

– *Matrice de transition stochastique pour les crédits d'investissement*

Les probabilités de migration d'une catégorie de créance à une autre sont rassemblées dans les matrices de transition suivantes :

$$M_{2012}^{invest} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2011 - 2012 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2012 \\ 2013 \\ 2014 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.72 & 0.15 & 0.09 & 0.04 \\ 0.34 & 0.18 & 0.18 & 0.30 \\ 0.25 & 0.18 & 0.08 & 0.49 \\ 0.25 & 0.17 & 0.08 & 0.50 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_{2013}^{invest} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2012 - 2013 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2012 \\ 2013 \\ 2014 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.78 & 0.12 & 0.10 & 0.00 \\ 0.36 & 0.23 & 0.16 & 0.25 \\ 0.23 & 0.14 & 0.26 & 0.37 \\ 0.27 & 0.10 & 0.19 & 0.44 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_{2014}^{invest} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2013 - 2014 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2012 \\ 2013 \\ 2014 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.75 & 0.09 & 0.10 & 0.06 \\ 0.41 & 0.13 & 0.10 & 0.36 \\ 0.32 & 0.10 & 0.15 & 0.43 \\ 0.33 & 0.14 & 0.10 & 0.42 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

– *Matrice de transition stochastique pour les crédits immobiliers :*

$$M_{2012}^{immob} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2011 - 2012 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2012 \\ 2013 \\ 2014 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.85 & 0.09 & 0.03 & 0.03 \\ 0.38 & 0.31 & 0.00 & 0.31 \\ 0.33 & 0.25 & 0.00 & 0.42 \\ 0.00 & 0.00 & 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_{2013}^{immob} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2012 - 2013 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2012 \\ 2013 \\ 2014 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.89 & 0.06 & 0.04 & 0.01 \\ 0.57 & 0.11 & 0.11 & 0.21 \\ 0.56 & 0.11 & 0.22 & 0.11 \\ 0.63 & 0.00 & 0.05 & 0.32 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_{2014}^{immob} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2013 - 2014 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2012 \\ 2013 \\ 2014 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.82 & 0.06 & 0.07 & 0.05 \\ 0.59 & 0.06 & 0.06 & 0.29 \\ 0.40 & 0.27 & 0.07 & 0.27 \\ 0.36 & 0.07 & 0.00 & 0.57 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Toutes ces matrices sont des matrices stochastiques car elles respectent les deux conditions suivantes : Chaque élément de chaque matrice est compris entre 0 et 1 et la somme de chaque ligne est égale à 1.

Chaque élément de ces matrices est un croisement entre une ligne et une colonne et renseigne sur la probabilité de migration sur une année. La probabilité $P(N_t = C_i / N_{t-1} = C_i)$ est appelée probabilité de retour, si elle est égale à 1 on dit que l'état C_i est absorbant, si la probabilité de retour est strictement inférieure à 1 on dit que l'état C_i est transitoire.

Nous remarquons que les crédits immobiliers sont plus stables et plus performants que les crédits d'investissement.

3.1.3. Les vecteurs des probabilités d'état

Le vecteur des probabilités d'état noté $\pi^{(t)} = [\pi_{C_0}^{(t)}, \pi_{C_1}^{(t)}, \pi_{C_2}^{(t)}, \pi_{C_3}^{(t)}]$ est un vecteur dont chaque composante $\pi_{C_i}^{(t)}$ représente la probabilité que le système est dans l'état C_i au moment t . Les composantes des vecteurs peuvent être calculées à partir des tables de migration avec la formule suivante :

$$\pi_{C_j}^{(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{i=3} n_{C_i C_j}}{N} \quad (t = 0, 1, 2)$$

$\sum_{i=0}^{i=3} n_{C_i C_j}$: est la somme des éléments de la colonne j

N : est le nombre total des créances $N = \sum_{i=0}^{i=3} \sum_{j=3}^{j=3} n_{c_i c_j}$. La somme de toutes les entrées d'un vecteur de probabilités d'état est égale à l'unité : $\sum_{i=0}^{i=3} \pi_{C_i}^{(t)} = 1$. En faisant les calculs nécessaires on trouve les vecteurs des probabilités d'état pour les crédits d'investissement:

$$\begin{aligned}\pi_{invest}^{(2013)} &= (0.60 \quad 0.14 \quad 0.13 \quad 0.13) \\ \pi_{invest}^{(2014)} &= (0.59 \quad 0.10 \quad 0.11 \quad 0.20)\end{aligned}$$

- Les vecteurs des probabilités d'état pour les crédits immobiliers:

$$\begin{aligned}\pi_{immob}^{(2013)} &= (0.83 \quad 0.06 \quad 0.06 \quad 0.05) \\ \pi_{immob}^{(2014)} &= (0.75 \quad 0.08 \quad 0.07 \quad 0.10)\end{aligned}$$

Remarque : Si $\pi^{(t)}$ et $\pi^{(t+1)}$ deux vecteurs de probabilité d'état consécutifs d'une Chaîne de Markov avec une matrice de transition M_{t+1} alors :

$$\pi^{(t+1)} = \pi^{(t)} M_{t+1}$$

3.1.4. Matrice de transition à un horizon supérieur à un an

En utilisant les matrices de transition à l'horizon d'un an on peut calculer les matrices de transition à l'horizon 2 ans et 3 ans en utilisant la loi des probabilités totales comme suit :

$$\begin{aligned}P(N_{t+2} = C_j / N_t = C_i) &= \frac{P(N_t = C_i, N_{t+2} = C_j)}{p(N_t = C_i)} \\ P(N_t = C_i, N_{t+2} = C_j) &= \sum_{k=0}^3 P(N_t = C_i, N_{t+1} = C_k \text{ et } N_{t+2} = C_j) \\ P(N_{t+2} = C_j / N_t = C_i) &= \frac{P(N_t = C_i) \sum_{k=0}^3 P_{C_i C_k} \times p_{C_k C_j}}{P(N_t = C_i)} \\ P(N_{t+2} = C_j / N_t = C_i) &= \sum_{k=0}^3 P_{C_i C_k} \times P_{C_k C_j}\end{aligned}$$

$P_{C_i C_k}$: est la probabilité de migrer de la catégorie C_i vers C_k entre t et $t + 1$.

$P_{C_k C_j}$: est la probabilité de migrer de la catégorie C_k vers C_j entre $t + 1$ et $t + 2$

Prenant l'exemple de la probabilité qu'une créance sera classée dans la catégorie C_0 en $t + 2$ sachant qu'en t elle était classée dans la catégorie des créances à problème potentiel C_1 , elle aura quatre trajectoires possibles sur les deux ans comme le montre le schéma suivant :

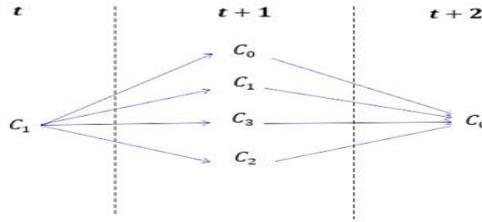


Figure 2 : Exemple d'une trajectoire pour une transition sur deux ans.

Ceci revient à faire la multiplication des matrices de transition successives.

On note S_h la matrice de transition à l'horizon h . On aura :

$$\begin{aligned} S_1 &= M_{2012} \\ S_2 &= M_{2012} \times M_{2013} \\ S_3 &= M_{2012} \times M_{2013} \times M_{2014} = S_2 \times M_{2014} \\ S_h &= S_{h-1} \times M_{2011+h} \end{aligned}$$

En faisant le calcul nécessaire on trouve les résultats suivants :

- **Pour les crédits d'investissement**

$$S_2^{invest} = \begin{matrix} \text{2011 - 2013} \\ \begin{pmatrix} 0.646 & 0.139 & 0.125 & 0.090 \\ 0.453 & 0.137 & 0.165 & 0.245 \\ 0.413 & 0.130 & 0.167 & 0.290 \\ 0.408 & 0.129 & 0.168 & 0.295 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad S_3^{invest} = \begin{matrix} \text{2011 - 2014} \\ \begin{pmatrix} 0.615 & 0.100 & 0.105 & 0.180 \\ 0.533 & 0.108 & 0.109 & 0.250 \\ 0.515 & 0.111 & 0.109 & 0.265 \\ 0.513 & 0.110 & 0.110 & 0.266 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- **Pour les crédits immobiliers**

$$S_2^{immob} = \begin{matrix} \text{2011 - 2013} \\ \begin{pmatrix} 0.843 & 0.067 & 0.055 & 0.035 \\ 0.712 & 0.057 & 0.066 & 0.165 \\ 0.702 & 0.048 & 0.063 & 0.187 \\ 0.606 & 0.037 & 0.109 & 0.248 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad S_3^{immob} = \begin{matrix} \text{2011 - 2014} \\ \begin{pmatrix} 0.762 & 0.075 & 0.07 & 0.093 \\ 0.700 & 0.079 & 0.060 & 0.161 \\ 0.693 & 0.078 & 0.059 & 0.170 \\ 0.648 & 0.088 & 0.054 & 0.209 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Lorsque les matrices de transition dépendent du temps t on dit que le processus est non homogène. Donc la déduction des probabilités de transition à divers horizons de la seule observation de la matrice à l'horizon d'un an est impossible. Pour confirmer l'hétérogénéité des matrices on doit procéder à un test statistique d'hypothèse.

3.1.5. Tests statistiques des résultats obtenus

3.1.5.1. Test d'indépendance de Khi-deux

Ce test permet de vérifier l'absence de lien statistique entre deux variables X et Y qualitatives. Les deux sont dites indépendantes lorsqu'il n'existe aucun lien statistique entre elles. On considère les deux variables qualitatives X et Y prenant leurs valeurs dans l'espace $E = \{C_0, C_1, C_2, C_3\}$.

La variable X représente le classement des créances à l'année $t - 1$. La variable Y représente le classement des créances à l'année t . Les hypothèses formulées sont :

$$\begin{cases} H_0 : \text{les deux variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \\ H_1 : \text{les deux variables } X \text{ et } Y \text{ sont liés.} \end{cases}$$

Le test est effectué sur le logiciel SPSS. Pour les crédits immobiliers entre les années 2011 et 2012 on a eu les résultats suivants :

Table N°1. Tableau croisé classe 2011 vs classe 2012

Effectif		Classe 2012				Total
		C0	C1	C2	C3	
Classe 2011	C0	249	53	31	14	347
	C1	15	8	8	13	44
	C2	10	7	3	19	39
	C3	3	2	1	6	12
Total		277	70	43	52	442

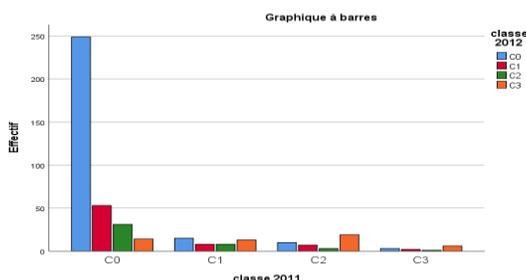
Table N°2. Tests du khi-carré

	Valeur	ddl	Signification
Khi-carré de Pearson	115,171 ^a	9	0
Rapport de vraisemblance	94,45	9	0
Nbre d'obs. valides	442		

a. 6 cellules (37,5%) ont un effectif théorique inférieur à 5. L'effectif théorique minimum est de 1,17.

Table N°3. Mesures symétriques

	Valeur	Signification
Nominal par Nominal	Phi 0,51	0
	V de Cramer 0,295	0



Le degré de liberté noté « ddl » dans le deuxième tableau correspond à :

$$(Nombre\ de\ lignes - 1) \times (Nombre\ de\ colonnes - 1) = 9$$

Dans le troisième tableau de la sortie du logiciel SPSS on voit bien que le seuil de signification est largement inférieur à 5% donc l'hypothèse H_0 est rejetée donc les deux variables X et Y sont liées. Autrement dit, le classement d'une créance pour une période dépend de son classement sur la période précédente.

3.1.5.2. Test d'homogénéité de khi deux

Sous l'hypothèse d'homogénéité, il est possible de déduire les probabilités de transition à horizon h de la simple connaissance des probabilités de transition à 1 an. Plus formellement, on dira qu'une dynamique suit un processus de Markov homogène si ³:

$$\begin{cases} H_0 : M_k = M_h \\ H_1 : M_k \neq M_h \end{cases} \quad \text{avec } k \neq h$$

Pour tester cet écart on fait appel à la statistique de khi-deux :

$$K = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{(N_{C_i}^{(k)} p_{(C_i, C_j)}^{(k)} - N_{C_i}^{(h)} p_{(C_i, C_j)}^{(h)})^2}{N_{C_i}^{(h)} p_{(C_i, C_j)}^{(h)}} \rightarrow \chi_{r-1}^2$$

Le r est le nombre de paramètres qui est de 16. Cette statistique suit une loi de khi deux de $(r - 1)$ de degrés de liberté⁴. Si le $K > \chi_{15}^2$ l'hypothèse H_0 est rejeté. Le χ_{15}^2 au seuil de 5% est égale à 24.995.

Matrices testées	Crédits immobiliers			Crédit d'investissement		
	M_{2012}^{immob} et M_{2013}^{immob}	M_{2013}^{immob} et M_{2014}^{immob}	M_{2012}^{immob} et M_{2014}^{immob}	M_{2012}^{invest} et M_{2013}^{invest}	M_{2013}^{invest} et M_{2014}^{invest}	M_{2012}^{invest} et M_{2014}^{invest}
Valeurs de K	136.47	44.71	106.23	81.12	40.14	36.07

Pour tous les tests effectués le $K > 24.995$ ce qui implique que l'hypothèse H_0 est rejetée. Le test d'homogénéité atteste que la migration des créances n'est pas homogène.

4. Estimation de la probabilité de défaut

Ce caractère d'hétérogénéité des matrices complique considérablement la tâche de prévision, afin de remédier à ce problème, On utilisera plusieurs méthodes issues de la théorie statistique.

4.1. Simulation des migrations futures des créances bancaires

³ Foulcher. S, Gouriéroux. C & Tiomo. A « La structure par termes des taux de défauts et ratings » Les Cahiers du CREF. 2004. Page 31

⁴ ELMEDAH. Y « notions essentielles de statistique : la méthode statistique tests relatifs aux fréquences et au khi-deux » livret 2/4. Page 37

4.1.1. Méthode de la moyenne :

L'idée est d'approximer la distribution de probabilité du phénomène de migration en calculant une matrice de transition moyenne entre les trois matrices disponibles qui fera office de prévision des transitions pour l'année 2015. On commence par la moyenne arithmétique historique entre les trois matrices calculées auparavant, on aura les vecteurs de probabilité d'état suivants :

- Pour les crédits d'investissement : $\bar{\pi}^{(2015)} = (0.57 \quad 0.13 \quad 0.11 \quad 0.19)$
- Pour les crédits immobiliers : $\bar{\pi}^{(2015)} = (0.75 \quad 0.09 \quad 0.05 \quad 0.11)$

La matrice \bar{M} se calcule comme suit : $\bar{M} = \alpha_1 \times M_1 + \alpha_2 \times M_2 + \alpha_3 \times M_3$ avec $\alpha_i = \frac{i}{\sum_{i=1}^3 i}$

Après calcul on trouve les vecteurs d'état des probabilités suivants :

- Pour les crédits d'investissement : $\bar{\pi}^{(2015)} = (0.58 \quad 0.12 \quad 0.11 \quad 0.19)$
- Pour les crédits immobiliers : $\bar{\pi}^{(2015)} = (0.75 \quad 0.08 \quad 0.06 \quad 0.11)$

4.1.2. Lissage exponentiel simple

Les méthodes de lissage exponentiel sont des méthodes de prévision à court terme et donnent un poids prépondérant aux valeurs récentes. Les coefficients de pondération décroissent exponentiellement en remontant dans le temps, en pratique on définit un coefficient de pondération $\omega \in]0; 1[$ et la prévision à l'instant $t + 1$ de la variable N_t est donnée par l'expression suivante : $\hat{y}_{t+1} = (1 - \omega)[y_t + \omega^1 y_{t-1} + \omega^2 y_{t-2} + \dots + \omega^{t-1} y_1]$

Dans notre cas on définit quatre variables, une variable pour chacune des classes de risque, et chaque variable $N_t^{C_i}$ représente le nombre de créance dans la classe C_i à la date t . Donc on cherche à calculer le vecteur :

$$\hat{N}^{2015} = (N_{C_0}^{2015} \quad N_{C_1}^{2015} \quad N_{C_2}^{2015} \quad N_{C_3}^{2015})$$

$$\text{Avec : } N_{C_i}^{2015} = (1 - \omega)[N_{C_i}^{2014} + \omega^1 N_{C_i}^{2013} + \omega^2 N_{C_i}^{2012} + \omega^3 N_{C_i}^{2011}]$$

Pour trouver le vecteur de probabilités d'état $\hat{\pi}^{(2015)}$ on divise \hat{N}^{2015} par le nombre total des créances. Pour un $\omega = 0.05$ on aura les résultats suivants :

- Pour les crédits d'investissement : $\hat{\pi}^{(2015)} = (0.60 \quad 0.10 \quad 0.11 \quad 0.19)$
- Pour les crédits immobiliers : $\hat{\pi}^{(2015)} = (0.76 \quad 0.08 \quad 0.07 \quad 0.09)$

4.1.3. Le model autorégressif

Le modèle autorégressif de chaîne de Markov permet de déterminer la distribution future du nombre de créance dans le cas où les matrices de transition sont inhomogènes. C'est un modèle introduit par Raftery (1985) et développé par A. Berchtold. Soit la variable aléatoire discrète N_t représentant le nombre de créances, N_t prend ses valeurs sur l'ensemble E ,

soit les états e_{t-1} et e_t définissant respectivement les périodes $t - 1$ et t d'une chaîne de Markov d'ordre k .

$$e_{t-1} = [N_{t-1} = i_1, N_{t-2} = i_2, \dots, N_{t-k+1} = i_{k-1}, N_{t-k} = i_k]$$

$$e_t = [N_t = i_0, N_{t-1} = i_1, \dots, N_{t-k+2} = i_{k-2}, N_{t-k+1} = i_{k-1}]$$

Avec $i_0, i_1, \dots, i_k \in E$. L'approximation autorégressive proposée consiste à écrire les probabilités de transition entre les états e_{t-1} et e_t comme :

$$P(N_t = i_0; \dots; N_{t-k+1} = i_{k-1} / N_{t-1} = i_1, \dots, N_{t-k} = i_k)$$

$$= P(N_t = i_0 / N_{t-1} = i_1, \dots, N_{t-k} = i_k)$$

$$\cong \alpha_1 P(N_t = i_0 / N_{t-1} = i_1) + \dots + \alpha_k P(N_t = i_0 / N_{t-k} = i_k)$$

$$\cong \alpha_1 p_{i_1 i_0} + \dots + \alpha_k p_{i_k i_0}$$

$$= \sum_{g=1}^k \alpha_g p_{i_g i_0}$$

Où les $p_{i_1 i_0}, \dots, p_{i_k i_0}$ sont des probabilités de transition appartenant à une matrice de probabilité de type ligne et $\sum_{g=1}^k \alpha_g = 1$.

Si l'on considère l'ensemble des valeurs possibles de la variable N_t à l'époque t , le vecteur des probabilités d'être dans chacun des états de E : $\hat{\pi}^{(t)} = \sum_{g=1}^k \alpha_g \pi^{(t-g)} S_g$. Où : S_g est la matrice d'ordre g . Nous pouvons remarquer que les vecteurs $\pi^{(t-g)}$ sont écrits sans chapeau, car la valeur de la variable N aux périodes $t - 1$ à $t - k$ est connue. Donc il nous reste à estimer les α_g avec $g = 1, \dots, k$ qui mesurent le poids des matrices S_g dans la modélisation.

α_g est un facteur assimilé au pouvoir prédictif d'une matrice de transition.

$PP(P) = \frac{(m \sum_j p_j^2)^{-1}}{m-1}$ Le pouvoir prédictif d'une distribution de probabilité.

$pp(k) = \sum_{i=1}^m w_i pp_i$ Le pouvoir prédictif de la matrice de transition et w_i les pondérations égales. En utilisant ces deux formules les α_g sont estimés

comme suit : $\alpha_g = \frac{pp_g}{\sum_{g=1}^k pp_g}$ où pp_g est le pouvoir prédictif de la matrice de

transition d'ordre k . Cette formule nous assure que $\sum_{g=1}^k \alpha_g = 1$ et que le

résultat du modèle sera entre 0 et 1 (probabilité). Dans notre cas le modèle

s'écrit sous la forme : $\hat{\pi}^{(2015)} = \sum_{g=1}^3 \alpha_g \pi^{(2015-g)} S_g$ Où : S_g les matrice à

horizon g calculées auparavant $\pi^{(2015-g)}$ = les vecteurs de probabilités

d'état avec $g = 1, 2, 3$ et α_g Les paramètres autorégressifs d'ordre g

avec $g \in \{1, 2, 3\}$. L'estimation des paramètres autorégressifs nous donne :

Pour les crédits d'investissement : $\alpha_1 = 0.82$, $\alpha_2 = 0.08$, $\alpha_3 = 0.10$

Ce qui nous donne : $\hat{\pi}^{(2015)} = (0.56 \quad 0.14 \quad 0.10 \quad 0.20)$

Pour les crédits immobiliers : $\alpha_1 = 0.70, \alpha_2 = 0.16, \alpha_3 = 0.14$

Ce qui nous donne : $\hat{\pi}^{(2015)} = (0.72 \quad 0.10 \quad 0.06 \quad 0.12)$

Résumé des résultats des prévisions pour le classement en 2015

Les valeurs des vecteurs de probabilités d'état obtenues par les différentes méthodes sont reprises dans le tableau suivant :

Tableau 3 : Résultats obtenus par les quatre méthodes de simulation.

	Crédit d'investissement				Crédits immobiliers			
	C_0	C_1	C_2	C_3	C_0	C_1	C_2	C_3
Moyenne simple	0.57	0.13	0.11	0.19	0.75	0.08	0.06	0.11
Moyenne pondérée	0.58	0.12	0.11	0.19	0.75	0.08	0.06	0.11
Lissage exponentielle simple	0.60	0.10	0.11	0.19	0.76	0.08	0.07	0.09
Modèle autorégressif	0.56	0.14	0.11	0.19	0.74	0.09	0.06	0.11

Les quatre méthodes utilisées pour la prévision de l'année 2015 nous donnent des estimations assez proches les unes des autres, donc la tendance des migrations futures peut être déduite des migrations passées.

4.2. Prévision à des horizons supérieurs à 1 an :

Les prévisions lointaines dans le futur sont importantes pour une banque car elles lui offrent une vision claire pour fixer une stratégie de management des risques qui limera ses pertes. Nous choisissons de prendre comme critère d'aversion au risque visant un montant de provision plus élevé. On définit le paramètre γ qui est égale aux pondérations des probabilités de chaque vecteur avec les taux de provisionnement de chaque classe.

$$\gamma = \pi_{C_1}^{(2015)} \times 20\% + \pi_{C_2}^{(2015)} \times 50\% + \pi_{C_3}^{(2015)} \times 100\%$$

Le γ tel qu'il est défini permet de classer les méthodes de prévision. Après calcul on obtient :

- Pour la méthode de la Moyenne simple le $\gamma_{immob} = 0,158$; $\gamma_{invest} = 0,270$
- Pour la méthode de la Moyenne pondérée $\gamma_{immob} = 0,158$; $\gamma_{invest} = 0,268$
- Pour la méthode du Lissage $\gamma_{immob} = 0,141$; $\gamma_{invest} = 0,265$
- Pour la méthode du Modèle autorégressif $\gamma_{immob} = 0,159$; $\gamma_{invest} = 0,273$

Nous allons simuler trois autres vecteurs à savoir : $\hat{\pi}^{(2016)}, \hat{\pi}^{(2017)}$ et $\hat{\pi}^{(2018)}$. Nous aurons donc, quatre vecteurs de probabilité d'état observés et quatre vecteurs de probabilité d'état simulés :

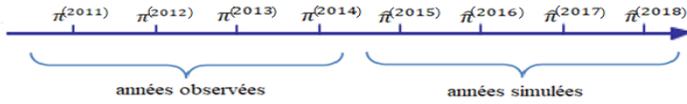


Figure 3 : Schéma récapitulatif des vecteurs observés et simulés

Les vecteurs de probabilités d'état sont repris dans le tableau suivant :

	Crédit d'investissement				crédits immobiliers			
	C_0	C_1	C_2	C_3	C_0	C_1	C_2	C_3
$\pi^{(2011)}$	0.78	0.10	0.09	0.03	0.88	0.05	0.05	0.02
$\pi^{(2012)}$	0.63	0.16	0.09	0.12	0.79	0.11	0.03	0.07
$\pi^{(2013)}$	0.60	0.14	0.13	0.13	0.83	0.06	0.06	0.05
$\pi^{(2014)}$	0.59	0.10	0.11	0.20	0.75	0.06	0.07	0.05
$\hat{\pi}^{(2015)}$	0.56	0.14	0.11	0.19	0.74	0.09	0.06	0.11
$\hat{\pi}^{(2016)}$	0.53	0.16	0.10	0.21	0.70	0.10	0.07	0.13
$\hat{\pi}^{(2017)}$	0.52	0.15	0.10	0.23	0.69	0.09	0.07	0.15
$\hat{\pi}^{(2018)}$	0.52	0.15	0.09	0.24	0.68	0.10	0.07	0.15

Tableau 2 : Résumé des vecteurs d'état de probabilités observés et simulés

Source : Nous-même.

Ces résultats peuvent être représentés par les deux graphes suivants :

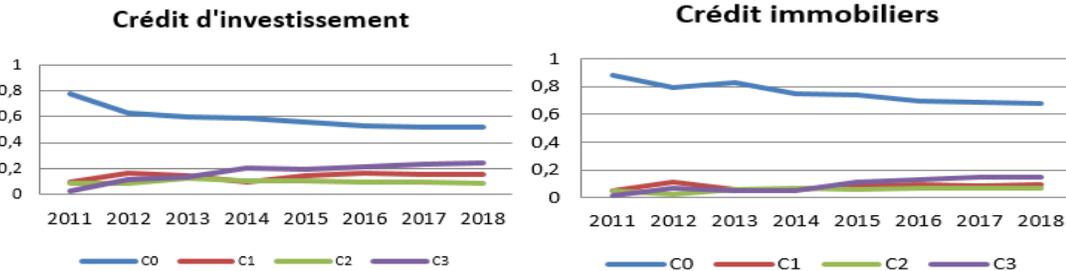


Figure 4 : Evolution du classement de créances sur la période 2011-2018

Cette dégradation peut être constatée et confirmée sur les années suivantes 2014, mais faute de disponibilité de données sur notre portefeuille d'application, nous opter pour la comparaison des résultats obtenus avec un autre portefeuille issu de la même banque, la BNA, qui a un volume assez important, en moyenne 25000 créances chaque année observée sur la période 2011 à 2019. Dans le graphe suivant on a la représentation de l'évolution de la proportion des créances courantes du portefeuille de comparaison sur la période 2011 – 2019 :

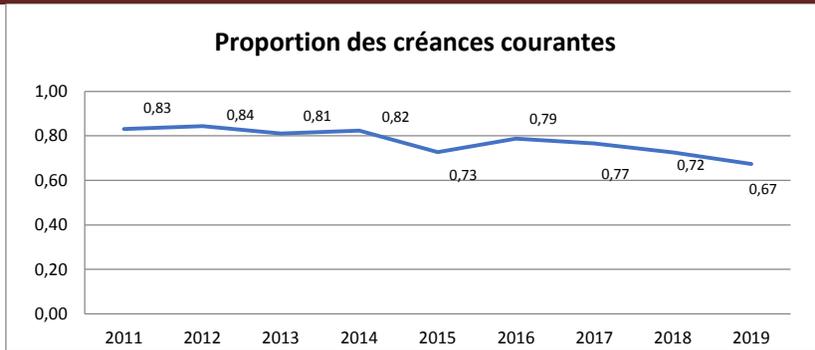


Figure 5 : Représentation de la proportion des créances Courantes sur le portefeuille d'observation.

La tendance baissière des créances courantes est constatée aussi pour le portefeuille d'observation. Néanmoins elle est moins importante et moins aigue que celle anticipée sur notre portefeuille d'étude surtout celle des crédits d'investissement où les créances courantes étaient de l'ordre de 78% et finissent avec une proportion de 52% seulement en fin 2018.

5. Conclusion:

Pour les crédits d'investissement, tous les clients de la classe C_1 (clients qui ont un retard de remboursement entre 90 jours et 180 jours) la probabilité d'appartenir à cette classe est de 0.14, donc 14% des créances de ce portefeuille seront provisionnées à la fin de 2014 à 20%. Les créances de la classe C_2 (clients qui ont un retard de remboursement entre 180 jours et 360 jours) la probabilité d'appartenir à cette classe est de 0.11, donc 11% des créances de ce portefeuille seront provisionnées à la fin de 2014 à 50%.

Les créances de la classe C_3 (clients qui ont un retard de remboursement entre 180 jours et 360 jours) la probabilité d'appartenir à cette classe est de 0.19, donc 19% des créances de ce portefeuille seront provisionnées à la fin de 2014 à 100%. Pour les crédits immobiliers, on remarque une différence entre les prévisions données par notre modèle et les positions des créances en fin 2014 avec laquelle la BNA fait son provisionnement selon la réglementation de la Banque d'Algérie. En effet, pour la classe C_1 qui représente 10% du portefeuille des crédits d'investissement, la banque va les provisionner à 20% alors que selon l'historique les migrations observées sur les quatre ans on doit provisionner 14% des créances à 20% ceci est un risque à prendre en sous-évaluant les dégradations futures.

La tendance haussière des créances classées estimée par notre modèle suggère à la Banque Nationale d'Algérie de faciliter la sortie des créances compromises du portefeuille par l'amélioration du système de recouvrement et de privilégier les solutions à l'amiable qui sont beaucoup plus rapides que

les procédures judiciaires, Avec, une amélioration du processus de sélection des clients. Donc, chaque banque et chaque établissement financier doit adopter un système de de gestion interne de crédit propre. Notre système, tel qu'il est conçu, est très simple à mettre en place, si la base de données qui l'alimente est suffisamment grande, représentative et remonte loin dans le temps, il pourra capter la dynamique des migrations entre les classes qui permettra d'anticiper le risque de crédit d'une manière plus précise.

6. Liste Bibliographique:

6.1. Ouvrages:

- BERCHTOLD A. (1998) : « chaînes de Markov et modèles de transition, application aux sciences sociales », Hermès.
- BRAJOVIC BRATANOVIC. S & VAN GREUNING. H. (2004) : « Analyse et Gestion du Risque Bancaire », ESKA.
- BRUNEL. V & ROGER. B (2014) : « Le risques de crédit, Des modèles au pilotage de la banque », Economica.
- CALVET. H. (1997) : « Etablissement de crédit : appréciation, évaluation et méthodologie de l'analyse financière », ECONOMICA.
- De BEL. L & VERBOOMEN. A (2011) : « Bâle II et le risque de crédit »,
- De SERVIGNY. A & ZELENKO. I (2010) : « le risque de crédit face à la crise », Dunod.
- DIETSCH.M & PETE.J (2008) : « Mesure et gestion du risque de crédit dans les institutions financières », Revue Banque.
- FERRONIERE J & CHILLAZ E (1963) : « Les opérations de banque » Dunod.
- FOATA. D (2004): « processus stochastiques: Processus de poisson, chaines de Markov et martingales », Edition Dunod.
- GOURIEROUX. C & TIOMO.A (2007) : « Risque de crédit, une approche avancée », Economica.
- GRAHAM. C (2008) : « CHAINES DE MARKOV cours et exercices corrigés », Dunod.
- KEREBEL. P (2009) : « Management des risques, Inclus secteurs Banque et Assurance », Eyrolles.
- LOBEZ. F & VILANOVA. L (2006) : « Microéconomie bancaire » Editions PUF.
- RONCALLI T. (2004) : « La gestion des risques financiers », Economica.

-
- SERICOLA. B (2013): « CHAINES DE MARKOV théorie, algorithmes et applications », Lavoisier.

6.2. Articles et Publications

- Basel Committee on Banking Supervision, «International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards », 2006.
- BERCHTOLD A. « Modélisation autorégressive des chaînes de Markov : utilisation d'une matrice différente pour chaque retard », 1996.
- BONNIEUX F. « Estimation des probabilités de transition des chaînes de Markov ». HAL 2017.
- DESSERPRIT. Y « modélisation du risque de crédit et applications RAROC », université Paris-Dauphine.
- ELIZALDE.A & REPULLO. R « Economic and regulatory capital. What's the difference » en 2004
- ELMEDAH.Y : « notions essentielles de statistique : la méthode statistique tests relatifs aux fréquences et au khi-deux » livret 2/4.
- FOULCHER. S, GOURIEROUX. C & TIOMO. A « La structure par termes des taux de défauts et ratings » Les Cahiers du CREF. 2004.
- JP Morgan, « *CreditMetrics. Technical document* ». 1997.
- JOSIANE E. & FOTSO G, « Evaluation du risque de crédit dans les portefeuilles de la Banque de France » ENSAE, 2008.