

**« Contrôle Statistique de Fragilité Financière de PME »****Mohamed El Ghourabi***Mohamed.elghourabi@laposte.net***Amira Dridi***amiradridi@laposte.net***ISG Tunis****Résumé**

Les PME sont devenues des organismes ayant un rôle très important dans toute économie. Vu la complexité croissante de leur activités et de leur environnement, il semble nécessaire de trouver des moyens utiles ayant pour objectif d'améliorer leurs compétitivité et de connaître leurs points faibles. Cet article présente un nouvel outil statistique pour contrôler la fragilité financière de ce type d'entreprises. Notre approche consiste à quantifier les risques extrêmes afin d'évaluer la stabilité financière des PME, pour ce faire, nous avons appliqué la Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE) au Test de Stress Financier (TSF). La carte de contrôle proposée qui distingue trois zones de stress à savoir Stress Critique, Stress Sérieux et Stress Bénin, a été appliquée sur un échantillon de 1000 PME. Les résultats montrent que 14 PME ont été en situation de Stress Critique, 66 PME en situation de Stress Sérieux et le reste ne présentent pas de risque financier très important.

**Mots clés :** Test de Stress Financier, Indice de Stress Financier, Value at Risk, Théorie des Valeurs Extrêmes.

**1. Introduction**

Les activités des PME sont devenues de plus en plus complexes et diverses au cours des dernières années puisqu'elles sont exposées à des différents risques qui mettent en cause leur stabilité. En réponse à cette augmentation de l'instabilité financière, les chercheurs et les praticiens s'intéressent de plus en plus à la compréhension des vulnérabilités des PME. La gestion du risque financier est une gestion des événements inattendus, des événements rares, qui exercent une force de stress sur la stabilité financière de PME. L'une des principales techniques de quantification des vulnérabilités est le TSF, qui englobe une ou diverses techniques d'évaluation de la résistance aux événements extrêmes. La distribution normale donne à ces événements un caractère « prévisible » et rien ne sert pour cela d'étudier leur fréquence et de calculer leur amplitude. Dans une telle situation il semble alors essentiel de s'appuyer sur une méthodologie bien fondée, à savoir, la TVE afin de contrôler l'ISF. Le recours à la "Value-at-Risk" (VaR) en utilisant la TVE apparaît à ce niveau comme un outil particulièrement bien adapté pour contrôler la fragilité financière de PME.

A cet égard, on va présenter dans la deuxième section une vue d'ensemble du test et de l'indice de fragilité financière. La troisième section sera consacrée à la TVE unidimensionnelle et multidimensionnelle. Nous présentons notre approche dans la quatrième section et pour valider notre approche, une application a été présentée au niveau de la cinquième section.

**2. Test de Stress Financier (TSF)**

Illing et Liu (2003) définissent le stress financier comme étant la force exercée sur les agents économiques due à l'incertitude et le changement des attentes de perte dans les marchés et les institutions financières. Ce stress financier peut être mesuré par un indice appelé ISF, où les valeurs extrêmes sont appelées crises financières.

### 2.1 Test de Stress Financier (TSF)

Le TSF est utilisé pour déterminer la stabilité d'un système donné ou d'une entité. Il s'agit de mesurer la capacité d'un organisme à faire face à divers niveaux de crises afin d'observer les résultats. Le TSF vise à simuler les conditions les plus défavorables ou contraignantes que peut subir une structure afin d'en étudier les conséquences. Le Comité du Système Financier Mondial (CSFM (2001)) a considéré les TSF comme étant «des outils utilisés par les entreprises pour évaluer leur vulnérabilité à des événements exceptionnels mais plausibles». Les deux mots clés qui sont utilisés pour définir un événement extrême sont donc «exceptionnels» et «plausible», dans ce sens, le TSF estime les effets des événements exceptionnels à une faible probabilité, plutôt que les mauvaises nouvelles ordinaires. Tandis que certains auteurs considèrent le TSF comme un modèle de risque complet (Berkowitz et al, (2000)), pour d'autres, le système de TSF est considéré comme «un art» plutôt qu'une science (Kupiec, (2001)). Hilbers et al.(2004) pensent que le TSF est devenu un outil de gestion de risque, qui est utilisé par plusieurs organismes à l'instar des institutions financières dans le monde entier, ce test est pertinent dans la mesure où il permet d'estimer les vulnérabilités potentielles. Ils ajoutent que le TSF décrit une gamme de techniques qui vise à mesurer la sensibilité de l'organisme à une série de chocs extrêmes mais plausibles. Ce test est une technique analytique qui peut être utilisé pour produire une estimation numérique d'une telle instabilité, comme l'a noté le CSFM (2001): «le TSF estime l'exposition à un événement spécifique, et non pas la probabilité concernant l'événement survenu. Ainsi, ces tests peuvent fournir des informations qui concernent les pertes pouvant être subites dans le cadre d'un scénario donné, et non pas concernant les pertes probablement subites ».

### 2.2 Le rôle des TSF dans la gestion des risques

Les TSF sont des outils utilisés par les gestionnaires de risques pour comprendre le profil de risque de l'entreprise et de communiquer cette information à la haute direction. Certes, les TSF sont utilisés pour fixer les limites et mesurer les risques et par conséquent d'essayer au mieux de les minimiser. Certaines PME utilisent ces tests pour allouer les capitaux ou contrôler le risque de liquidité, d'autres PME, les utilisent pour effectuer des plans d'urgence pour les périodes de fragilité du marché. CSFM (2001) dénombre trois principaux objectifs des TSF à savoir améliorer la compréhension du rôle joué par les TSF dans la gestion des risques, un recensement fait par le CSFM fournit une perspective unique dans l'intégration de TSF dans les programmes de gestion des risques, ils sont désormais considérés comme une source supplémentaire d'information sur les risques courus par les entreprises sur le marché. Concernant le deuxième objectif, il s'agit d'identifier les expositions à des événements exceptionnels considérés comme des facteurs de risques importants en s'appuyant sur les événements historiques, et aussi sur des scénarios hypothétiques. Pour le troisième objectif, ça concerne le développement de l'information sur l'hétérogénéité de la prise de risques à un moment donné. En effet, il existe un degré de diversité des scénarios, même si plusieurs PME optent pour le même scénario historique, alors l'ampleur des chocs et la gamme de facteurs de risques testés varient de manière significative. Cela reflète le degré d'appréciation des gestionnaires des risques lors de l'élaboration de scénarios des TSF y compris le choix de la période, et la nature subjective de cet outil de gestion du risque.

### 2.3 Utilité et objectifs de TSF

Le TSF d'une PME peut être considéré comme étant un processus utile dans la mesure où il présente certains avantages. Parmi ces avantages, il fournit de l'information adéquate sur le comportement de l'entreprise face à des chocs exceptionnels mais plausibles. Ainsi cette information peut aussi aider à identifier les faiblesses dans la collecte des données, dans le système d'information, et dans la gestion du risque. Il aide les PME à évaluer et estimer les importantes vulnérabilités du système. Ce processus, lui-même, peut contribuer à améliorer l'expertise dans l'évaluation des risques par les superviseurs ainsi que par les entreprises concernées, et de promouvoir la coopération entre les entreprises. Il peut aussi contribuer à une meilleure compréhension des liens existants entre les PME

et la macroéconomie. A cet égard, le TSF est une manière de réévaluation d'un portefeuille en utilisant des différentes hypothèses. L'objectif de TSF est de comprendre la sensibilité du portefeuille face au changement de différents facteurs de risques, ainsi les TSF peuvent être appliqués à la fois du côté de l'actif et du passif.

Ces tests peuvent être utilisés pour estimer une multitude de risques, y compris, le risque du marché (la possibilité d'avoir des pertes suite à l'évolution des prix ou des rendements), le risque de crédit (les pertes potentielles générés du défaut de l'emprunteur ou résiliation des contrats), et le risque de liquidité (la possibilité d'avoir des pertes générés par des actifs non liquides ( Hilbers et al. (2004)). A cet effet, ces auteurs affirment que : « ces tests peuvent entraîner des changements d'un portefeuille, y compris les prix utilisés pour calculer la valeur du marché. Ce test est utilisé aussi pour examiner l'impact des changements dans l'environnement, par exemple ces tests peuvent être employés pour estimer l'impact des changements dans les réglementations prudentielles, une application plus stricte des différents traitements comptables, le TSF produit de manière régulière, une estimation numérique du changement de la valeur du portefeuille. Les PME doivent avoir des processus de TSF pour l'utiliser dans l'évaluation de l'adéquation des fonds propres. Les gestionnaires doivent avoir un minimum de normes quantitatives en ce qui concerne les TSF et doivent savoir comment une PME prévoit des événements inattendus en fixant les niveaux de capital et pour cela la gestion des PME doit mener des TSF périodiques partant de ses principales concentrations de risque et réviser les résultats de ces tests afin d'identifier et de répondre à d'éventuelles changements des conditions du marché qui pourrait nuire la performance des PME. Selon Jenkinson (2007), le TSF sert à évaluer la vulnérabilité d'un organisme aux chocs extrêmes mais plausibles, à améliorer la compréhension de la transmission des chocs et à identifier les "points faibles" dans l'entreprise, afin d'orienter les priorités de réduction des risques et la planification de la gestion des organisations. Enfin, le but de TSF au niveau du portefeuille et des analyses de l'instabilité est d'aider la gestion ainsi que le conseil d'administration à comprendre comment les changements importants des facteurs économiques et des facteurs du marché peuvent nuire le portefeuille, les revenus, le capital et la qualité des actifs d'une institution.

#### 2.4 Les types de TSF

Il existe deux types de TSF, un TSF macroéconomique ou à facteurs multiples et un TSF de facteur unique.

**Le TSF à facteur unique** Les chocs du facteur unique sont utilisés pour évaluer les risques du marché. Ce genre de chocs est approprié lorsqu'un gestionnaire veut savoir l'effet d'un large mouvement du portefeuille. Cependant, lorsqu'on évalue les expositions d'un portefeuille face à des événements instables, ce facteur unique est rarement approprié et peut probablement souffrir d'être non plausible. Car lorsqu'un événement défavorable se produit, rarement il va affecter un seul facteur.

**Le TSF à facteurs multiples** Comme le nom indique, le TSF à facteurs multiples implique plusieurs facteurs de risques au même temps, le TSF peut être effectué par la simulation historique de période de crise ou par la supposition d'événements hypothétiques d'un groupe de facteurs de risque, ce groupe de facteurs de risque est appelé aussi le Test de scénario.

**Les scénarios historiques** Peuvent être effectués par la revalorisation de portefeuilles en utilisant les valeurs de facteurs de risques existants pendant les événements historiques instables, Shaw (1997) a proposé une méthodologie alternative pour calculer les pertes de fragilité, une fois que les pertes du portefeuille sont calculés les gestionnaires de risque peuvent observer et vérifier quel est le scénario qui produit ces pertes extrêmes, ceci est similaire au simulation historique dans les modèles de VaR mais la différence est qu'une période plus longue peut être choisie pour le calcul de la VaR.

**Les scénarios hypothétiques** Les gestionnaires de risque peuvent aussi construire des scénarios hypothétiques en absence de scénarios historiques correspondant à des caractéristiques particulières de leurs portefeuille ou quand ils tiennent à déterminer des nouvelles combinaisons de facteurs de risque.

### 3. Indice de Stress Financier (ISF)

#### 3.1 Définition de l'Indice de Stress Financier (ISF)

Un ISF représente un ensemble continu de situations qui décrivent une PME à un moment donné. Le niveau du stress est mesuré sur une échelle allant des situations tranquilles, où il y a quasi absence de stress, à des situations de stress extrême où la PME encours un risque d'une crise sévère. Un ISF est une agrégation de plusieurs variables qui reflètent les symptômes d'une crise. La littérature a permis de relever qu'une crise se présente sous différents aspects et qu'une seule variable ne permet pas de détecter les différentes formes de crises d'où l'intérêt de combiner plusieurs variables dans un seul indice qui est l'ISF. Illing et Liu (2003) définissent le stress comme étant une variable continue avec une gamme de valeurs, où les valeurs extrêmes sont appelées crises financières.

#### 3.2 Construction de l'ISF

La construction d'indice est utile pour savoir si une PME est en crise à un moment donné du temps. Il s'agit de combiner plusieurs variables dans un seul indice, chaque variable constitue un symptôme de stress potentiel. A ce niveau, le choix de la méthode de pondération est crucial puisqu'il détermine l'impact de chaque variable dans l'indice final. Pour calculer notre indice, nous avons choisi la méthode de variances égales (variance-equal weight method) qui est la plus utilisée dans la littérature et qui consiste à standardiser les variables afin de les exprimer dans une même unité et de les agréger en utilisant des pondérations identiques. La formule de l'ISF est la suivante:

$$I_i = \sum_{i=1}^k \frac{(X_{i,t} - \bar{X}_i)}{\sigma_i} \quad (3.1)$$

avec:

$k$  : Nombre de variables dans l'indice,

$\bar{X}_i$  : Moyenne de la variable  $X_i$ ,

$\sigma_i$  : Écart type de la variable  $X_i$ .

Les fluctuations des différents indicateurs sont supposées représenter les variations dans la fragilité des PME.

L'indice final a été aussi standardisé afin de l'interpréter en termes de déviation par rapport à sa moyenne ainsi, et selon Hanschel et Monnin (2003) :

- Un niveau de l'indice standardisé au dessus de 0 signifie que le stress est plus élevé que la moyenne.
- Un niveau de l'indice standardisé au dessous de 0 signifie que le stress est moins élevé que la moyenne.

### 4. Théorie de valeurs extrêmes

#### 4.1 Cadre d'analyse

Soit  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition  $F$  définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (4.1)$$

Une manière simple d'étudier le comportement des événements extrêmes est de considérer la variable aléatoire :



$$M_n = \max(X_{1:n}, \dots, X_n). \quad (4.2)$$

La difficulté provient du fait que l'on ne connaît pas en général la fonction de répartition  $F$ . C'est la raison pour laquelle on s'intéresse au comportement asymptotique de la variable aléatoire  $M_n$ . Ainsi en identifiant la famille de loi vers laquelle  $M_n$  va converger, on pourra remplacer  $F$  par cette dernière pour des grandes valeurs de  $n$ . Pour caractériser cette loi de distribution des extrêmes, nous allons recourir au Théorème de Fisher-Tippet (1928).

**4.2 Théorème limite de Fisher-Tippet**

Avant d'énoncer le principal théorème de cette section, il est important de définir des classes d'équivalence sur l'ensemble des fonctions de répartition (sur les distributions des probabilités).

Les distributions  $F$  et  $F^*$  sont dites de même type si

$$F^*(ax+b) = F(x), \quad (4.3)$$

avec  $a, b$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Le théorème de Fisher-Tippet permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes. S'il existe des constantes  $a_n > 0$  et  $b_n$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = G(x). \quad (4.4)$$

avec  $G$  une fonction de distribution non dégénérée, alors  $G$  appartient à l'un des trois types suivants (I, II, ou III) :

Type I: Gumbel

$$G(x) = \exp(-e^{-x}), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Type II: Fréchet

$$\begin{cases} G(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ G(x) = \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0, \alpha > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $\alpha$  un paramètre de forme.

Type III : Weibull

$$\begin{cases} G(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}) & \text{si } x \leq 0, \alpha > 0 \\ G(x) = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

La loi de Gumbel peut être considérée comme une loi de transition entre les lois de Fréchet et de Weibull. La majorité des lois de probabilité usuelles appartiennent à l'un des trois domaines d'attraction (Maximum Domain of Attraction MDA) Gumbel, Fréchet ou Weibull. Par exemple, les distributions exponentielles, Gamma et Log-normale appartiennent au MDA de Gumbel regroupant la

majorité des distributions à queue fine ; les distributions de Pareto, Log-Gamma, et Student appartiennent au MDA de Fréchet regroupant la majorité des distributions à queue lourde et la distribution uniforme appartient au MDA de Weibull regroupant la majorité des distributions sans queue. En fait, les trois types de distributions précédentes peuvent être caractérisés par une distribution unique:

$$G(x) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x-b}{a}\right)^\alpha\right]^{-1/\xi}\right\}. \quad (4.8)$$

Cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité des valeurs extrêmes généralisée (**Generalized Extreme Value distribution (GEV)**) présentée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Fréchet} & \xi = \alpha^{-1} > 0 \\ \text{Weibull} & \xi = -\alpha^{-1} < 0 \\ \text{Gumbel} & \xi = 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont les limites de  $b_n$  et  $a_n$ .

Le paramètre  $\sigma$  est un paramètre de dispersion. Le paramètre  $\mu$  est un paramètre de localisation. Le paramètre  $\xi$  est l'indice de queue ou d'indice de valeur extrême. Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. On parle alors de distribution à « queues épaissies ».

On note toutefois qu'en pratique on ne connaît pas les paramètres  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\xi$ , il faut donc les estimer à partir des données et les remplacer par leurs estimations.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer les paramètres de la distribution GEV. Par exemple, on cite les méthodes d'estimation de l'indice de queue, la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance.

#### 4.3 Méthode des excès et distribution de Pareto généralisée

Fondée sur la TVE, la méthode des excès également connue sous le nom de Peaks Over Threshold (POT), permet la modélisation des queues de distribution d'une série de données à partir de laquelle il devient possible d'estimer la probabilité d'occurrence d'événements rares au-delà des plus grandes valeurs observées.

La fonction de distribution des excès de perte (POT) par rapport à un seuil élevé  $\mu$  est définie par :

$$F_\mu(y) = \Pr\{X - \mu \leq y \mid X > \mu\}. \quad (4.10)$$

Pour  $0 \leq y \leq x_0 - \mu$ , on a généralement  $x_0 = +\infty$ .

La fonction de distribution des excès représente la probabilité qu'une certaine perte dépasse le seuil  $\mu$  d'au plus une quantité  $y$ , sachant qu'elle dépasse  $\mu$ . Cette fonction s'écrit sous la forme:

$$F_\mu(y) = \frac{\Pr\{X - \mu \leq y, X > \mu\}}{\Pr\{X > \mu\}} = \frac{F(y + \mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}. \quad (4.11)$$

Le théorème de Pickands-Balkema- de Haan (Balkema & de Haan (1974); Pickands (1975)) énonce que si  $F$  appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi limite des extrêmes (Fréchet, Gumbel ou Weibull), alors il existe une fonction de répartition des excès au-delà de  $\mu$ , noté  $F_\mu$  qui peut être approchée par la distribution de Pareto généralisée (GPD) telle que :

$$\lim_{\mu \rightarrow x_0} \sup |F_{\mu}(y) - G_{\xi, \beta}(\mu)(y)| = 0. \quad (4.12)$$

Cette considération théorique suggère que, lorsque nous avons des données issues d'une distribution inconnue, il est possible d'approximer la distribution au-delà d'un certain seuil (assez grand) par une distribution de Pareto généralisée.

$G_{\xi, \beta}$  est la GPD de paramètres  $\xi$  et  $\beta$  définie par :

$$\begin{cases} G_{\xi, \beta}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ G_{\xi, \beta}(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

avec  $\beta > 0$ ,  $x \geq 0$  pour  $\xi \geq 0$  et  $0 \leq x \leq \frac{-\beta}{\xi}$  pour  $\xi < 0$ . Le paramètre  $\beta$  est un paramètre d'échelle.

La valeur prise par le paramètre  $\xi$  informe sur le poids des queues dans la distribution parente. En d'autres termes, plus les indices de queue  $\xi$  sont élevés plus la distribution considérée possède des queues épaisses. Un indice de queue supérieur à zéro signifie donc que la probabilité d'occurrence de rentabilités extrêmes et notamment le risque de pertes extrêmes (dans le cas de la queue gauche) est plus importante que ce que prévoit la loi normale. Le risque d'un investissement c'est-à-dire des pertes extrêmes est donc d'autant plus important que l'indice de queue correspondant à ses plus faibles rentabilités (queue gauche), est élevé (Longin (1996) ; McNeil (1998, 1999)). Ainsi le cas  $\xi > 0$  est le plus intéressant dans les modèles de gestion de risque car la GPD est à queue épaisse.

Sur la base des résultats relatifs à l'estimation de la loi asymptotique des excès, il est possible d'évaluer la perte maximale pour une probabilité donnée et sous des conditions de marchés extrêmes. Un estimateur de la VaR avec  $N_{\mu}$ , le nombre des excès au delà du seuil  $\mu$  est obtenu par :

$$\widehat{VaR}_q = \mu + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[ \left( \frac{n}{N_{\mu}} (1 - q) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right]. \quad (4.14)$$

#### 4.4 Copules

Les copules, de plus en plus utilisés dans la littérature financière, constituent une manière de résumer la structure corrélative des données. Elles permettent de relier la densité jointe à la densité marginale. Le principe général de cette notion est donné par le théorème de Sklar (1959) suivant :

**Théorème :** Soit  $H$  une fonction de distribution avec des marginales  $F_1, F_2, \dots, F_k$ . Alors il existe une copule  $C$  telle que pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \dots, x_k) &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_k < x_k) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

La fonction de copule  $C$  combine les distributions marginales pour donner la distribution multivariée  $F$  :

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N)) = F(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (4.16)$$

Selon la littérature, il existe toujours une copule pour une distribution multivariée comme par exemple la copule de Gumbel, la copule d'Olkin, ...



Longin et Solnik (2001) ont étudié la dépendance entre les marchés en période de stress en se basant sur la copule de Gumbel. Dans un autre travail, Bouyé (2002) a utilisé la fonction copule pour analyser la mesure du risque agrégé sur trois indices boursiers.

En matière de VaR, la littérature n'a pas proposé une formule analytique permettant d'intégrer la copule dans une VaR agrégant plusieurs variables de risques tel le cas de l'indice de Stress. Afin de bien estimer la VaR agrégée de l'ISF en utilisant la TVE, il est intéressant d'intégrer la notion des copules pour bien évaluer la structure de dépendance entre les variables constituant l'ISF. Cet outil sera utilisé dans la section suivante.

**4. Approche Proposée**

Généralement, il est difficile de déterminer une forme analytique de la VaR sur une position agrégée, dans ce cas nous allons estimer des bornes à l'intérieur desquelles la VaR agrégée se trouve. Notre approche consiste à encadrer la VaR par deux valeurs, VaRmin et VaRmax, et en utilisant la notion de copule énoncée ci-dessus et en partant de l'idée que la VaR n'est autre que le quantile d'ordre  $\alpha$  :

$$VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha). \tag{4.17}$$

Soit  $H(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , une fonction de distribution multivariée de vecteur de k variables utilisé dans le calcul de l'indice de stress tel que :

$$H(x_1, x_2, \dots, x_k) = p(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_k < x_k) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)), \tag{4.18}$$

Avec  $F_i(x_i)$  est la distribution marginale associée à  $x_i$ .

En utilisant les résultats théoriques trouvés par Cossette et al.(2002) et Makarov (1981) tel que :

$$F_1(x^{cr}) \leq F_{cr}(x^{cr}) \leq F_5(x^{cr}), \tag{4.19}$$

avec  $x^{cr} = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ ,  $F_1$  et  $F_5$  sont respectivement deux bornes inférieur et supérieur de la fonction de distribution marginale  $F(x^{cr})$  qui peut être selon la littérature une distribution de Fréchet.

$$\begin{cases} F_1(x^{cr}) = \sup_{IS_i} C_i(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)) \\ F_5(x^{cr}) = \inf_{IS_i} C_5(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_k(x_k)) \end{cases} \tag{4.20}$$

Utilisant les résultats trouvés Mesfioui et Qessy (2005) :

$$VaR_{min}(\alpha) \leq VaR(x^{cr}) \leq VaR_{max}(\alpha). \tag{4.21}$$

Et les résultats de Dekkers et al (1989), on trouve que :

$$\bar{F}_{n,d}^{-1}(p, \hat{y}_{in}) = x_{(n-m)}^{cr} + \frac{(\frac{m}{n(1-p)})^{\hat{y}_{in}} - 1}{\hat{y}_{in}} (1 - \min(0, \hat{y}_{in})) x_{(n-m)}^{cr} M_{in}^{(1)} - k. \tag{4.22}$$

$$VaR_\alpha \leq VaR_{max}(\alpha) = \sum_{i=1}^d x_{(n-m)}^{cr} + \inf_{\sum_{i=1}^d q_i = \alpha - d - 1} \sum_{i=1}^d \frac{(\frac{m}{n(1-p)})^{\hat{y}_{in}} - 1}{\hat{y}_{in}} (1 - \min(0, \hat{y}_{in})) x_{(n-m)}^{cr} M_{in}^{(1)}. \tag{4.23}$$



Par déduction mathématique, on trouve :

$$VaR_{max}(\alpha) = \sum_{i=1}^d x_{i(n-m)}^{FF} + \sum_{i=1}^d \frac{\left(\frac{m_i}{n}\right)^{j_n-1}}{\bar{r}_n} (1 - \min(0, \bar{r}_n)) x_{i(n-m)}^{FF} M_{in}^{(1)} \quad (4.24) \text{ et}$$

$$VaR_{min}(\alpha) = \sum_{i=1}^d x_{i(n-m)}^{FF} + \max_{1 \leq j \leq d} \left[ \frac{\left(\frac{m_j}{n(1-\alpha)}\right)^{j_n-1}}{\bar{r}_n} (1 - \min(0, \bar{r}_n)) x_{i(n-m)}^{FF} M_{in}^{(1)} + \sum_{1 \leq j \leq d} \left[ \frac{\left(\frac{m_j}{n}\right)^{j_n-1}}{\bar{r}_n} (1 - \min(0, \bar{r}_n)) x_{i(n-m)}^{FF} M_{in}^{(1)} \right] \right] \quad (4.25)$$

Les deux bornes de la VaR calculées seront utilisées comme étant deux bornes d'une carte de contrôle utilisée pour identifier les situations de stress. Les observations qui se trouvent au dessus de la  $VaR_{max}$  sont en situation de stress critique c'est-à-dire les PME localisées dans cette zone sont en difficulté et nécessitent une intervention rapide. Les PME qui se trouvent entre les deux bornes sont en situation de stress sérieux. Ces entreprises nécessitent un suivi et un contrôle pour dépasser cette situation financière fragile. Enfin, les PME qui se trouvent au dessous de la  $VaR_{min}$  sont en situation de stress bénin moins grave que les autres PME.

### 5. Application

La base de données que nous avons utilisée est extraite d'une enquête sur les entreprises tunisiennes élaborée par l'Institut National de la Statistique (INS) de Tunisie. Elle a été menée en 2004 sur tout le territoire tunisien. L'enquête a pour principal objectif d'étudier la situation financière des entreprises tunisiennes à travers plusieurs volets comme par exemple: compte production, emploi, investissement et immobilisation. Un extrait de la base de données a été fourni par l'INS dont 37,5% des entreprises sont des PME et pour une marge d'erreur classée d'ordre de 3% à un niveau de confiance 95%, la taille de l'échantillon la plus adéquate pour notre étude est de l'ordre de 1000 PME.

Sur les 1000 PME choisies, nous avons calculé l'indice de stress pour chacune en se basant sur quatre variables de compte de production à savoir charges du personnel, charges financières, pertes extraordinaires et déficit brut d'exploitation. Nous avons appliqué notre approche sur l'ISF de ces 1000 PME. Les résultats sont présentés par la Figure 1.

Cette carte de contrôle nous a permis d'identifier 14 PME en situation de stress critique, 66 PME en situation de stress sérieux et les autres entreprises sont en situation de stress bénin.

Cette carte peut être utilisée par un organisme gouvernemental ou une institution financière à l'instar de la Banque de Financement des PME (BFPME) de Tunis, afin de contrôler et analyser les situations financières des PME et intervenir en cas de situation critique pour remédier toute fragilité financière.

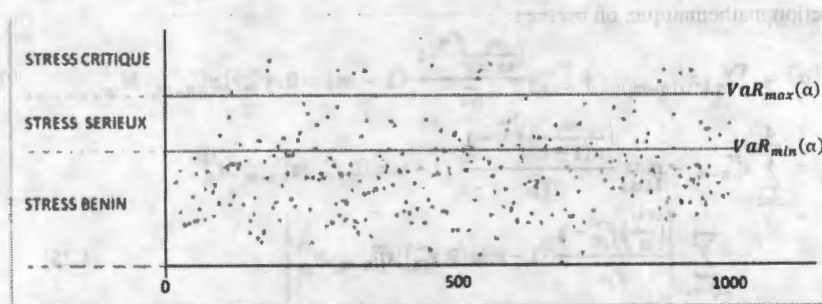


Figure 1 : Contrôle de Fragilité Financière de 1000 PME Tunisiennes

## 6. Conclusion

Compte tenu de l'environnement complexe où évoluent les PME, nous avons tenté dans cet article de proposer une nouvelle approche afin de contrôler la fragilité financière de ces entreprises. Nous avons montré comment la TVE appliqué au Stress Testing fournit un outil adéquat pour évaluer la stabilité financière des PME dans la mesure où le point fort de notre apport est de quantifier les risques extrêmes. La carte de contrôle proposée qui distingue trois zones de stress à savoir Stress Critique, Stress Sérieux et Stress Bénin, a été appliquée sur un échantillon de 1000 PME. 14 PME ont été qualifiée en situation de stress critique, 66 PME en situation de stress sérieux et le reste ne présentent pas de risque financier très important.

## Bibliographie

- Balkema, A. A. et de Haan, L. (1974), "Residual lifetime at great age", *Annals of Probability* 2, 792-804.
- Berkowitz, J. (2000), "A Coherent Framework for Stress-Testing", *Journal of Risk*, 2, pp. 1-11.
- Bouyé E. (2002), "Multivariate extremes at work for portfolio risk measurement", *Finance*, vol. 23, n°2, pp.125-144.
- CSFM (2001), "A Survey of Stress Tests and Current Practice at Major Financial Institutions", Basel, Bank for International Settlements.
- Cossette, H., Denuit, M., et Marceau, E. (2002), "Distributional bounds for functions of dependent risks", *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires*, 45-65.
- Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. H. J. and Haan, L. (1989), "A Moment Estimator for the Index of an Extreme-Value Distribution", *The Annals of Statistics*, 17, pp. 1833-1855.
- Fisher, R.A., Tippett, L.H.C. (1928). "Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 24, 180-190.
- Hanschel, E. and Monnin, P. (2003), "Measuring and forecasting stress in the banking sector: evidence from Switzerland", 22, *BIS Papers*.
- Hilbers, P., M. Jones and G. Slack. 2004. "Stress Testing Financial Systems: What to Do When the Governor Calls". *IMF Working Paper 04/127*.
- Illing, M. and Liu, Y. (2003), "An index of financial stress for Canada", Bank of Canada, Working Paper N°14.
- Jenkinson, N. (2007), "Developing a framework for stress testing of financial stability risks", *Financial Stability*, Bank of England, 12-13.
- Kupiec, P. (2001), "Stress Testing and Financial Sector Stability Assessments: A Basic Recipe for an FSAP Stress Test", Washington, IMF .mimeo.
- Longin F et Solnik B. (2001), "Extreme correlation of international equity markets", *The Journal of Finance*, N°2.

Longin F. (1996), "The asymptotic distribution of extreme stock market returns", *Journal of Business*, volume 69, N°3.

Makarov, G.D. (1981), "Estimates for the distribution function of the sum of two random variables when the marginal distributions are fixed", *Theory of Probability and its Applications*, 26, 803-806.

Mesfioui, M., Quesy, J.F. (2005), "Bounds on the Value at Risk for the sum of possibly dependent risks", *Insurance : Mathematics and economics*, 37, 135-151.

Mc Neil A.J. (1998), "Calculating quantile risk measures for financial return series using extreme value theory", *Manuscript. Zurich, Switzerland: Department of Mathematics, ETH.*

Mc Neil A.J. (1999), "Extreme value theory for risk managers", *Internal modelling and CAD II, Risk books. London, UK*, 93-118.

Pickands, J. (1975), "The Two-Dimensional Poisson Process and Extremal Processes". *Journal of Applied Probability*, 8, 745-756.

Shaw, J. (1997), "Beyond VAR and Stress Testing", *VAR-Understanding and Applying Value at Risk, KPMG/Risk Publications*, pp. 221.224.

Sklar, A. (1959), "Fonction de repartition à n dimensions et leurs marges", *Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 229-231.