Faire réussir les élèves : Outils pour la construction de situations d'enseignement / apprentissage en mathématiques dans l'enseignement secondaire

Isabelle BLOCH[1]

Résumé :

En mathématiques, des énoncés formels ne peuvent, à eux seuls, donner accès au sens des objets mathématiques en jeu. De fait, les cours donnés à l'université comme au secondaire sont en général bien structurés, mais ils manquent d'exemples, de situations de recherche et de questions sur le savoir ; les étudiants n'étant pas en mesure de poser eux-mêmes ces questions, ils se bornent à 'apprendre' ce cours. Les situations construites dans la TSD (Théorie des Situations Didactiques) sont appuyées sur des analyses épistémologiques et didactiques pour faire accéder les étudiants au sens des concepts mathématiques. La dimension apportée par la recherche de problèmes est aussi le plaisir de chercher et de trouver.

Mots-clés : situations mathématiques, TSD, conditions de réussite, organiser l'enseignement.

Abstract:

Formal structures in mathematics do not give access to the meaning of mathematical matters. Actually, lessons at University or secondary school are usually well structured, but they lack of examples, research situations, and questions about mathematical knowledge. Students are not able to ask themselves these questions, so in the best case they just 'learn' the lessons. Situations in the TDS (Theory of Didactical Situations) are built from a rigorous epistemological and didactical analysis in order to allow students to gain access to the meaning of concepts. This also includes the pleasure of searching problems and finding solutions.

Keywords: mathematical situations, TDS, conditions for success, organize the teaching.

[1] . Professeure émérite – Didactique des mathématiques. Université de Bordeaux, France.

Introduction

Faire des mathématiques avec plaisir, à tous les niveaux, est-ce un enjeu irréaliste ? Ou y a-t-il des outils et des attitudes qui le permettent ? Et si oui, quelles sont les conditions à respecter pour le rendre possible ? Nous pensons que l‟état d‟avancement de la recherche en didactique, actuellement, est suffisant pour avancer des solutions intéressantes, et applicables à tous les niveaux de l‟enseignement. En accord avec les résultats de ces recherches, la réussite d'un enseignement faisant découvrir les mathématiques aux élèves doit les rendre conscients de leurs possibilités, et du plaisir que procure la recherche de problèmes lorsque l'on est capable de trouver des solutions inventives et de comprendre ce que sont les objets mathématiques : cette réussite doit s'appuyer sur deux dimensions, l'une épistémologique et l'autre sociale et psychologique. Il s'agit de travailler des problèmes pertinents, dans une ambiance de confiance et de recherche collective.

La Théorie des Situations Didactiques promeut l'enseignement des notions fondamentales des mathématiques, à un niveau donné, par des situations adéquates favorisant des phases significatives de recherche par les élèves ; on ne peut qu'être sensible à la dimension épistémologique de ces situations et, de ce fait, à l'importance des objets mathématiques qu'elles impliquent. Or ce que l'on constate trop souvent chez des élèves en cours de mathématiques, c'est que l'enseignement transmissif, encore trop pratiqué de façon exclusive, ne les met pas en mesure de comprendre la nature de ces objets et leur fonctionnement.

Les résultats des dernières évaluations PISA se sont avérés décevants dans un certain nombre de pays. Certes le format des questions de PISA n'est pas adapté à tous les élèves dans le monde, et les différences culturelles peuvent avoir un impact non négligeable. Cependant nous pouvons tirer des résultats de PISA quelques enseignements utiles, et, en les couplant avec des études didactiques, trouver des moyens efficaces de faire faire des mathématiques en classe.

1. Faire faire des mathématiques

Ainsi pour que les élèves puissent *faire* des mathématiques, et pas seulement se voir prescrire des formules, des raisonnements… dont souvent ils ne voient pas l'utilité et la cohérence, nous pouvons retenir quelques idées énoncées dans le bilan du dernier PISA. Nous essaierons ensuite de cibler les points sensibles de l'enseignement / apprentissage, et de voir comment des situations construites dans la TSD peuvent répondre aux nécessités d'un enseignement actif dans lequel les élèves peuvent s'investir, et par voie de conséquence, comprendre de quoi sont faites les mathématiques...

1.1 Quelques (bons) principes issus de PISA

Dans son dernier bilan, PISA explicite quelques-unes des conditions qui peuvent amener à une réussite de l'enseignement des mathématiques, et *in fine* à la réussite des élèves :

- Les élèves sont en confiance, ils sont actifs en faisant des mathématiques ; ils cherchent des problèmes, et savent que faire des erreurs est normal et même productif : en effet, lorsqu'on s'est trompé et que l'erreur a été reconnue, le savoir visé est plus fortement ancré en mémoire, ainsi que les neurosciences l'ont également prouvé ;
- Les situations proposées renforcent l‟attrait des mathématiques ; ceci conduit bien sûr à se demander comment organiser ces situations, lesquelles sont nécessaires, et quels sont les rôles respectifs du professeur et des élèves dans la conduite des situations ;

- Les professeurs confortent la motivation des élèves et leur confiance en eux, réduisant leur anxiété, par une attitude bienveillante et des encouragements à chercher ;
- Les professeurs connaissent les obstacles à l‟apprentissage des mathématiques, et savent conclure une situation de recherche par les savoirs ; ce dernier point est un élément indispensable de la conclusion des situations, afin que celles-ci ne débouchent pas "dans le vide", les élèves étant supposés (à tort !) tirer eux-mêmes les conclusions de la recherche du problème.

L'énoncé de ces conditions permet aussi de comprendre pourquoi on observe des échecs aux évaluations PISA, si l'on y ajoute des points marquants de ces évaluations qui ne sont pas forcément dans la 'culture' de l'enseignement des mathématiques dans certains pays :

- Les réponses dans PISA n‟ont pas à être prouvées, or en France par exemple il est fréquent qu'un professeur n'accepte pas une réponse non justifiée ; à PISA il faut donc oser répondre même si l‟on ne sait pas prouver, sachant que s'il s'agit d'un QCM, on peut répondre sur son intuition, ou même au hasard, et avoir une chance sur quatre de réussite…
- Les questions sont formulées en termes de vie quotidienne, or les problèmes scolaires sont souvent écrits en termes d‟équations algébriques décontextualisées, ainsi, à l‟école, les élèves rencontrent des équations comme $5x + 7 = 4$ ou $5\ x^2 + 7 = 29$ mais pas souvent un problème comme le suivant :

  La vitesse du train est de 180 km/h, le passager est parti à 8h32, il doit parcourir 235 km, à quelle heure arrive-t-il ?

Des études ont montré que, même pour les situations de proportionnalité par exemple, les professeurs privilégient souvent des preuves avec coefficient ou tableau de proportionnalité, mais pas la linéarité qui est plus intuitive et permet de mieux ancrer la solution dans le contexte du problème ; ces résultats ont été notamment exemplifiés dans la thèse de Voisin (2013).

On peut donc se demander quels sont tous les facteurs à prendre en compte pour organiser l'enseignement d'une notion de façon efficace et qui 'parle' aux élèves.

1.2 Les dimensions de l'enseignement à prendre en compte

Dans le domaine cognitif, il faut viser des objectifs qui tiennent compte des connaissances déjà acquises par les élèves (ce que l'on appelle leur répertoire antérieur, cf. Bloch & Gibel, 2011), de façon à ce que ces élèves soient en mesure de comprendre les concepts en jeu dans la situation (en clair, de se saisir de la consigne), et de faire des liens avec les thèmes vus en cours. L'élève devra aussi analyser le contenu de la consigne et si besoin adapter ses techniques, puis il lui faudra expérimenter des procédures.

Dans le domaine affectif, l‟élève aura par exemple à utiliser son expérience pour faire des liens avec le monde et les problèmes „réels‟, si ceux-ci sont impliqués dans le travail demandé ; et de toute façon, il devra collaborer, travailler et communiquer en groupe.

Dans le domaine technique et psychomoteur, cet élève devra comprendre et savoir utiliser les techniques et théorèmes en algèbre, géométrie… ce qui ne pourra sans faire sans un entraînement spécifique, ce que la TAD (Théorie Anthropologique du Didactique) appelle le *travail de la technique*.

1.3 La Théorie des Situations Didactiques (TSD) : construire des situations expérimentales d'un savoir mathématique

La construction d'une situation part d'un savoir mathématique analysé pour déterminer une situation de recherche avec un milieu fournissant des rétroactions aux essais de réponses des élèves, et cette situation comporte un travail collaboratif de ces mêmes élèves. Une situation comporte donc :

- Des questions finalisées par le savoir, avec des variables didactiques bien choisies ;
- Des milieux de recherche avec des variables (bien) choisies, référant au savoir mathématique mis en jeu dans une situation à dimension adidactique (cf. Bloch, 1999) ;
- Des outils de validation accessibles aux élèves avec leurs connaissances.

Cette dimension – étape – de validation est essentielle : elle intervient au niveau de milieu M-2 et surtout M-1 (voir ci-dessous le tableau des milieux) et c‟est cette validation qui montrera que la solution choisie est nécessaire, et qui permettra ensuite au professeur de conclure la situation par une institutionnalisation, c‟est-à-dire une déclaration des savoirs, savoirs qui pourront ensuite être réutilisés dans des problèmes, des techniques, de nouvelles situations, et qui donc s‟ajouteront au répertoire didactique de la classe et le feront évoluer (Gibel, 2015 et 2018 ; Bloch et Gibel, 2011).

En effet une situation n‟est pas juste une „tentative‟ des élèves. On a pu parfois observer une opinion commune dans le constructivisme : la validation doit s'appuyer sur les feed-back de la situation ; mettre matériellement en défaut des règles erronées "suffirait" à construire du sens. Ceci s‟apparente à un contresens issu des conceptions de l'apprentissage par adaptation. Or étant donnée la spécificité des savoirs mathématiques, ceux-ci ne peuvent s'apprendre par imprégnation : un savoir mathématique ne peut résulter d'une simple confrontation à un milieu qui envoie une rétroaction en cas d'erreur. Certes l‟élève verra que sa réponse est inadéquate, mais ne saura pas identifier le pourquoi de cette erreur, ni décoder le savoir sous-jacent.

La validation dans une situation de recherche adidactique sera faite obligatoirement par la mise en cohérence d'une règle dans des réseaux de significations mathématiques, ce qui ne survient pas au niveau de l‟action des élèves, mais par une action réfléchie du professeur, qui va ensuite déclarer le savoir – en s‟appuyant sur les résultats trouvés par les élèves dans la première phase de recherche et la deuxième phase d‟énoncé des arguments construits.

Cette déclaration du savoir se fera évidemment avec les signes mathématiques connus : les ostensifs selon Chevallard (1995).

En conclusion, il ne suffit pas d‟imposer aux élèves la „*bonne*‟ manière de faire des mathématiques, avec des formules : si les élèves ne peuvent pas expérimenter, chercher… et construire leur autonomie, ils ne comprendront pas ce que sont les objets mathématiques, ni quels problèmes ces objets et techniques permettent de résoudre… et ils échoueront aussi aux tests type PISA.

2. Les milieux d'une situation adidactique : structure et exemples

Selon les précisions ci-dessus, les milieux modélisent le travail des élèves – et du professeur dans les trois phases de la situation envisagée.

2.1 Les niveaux de milieux dans la phase de recherche d'une situation

La dévolution de la situation est le travail consistant à expliquer aux élèves le problème qu‟ils ont à résoudre, à leur présenter le matériel – qui peut être tout à fait constitué d‟objets manipulables au niveau primaire, comme des cubes ou des jetons, mais qui sera fait de schémas, calculs, etc. au niveau secondaire par exemple.

M0 : milieu d‟apprentissage	E0 élève	P0 P enseignant déclarant le savoir	**Situation didactique**
M-1 : milieu de référence	E-1 élève apprenant	P-1 P en action, valide les résultats	**Niveaux**
M-2 : milieu heuristique	E-2 l‟élève cherche à résoudre le problème	P-2 P observateur et « dévolueur »	**a -**
M-3 : milieu matériel	E-3 l‟élève découvre le matériel et la consigne	P-3 P prévoit le „matériel‟ et la consigne pour l‟E	**didactiques**

Tableau 1 *– Les niveaux de milieu d'une situation adidactique.*

Ensuite le professeur poursuit la dévolution en observant le travail des élèves, et en guidant leur recherche si nécessaire. Certes la situation est (à dimension) adidactique, cela signifie que les élèves peuvent chercher, se tromper, proposer des solutions incomplètes, mais pas qu‟ils sont laissés seuls et qu‟aucun échange avec le professeur n‟est possible, si besoin.

L‟évolution du milieu amène à faire dans M-1 le bilan et la synthèse des recherches des groupes, en commençant généralement par ceux qui ont le moins avancé ; puis le professeur reprend la main en institutionnalisant le savoir travaillé, par exemple, les règles du calcul algébrique (si la situation porte sur la „découverte‟ de la double distributivité…) ou vectoriel (voir ci-dessous l‟exemple du rallye du plan).

On observe donc différents types de validation dans les niveaux de milieu de la situation

- - une validation matérielle dans le milieu heuristique M-2 : réussite / échec
- - une validation plus „théorique‟ dans M-1 avec les preuves des élèves.

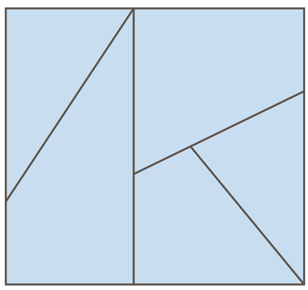
La validation théorique mathématique finale dans le milieu M_0 consiste en une formulation et argumentation mathématique, par le professeur, pour savoir : à quelle question mathématique on était en train de répondre, et avec quels outils ; et quels sont les ostensifs qui, en suivant, seront adéquats pour traiter les problèmes semblables à celui que l‟on vient de résoudre.

2.2 Un exemple de niveaux de validation : le puzzle

Dans la situation du puzzle, introduite par Brousseau et expérimentée en fin de primaire ou début du collège, on peut voir la différenciation des deux types de "validation" par les questions auxquelles elles répondent : ça marche ? ou : pourquoi ça marche ?

Les élèves sont en groupe de cinq, mais dans un premier temps ils travaillent seuls : ils doivent reproduire chacun une des pièces du puzzle, avec la consigne que la longueur d‟un côté, en bas à gauche, de 4 cm devient 7 cm ; et il faut transformer toutes les pièces du puzzle de façon à l‟agrandir et à pouvoir reformer un carré plus grand avec les nouvelles pièces.

Première solution appliquée par les élèves dans M-2 :
on ajoute 3 à toutes les dimensions : cela ne marche pas
on n‟arrive pas à reconstituer le puzzle…
ou on fait 2×4 – 1 : cela ne marche pas non plus…
Ou ×7/4 – mais cette solution est rarement proposée
par les élèves à ce niveau ;



Ou la linéarité : 4 → 7 donc 2 → 3,5 et donc 6 → 10,5 …
Cette procédure sera validée dans M-1
C'est aussi la façon la plus logique de résoudre le problème, vu le contexte, et celle qui peut être trouvée par les élèves, et institutionnalisée par le professeur. Cette procédure pourra aussi être réinvestie dans d'autres problèmes de proportionnalité.
Nous donnons en suivant des exemples de situations expérimentées au niveau secondaire.

3. Des exemples de situations

Ces exemples concernent deux domaines : les fonctions et la géométrie vectorielle.

3.1 Un milieu graphique pour l'enseignement des fonctions[2] : la situation « Graphiques et chemins »

Il s'agit de construire une situation qui propose à l'élève des questions, questions qu'il résoudra dans un milieu de représentations fonctionnelles : des ostensifs de fonctions. Ces questions doivent être fortement liées à des objets de l'analyse (fonctions diverses, et leurs propriétés), et l'élève doit pouvoir interagir avec le milieu proposé : ce milieu doit pouvoir offrir des rétroactions, c'est-à-dire que le travail de l'élève doit recevoir des validations pertinentes.

De plus cette construction obéit comme il a été dit à des impératifs relatifs au savoir :
- il est nécessaire de pouvoir instituer en savoir le produit des interactions dans la situation ;
- il faut que l'action, les connaissances produites et formulées soient intelligibles et utilisables pour le savoir (du professeur).

Au niveau envisagé (élèves de 16-17 ans) le milieu comporte déjà des représentations des objets mathématiques ; comment les choisir et les organiser ? Un préalable à la construction d'un tel milieu est donc l'étude des caractéristiques des registres disponibles pour les notions d'analyse, et des possibilités de construire des tâches accessibles dans ces différents registres.

Les registres disponibles pour l'étude des fonctions sont a priori :
- Le registre numérique (tableaux de valeurs)
- Le registre algébrique (équations de droites, de fonctions)
- Le registre géométrique (grandeurs géométriques variables)
- Le registre graphique (courbes dans un repère)
- Le registre formel (notations f, f^1, fog , $f(x)$, etc…)
- L'infini, et les représentations qui lui sont liées, ont un statut à part, ils sont utilisés pour l'heuristique mais pas pour valider au niveau de l'enseignement secondaire.

Le registre algébrique pose la question des connaissances antérieures des élèves et des types de fonctions à fournir ; dans le registre graphique on peut se demander quel type de validation est possible ? traditionnellement le registre graphique n'est pas un registre de validation. Pour qu'il le devienne, il faut l'outiller de façon significative, soit par un outil informatique (Cabri par exemple, ou Géospace), soit, et c'est le choix fait ici, par des chemins (voir ci-dessous).

Donc non seulement ces registres n'ont pas tous les mêmes fonctionnalités de représentation, mais ils n'outillent pas de la même manière pour valider et ils ne "montrent" pas les mêmes propriétés des fonctions. On dira qu'un ostensif pris dans un registre donné est un *représentant* d'un objet mathématique, et il en rend manifeste ou non certaines propriétés.

[2] Ce paragraphe s'appuie sur l'article publié en 2002 dans Petit x, n° 58. La situation est due à Pedro Alson, qui l'a décrite dans sa thèse.

La prise en compte de la nécessité de valider impose, comme il a été dit, une étude des questions didactiques liées à la validation. A l‟entrée dans une théorie nouvelle complexe comme l‟analyse par exemple, l‟on ne dispose pas d'emblée du système servant à valider, et le système de preuve de l‟analyse est en rupture avec celui de l‟algèbre : les formulations des preuves de l‟analyse apparaissent comme une “boîte fermée” , ainsi : | , ε ∀ a - b ε < | . Or il n‟est rien moins qu'évident pour l'élève qu‟en ouvrant la boîte on trouvera a = b.

Le milieu matériel est constitué de :
- repère du plan et graphiques fonctionnels
- données de fonctions ou de contraintes amenant à construire des RGC (représentations graphiques cartésiennes) de fonctions, ou à répondre à des questions relatives aux propriétés des RGC construites.
- moyens de validation : des chemins et graphiques.

Un ***chemin*** est une trace graphique partant d‟un point de l‟axe x‟Ox ou de l‟axe y‟Oy, et comportant :
- un segment parallèle à l‟un des axes, et aboutissant sur un point d‟une courbe ;
- un segment partant de ce dernier point, parallèle à l‟autre axe, et aboutissant sur le premier axe.

Suivant l‟axe dont on part, un chemin est un chemin *aller* ou *retour*. La figure ci-dessous représente les trois chemins fondamentaux :

Un chemin aller permet d‟identifier un nombre et son image ; il est noté par le point de départ et le point auquel il aboutit, à savoir *(x,f(x))*.Un chemin retour permet d‟identifier un nombre et son antécédent ; il est codé : $(y, f^{-1}(y))$. Un chemin qui passe par la bissectrice est particulier en ce sens que les chemins aller, retour ne se distinguent que par le sens de parcours, ils sont codés h ou k et correspondent aux trajets (h, h) ou (k, k) dans les deux sens.

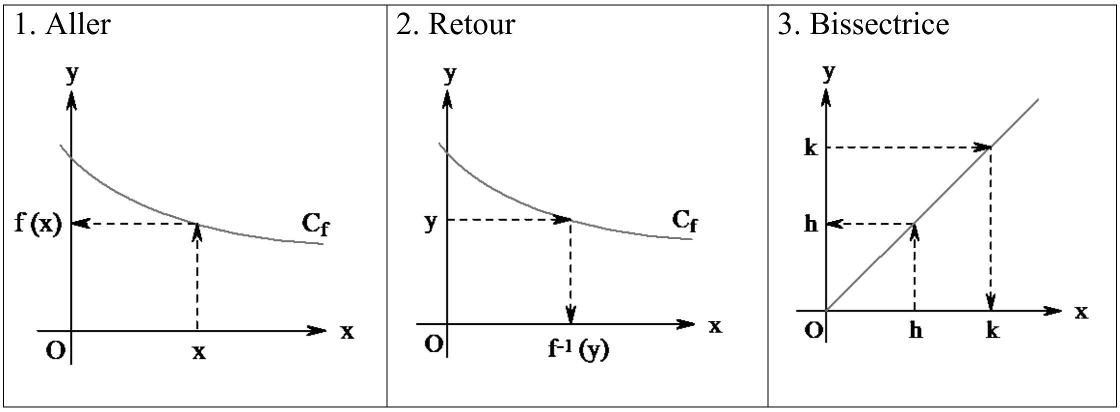


Figure 1 *– Les chemins pour valider dans le milieu matériel*

Le but de la situation est la recherche de fonctions sous contrainte d‟inégalités. Ainsi le premier graphique permet de poser la question d'une fonction discontinue : est-ce bien une fonction ? Les chemins sont un outil pour répondre, puisque l'on dispose d'un critère pour décider si une courbe est celle d'une fonction : en partant d‟un point *x* sur l‟axe des abscisses, un chemin ne donne qu‟une seule image *f(x*). Le milieu graphique permet donc de construire, par le jeu des contraintes, des fonctions nouvelles (non encore rencontrées) et de valider des réponses à des questions concernant ces nouvelles classes de fonctions.

Dans le deuxième exemple ci-dessous, les élèves affirment : entre a et b, elle est décroissante. Donc la question est : la condition $\forall\ x / a < x < b\ ,\ f(a) > f(x) > f(b)$ est-elle, ou non, une condition équivalente à “*f* décroissante sur [a,b]” ? Les élèves sont en mesure de produire graphiquement des contre-exemples (graphique qui oscille entre a et b). Ceci conduit à un travail sur le sens et la nécessité des quantificateurs.

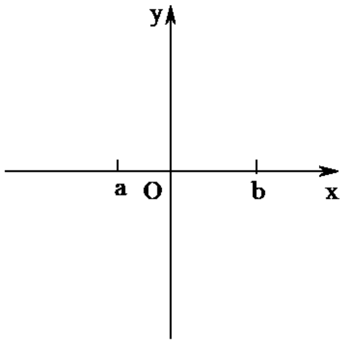
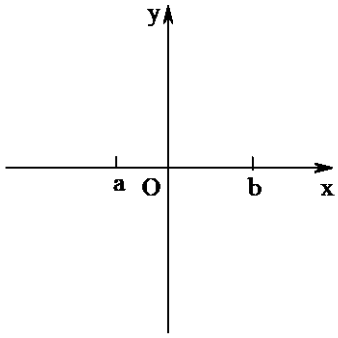
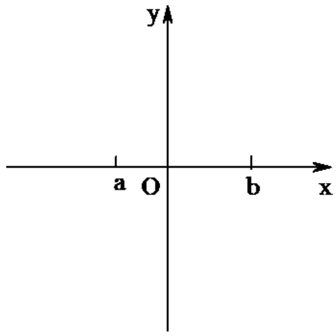
		
$\forall x$ / x < a ou x > b, f(x) < f(b) et $\forall x$ / a < x < b , f(a) > f(x) > f(b)	$\forall x$ / a < x < b , f(a) > f(x) > f(b)	$\forall x$ / x > b, f(a) > f(x) > f(b) $\forall x$ / x < b, f(x) > f(b)

***Figure 2** – Trois exemples de consignes*

L‟expérimentation (détaillée dans Bloch, 2002) montre une prise en mains par les élèves de la notion de fonction „quelconque‟ et de propriétés de ces fonctions. Notons que la conduite de la situation se fait sur quelques séances, et, comme dans toutes ces pratiques, le professeur reprend ensuite un fonctionnement plus „classique‟ et fait travailler aussi les techniques, sur des fonctions usuelles, en utilisant aussi des exercices de manuels scolaires.

3.2 Le rallye du plan

Cette situation, introduite à l‟IREM de Bordeaux par Annie Berté, est une situation adidactique sur la multiplication des vecteurs par des réels. Le support est la grille dessinée ci-dessous.

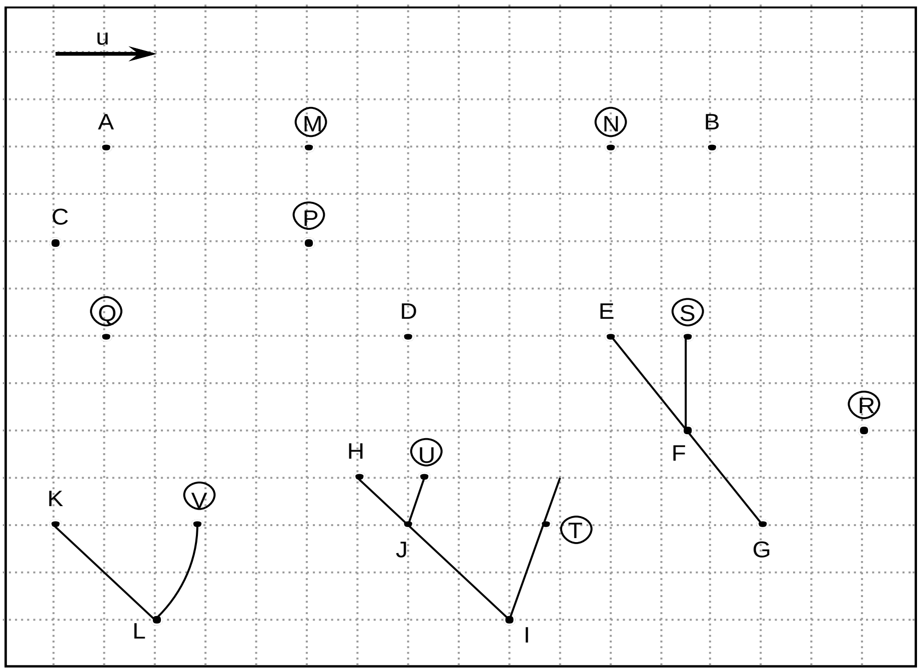


***Figure 3** – La grille en dimension 1*

Première phase : à partir de points, et de combinaisons linéaires de vecteurs donnés, "fabriquer" d'autres points ; cette phase vise la constitution du répertoire vectoriel, et modes opératoires.

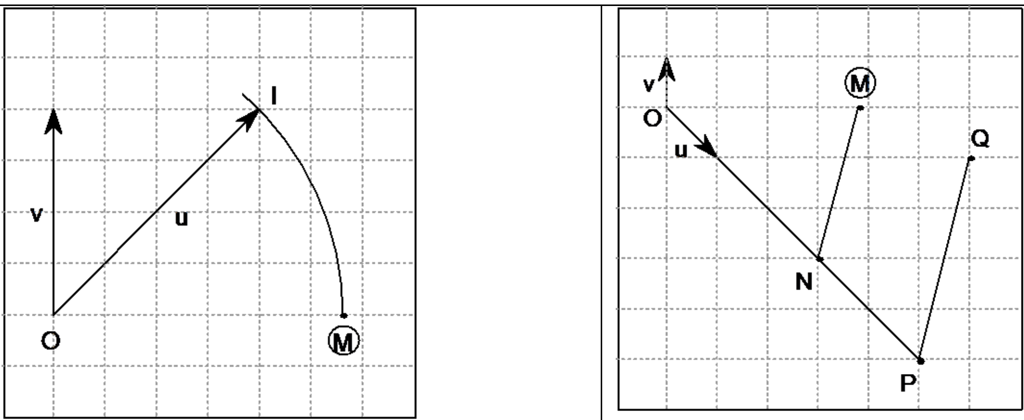
Deuxième phase : retourner le jeu, c'est-à-dire trouver comment les points ont été construits afin de les atteindre, ce qui constitue le milieu de référence, avec une propriété essentielle : avec des vecteurs et des nombres, on peut construire des points du plan.

Troisième phase : identification de la structure, avec des vecteurs en nombre suffisant et des nombres, on peut atteindre n'importe quels points fixés a priori. Cette phase constitue l‟institutionnalisation du savoir visé.

La situation est en forme de jeu, avec des émetteurs qui envoient des messages à des récepteurs, lesquels doivent retrouver les points dont disposent les émetteurs. La consigne est formulée comme suit : « Les récepteurs ont la même grille que vous, mais sans les points entourés. Vous devez les leur faire trouver en leur envoyant un message. Attention, ce message ne doit contenir que des points, des vecteurs et des nombres. »

Les premières tentatives montrent bien comment les élèves cherchent avec leurs connaissances antérieures, ainsi une élève émettrice, voulant définir le point V, commence par écrire : longueur KV = KL + 45° - ce qui bien sûr n‟est pas une écriture mathématique „correcte‟, et ne correspond pas aux contraintes de la consigne : c‟est juste une phase du processus l‟amenant à trouver la façon de construire V puis „la bonne‟ formulation.

En dimension 2, la situation se poursuit avec ce schéma :



OM =√2 (u – v)

OM = 15/4 (u + v)

Figure 4 *– La grille en dimension 2*

La consigne reste la même : les émetteurs envoient un message ne comportant que des nombres et des vecteurs. Bien entendu ils doivent préalablement trouver eux-mêmes la formule, qui ne leur est pas donnée. Ceci les oblige à composer ensemble des vecteurs, et les amène à *voir* le résultat sur le schéma.

3.3 Les variables didactiques

Dans ces situations, le choix des valeurs des variables didactiques est essentiel, comme je le notais dans le texte sur les milieux dans la théorie des situations didactiques (Bloch, 2002a).

Dans la situation sur les vecteurs, on a bien les trois phases de la situation: recherche, validation, institutionnalisation ; et les variables didactiques sont 1) la nature des coefficients (entiers, rationnels, irrationnels…), 2) le nombre de vecteurs, et 3) la contrainte de la consigne, contrainte qui oblige les élèves à chercher si un vecteur s‟exprime effectivement comme combinaison linéaire d‟un ou de deux autres.

Dans la situation sur les fonctions, les variables sont la contrainte du travail graphique, et la nature des fonctions – et l‟un des buts est de faire découvrir aux élèves, qui n‟ont étudié à ce niveau que des fonctions affines ou du second degré, au mieux, qu‟on peut déclarer des propriétés de fonctions *quelconques*. Cette situation permet de faire construire aux élèves des sommes et produits de fonctions, et de se prononcer sur les propriétés trouvées. Ainsi lors d‟une séance des élèves déclarent : « Le produit de deux droites est une droite », ce qu‟un travail graphique permet immédiatement de rejeter. Ils „découvrent‟ alors que si l‟une des fonctions est nulle, le produit aussi est nul en ce point… redécouverte d‟une propriété numérique !

Conclusion

Les situations

L‟expérimentation menée prouve qu‟il existe des situations permettant de faire travailler, dans le secondaire, les connaissances nécessaires à la transition avec le supérieur : ainsi la situation “ Graphiques et chemins ” donne des possibilités pour ce travail, sans aborder directement le formalisme mais en construisant des outils pour l'entrée dans ce type de validation, et en s‟appuyant sur des connaissances des élèves. La situation du "Rallye du plan" introduit la multiplication des vecteurs par des réels avec la fonctionnalité de ce savoir, et non comme un calcul imposé dont on ne connait pas le sens.

Dans ce travail bien sûr il y a, pour chaque savoir, la nécessité d‟analyser la succession des situations, et les expériences à faire vivre aux élèves pour aboutir au sens mathématique „final‟, ce qui permettra d‟articuler la situation avec la définition des objets mathématiques et le formalisme permettant ensuite le travail de la technique.

Notons que des situations existent aussi sur l‟algèbre élémentaire (les suites de Fibonacci, à retrouver sur le site de l‟association des professeurs de mathématiques www.apmep.fr) ; sur l‟introduction de la notion de limite (cf. Bloch et Gibel, 2011) ; sur les bases de numération (le jeu des envahisseurs, Bloch 2005).

La formation des professeurs

Il faut insister aussi sur l‟indispensable formation des professeurs, afin qu‟ils deviennent capables de laisser les élèves chercher et se tromper, de favoriser le travail en groupes, en aidant les élèves de façon bienveillante. Lors des phases de formulation et validation, ils doivent aussi laisser les élèves présenter leur argumentation, et ne pas imposer immédiatement la formulation „mathématique correcte‟. Il leur reviendra ensuite d‟énoncer eux-mêmes ces règles de formulation des objets mathématiques concernés.

Il est important aussi de savoir proposer des situations concernant le „monde réel‟, par exemple sur la proportionnalité. Enfin, institutionnaliser les savoirs est un rôle essentiel du professeur, c‟est-à-dire faire le bilan de la situation, dire quels sont les objets mathématiques que l‟on vient de découvrir, et ensuite travailler les techniques.

Les ressources

Des ressources sont en ligne (en accès libre) pour trouver des situations, travailler sur leur gestion, sur des thèmes mathématiques spécifiques, par exemple sur le site de la revue Petit x : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique12.

D’autres situations pour l’enseignement secondaire sont disponibles sur le site Sesamath, ou sur http://www.ens-lyon.fr/savoirs/moocs/moocs-efan. Le site des IREM www.univ-irem.fr propose aussi des publications avec des PER notamment http://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/revue_x/fic/94/94x1.pdf (parcours d’étude et de recherche : IREM de Poitiers, Limoges, Grenoble…), sur les « Maths à modeler », ou des MOOC comme http://www.ens-lyon.fr/savoirs/moocs/moocs-efan.

Références

1. ALSON P. (1987) Metodos de graficacion. *Université de Caracas*, Venezuela.
2. BLOCH I. (1999) L’articulation du travail mathématique du professeur et de l’élève : un exemple dans l’enseignement de l’analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.19/ 2, *La Pensée Sauvage*, Grenoble. Accessible sur Reasearchgate.
3. BLOCH I. (2002a) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations : recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. *Actes de la* 11^e *Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 125-139, Grenoble : La Pensée Sauvage.
4. BLOCH I. (2002b) Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction au lycée, *Petit x,* **58**, 25-46, ARDM et ADIREM. *Disponible sur le site de Petit x*.
5. BLOCH I. (2005) Dimension adidactique et connaissances nécessaires : un exemple de "retournement" d'une situation. *Actes du colloque Guy Brousseau, juin 2000*. Accessible sur Reasearchgate . https://www.researchgate.net/publication/275212072
6. BLOCH I. (2009) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves : Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x,* **81**, 25-52.
7. BLOCH I., GIBEL P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d’enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **31-2**, 191-227. Grenoble : La Pensée Sauvage.
8. BLOCH I. (2015) Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques : Quelques réflexions sur l’épistémologie et la didactique. *Petit x*, **97**, 71-79.
9. CHEVALLARD Y. (1995) Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x*, **42**, 37-53.
10. COULANGE L., GRUGEON B. (2008) Pratiques enseignantes et transmission de situations d’enseignement en algèbre. *Petit x,* **78**.
11. GIBEL P. (2015) Mise en œuvre d’un modèle d’analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l’école primaire. *Éducation et Didactique*, 9-2, 51-72.
12. GIBEL P. (2018) *Élaboration et usages d’un modèle multidimensionnel d’analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse de l’Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Pau et des Pays de l’Adour, https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188
13. GRENIER D., PAYAN C. (2007) Des "situations recherche" pour l'apprentissage des savoirs transversaux, *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque EMF 2006*, Bednarz, N., Mary, C. (dir.) Sherbrooke : Éditions du CRP.
14. RODITI E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques, entre contraintes et liberté pédagogique.* L’harmattan, Paris
15. ROUSSET-BERT, S. (2001) Les activités, un thème à retravailler, *Petit x,* **56**.
16. SACKUR, C., MAUREL, M. (2000) Les inéquations en classe de Seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x*, **53**.

17. ROGALSKI M. (1990) Graphiques et raisonnements : visualiser des fonctions. *in "Audi-math" n°2, dossier de l'enseignant de mathématiques, Centre National de Documentation Pédagogique, Ministère de l'Education Nationale*, Paris.
18. VANDEBROUCK F. (2008). *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants*, Toulouse : Octarès.
19. VOISIN S. (2013) *L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA.* Thèse, Université de Bordeaux. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00939795/document