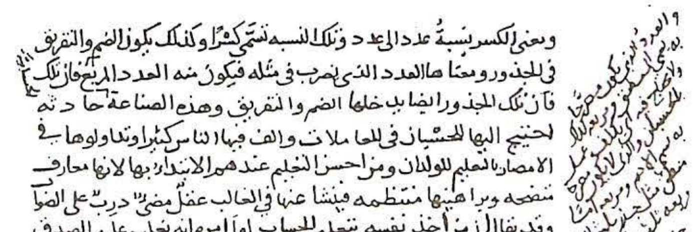
Influence de la tradition algébrique du Maghreb sur l'œuvre du mathématicien italien Léonardo Fibonacci (1170 – 1241)

Professeur Djamil AÏSSANI et collaborateurs (*)
Société Savante Gehimab Béjaia
http://www.gehimab.org

Introduction

Au milieu du XIXe siècle, l'accessibilité des écrits du sociologue Ibn Khaldūn (1332 - 1406) va être à l'origine des premières recherches sur les mathématiques médiévales du Maghreb [8], [7]. On découvre alors le rôle non négligeable joué par la tradition mathématique du Maghreb dans la diffusion du savoir à travers la Méditerranée : popularisation des chiffres arabes en Europe par le célèbre mathématicien italien Léonardo Fibonacci (1170 – 1241) [1], [2], [3], utilisation d'un symbolisme spécifique [5], influence sur les principes logico-mathématiques du philosophe catalan Raymond Lulle (1235 - 1315) [5], [1],...

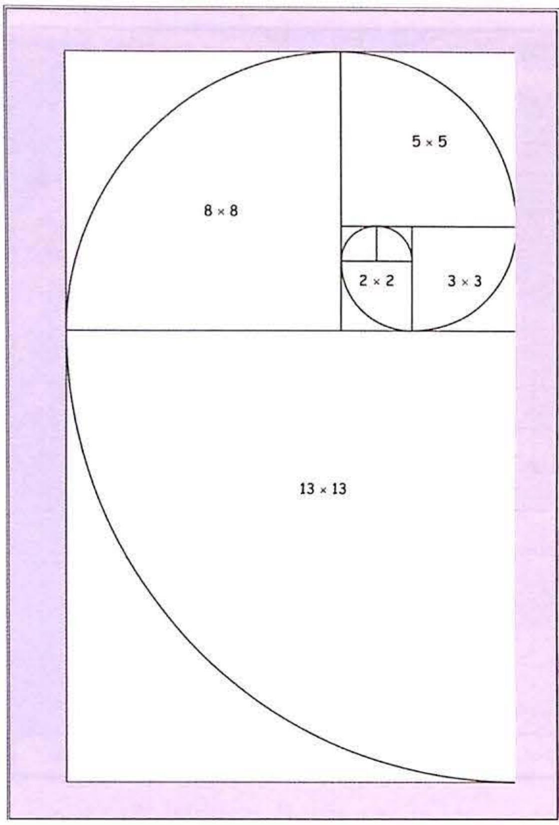
Sur la base de multiples commentaires culturels et scientifiques, la première partie de cet article proposera à des non spécialistes de découvrir la tradition algébrique du Maghreb et son environnement, à travers la contribution des principaux Uléma des XIIe - XVe siècles : Ibn al-Yasamin, al-Qurashī (Bougie), Ibn al-Bannā' (Marrakech), ... La deuxième partie abordera l'influence (de cette tradition) sur l'œuvre de Léonardo Fibonacci.



I – Le début de l'algèbre

Il semble qu'une approche algébrique ait existé chez les babyloniens, les grecs et les indiens. Cependant, on retient que l'algèbre est né avec la civilisation des Pays de l'Islam, et plus précisément avec l'école d'al-Khawārizmī (mort en 850). Entre le IXe et le XIVe siècle, plusieurs écoles vont se succéder: l'école d'Abū Kāmil (mort en 930), celle d'al-Karaji (mort en 1029) et enfin celle d'as-Samawal (mort en 1175) [5], [6], [7]. Le lien de ces écoles avec l'Occident musulman est visible pour les écoles d'al-Khawārizmī et Abū Kāmil, mais moins évident pour les écoles d'al-Karaji et d'as-Samawal.

Les activités scientifiques dans le domaine de l'algèbre en Occident musulman débutent dès le



Léonardo Fibonacci

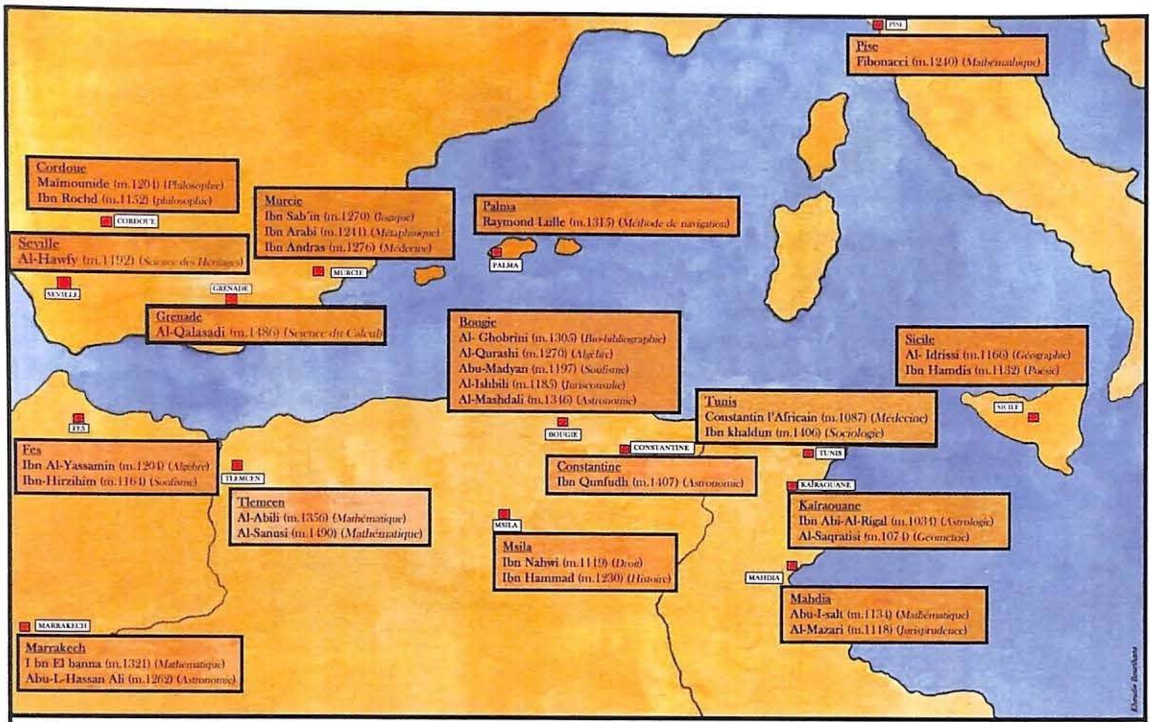
IXe siècle. Le *Kitāb Ikhtisar al-Jabr wa l-Muqābala* du mathématicien andalou Ibn Badr est un traité d'algèbre qui résume les procédés algébriques et s'inscrit dans la tradition d'al-Khawārizmī et d'Abū Kāmil. Quant aux *Urdjuza* du mathématicien maghrébin Ibn al-Yasamin (mort en 1204 à Marrakech), ils énoncent les algorithmes de résolution des six équations canoniques et les irrationnels. Ces poèmes algébriques servaient d'aide-mémoire, ce qui explique leur grande audience. Quant au *Kitāb al-Bayān wa t-Tadhkār* du mathématicien maghrébin al-Hassār (vivant en 1175), il traite de la numération, des opérations arithmétiques sur les entiers et sur les fractions,… Il s'agit de la plus ancienne source relative aux mathématiques pour la tradition de l'Occident musulman (Afrique du Nord et Andalousie). Dans ce livre, al-Hassār utilise les chiffres *Ghubār* et le trait de fraction. Il définit différents types de fractions et réserve à chaque type un symbole spécifique, sans pour autant en revendiquer la paternité, les notations retenues étant différentes de celles utilisées en Orient et héritées des indiens. Précisons que cet ouvrage était connu en Europe puisqu'il a été traduit en hébreu par Moïse Ibn Tibbon en 1271 à Montpellier.

II - La tradition algébrique des Pays de l'Islam selon Ibn Khaldûn

Dans les prolégomènes, après avoir exposé les principes fondamentaux de l'algèbre, Ibn Khaldūn fournit de précieuses informations sur le relais des connaissances algébriques jusqu'à son époque : « *Le premier qui écrivit sur cette branche (l'Algèbre) fut Abū 'Abd Allāh Al- Khawārizmī, après lequel vint Abū Kāmil Shujā' Ibn Aslam. On a généralement suivi la méthode (d'al- Khawārizmī) et son traité sur les six problèmes de l'algèbre est un des meilleurs ouvrages composés sur la matière. Plusieurs auteurs, parmi les musulmans espagnols, ont écrit sur ce traité d'excellents commentaires, dont un des meilleurs est celui d'al-Qurashī (de Bougie)* » [8].

III - Al- Khawârizmî, l'initiateur de la tradition algébrique des Pays de l'Islam

Le premier algébriste cité par Ibn Khaldūn est le mathématicien persan *Muhammad Ibn Musa al-Khawārizmī* (780 - 850), auteur du premier traité d'algèbre Kitāb al-Jabr wa-l-Muqābala. Le terme Jabr, correspond à l'opération de transposition des termes négatifs d'un membre d'une équation dans



Du 12è au 14è siècle, Bougie fut le premier centre intellectuel du Maghreb central, la ville attira les savants venus de tout le Maghreb et Al-Andalus.

l'autre, de telle sorte qu'il n'y ait plus, de part et d'autre, que des termes positifs. Le deuxième terme Muqābala, signifie la simplification des termes semblables dans les deux membres d'une équation. Cette théorie concerne en fait la résolution, par des formules explicites, des équations des deux premiers degrés [1].

Dans la première partie de son livre, l'auteur, après avoir présenté le système décimal, commence par définir les termes primitifs, qui constituent les bases de son algèbre, à savoir : les nombres simples ('Adad Mufrad), l'inconnue, indifféremment appelée racine ou chose (Jidhr ou Shay'), de son carré (māl).

Après avoir introduit les termes primitifs, al-Khawārizmī introduit les six types d'équations canoniques. Ensuite, il donne les algorithmiques de résolution et démontre géométriquement les différentes formules des solutions. Il étudie quelques propriétés de l'application des opérations arithmétiques et de la racine carré sur les trois objets de son algèbre. Par la suite, il donne une quarantaine de problèmes montrant comment on doit se ramener à l'une des six équations canoniques (voir l'article de M. Abdeljaouad dans [5]).

Dans la deuxième partie de son traité, al-Khawārizmī résout quelques problèmes concernant les transactions commerciales, l'arpentage, à l'aide des outils algébriques de la première partie. Il termine son ouvrage par l'application de l'algèbre en science des héritages [6], [9]. Remarquons que le terme « algorithme » tire son origine du nom d'al-Khawārizmī.

IV - Abû Kâmil, le principal continuateur d'al-Khawârizmî

Après le traité d'al-Khawārizmī, il y a eu une extension du calcul algébrique. L'apport le plus significatif est dû à l'égyptien Abū Kāmil Shujā' b. Aslam (850-930). Dans son traité d'algèbre, l'auteur reprend les idées de bases développées par al-Khawārizmī. Il tente de détailler et de clarifier certains points obscurs du traité d'al-Khawārizmī. Il déduit également de nombreux problèmes qui en majorité mènent à d'autres espèces d'équations que les six canoniques.

Abū Kāmil commence par la résolution des six équations canoniques et le calcul algébrique. Dans la deuxième partie, il donne des problèmes d'application, tout comme al-Khawārizmī , mais avec plus de détails. Son apport apparaît dans la troisième partie du traité, dans l'étude d'équations où apparaissent des nombres irrationnels, en plus des entiers et des fractions habituelles, et dans la quatrième partie, dans le calcul d'éléments dans des polygones [5].

En plus des trois grandeurs définies par al-Khawārizmī ('Adad, Jidhr, mal), on observe (dans le traité d'Abū Kāmil) d'autres grandeurs telles que le Cube (Ka'b), le carré du carré (mal mal), ainsi de suite, en combinant le mal et le Ka'b, jusqu'à la sixième puissance. Toutefois, tout comme son prédécesseur, Abū Kāmil n'utilise aucun symbolisme [5].

Alors que le traité d'al-Khawārizmī s'adresse à un large public, celui d'Abū Kāmil, plus détaillé, s'adresse à un public plus restreint. En effet, l'utilisation de deux propositions d'Euclide, la cinquième et la sixième du livre II, permet de simplifier les représentations des solutions d'une équation quadratique [5].

V - Al-Qurashî et le prolongement de la tradition algébrique d'Abû Kâmil

Le troisième mathématicien cité par Ibn Khaldūn est al-Qurashī (mort en 1184). Originaire de Séville, il vécut et travailla à Béjaia (Bougie en français, Bgayet en berbère, Bugia en italien et en espagnol, Buzea en latin). Eminent mathématicien, spécialiste de l'algèbre et des Science des héritages, il eut de nombreux élèves. Parmi eux, citons Abū Muhamad al-Bijā'ī (m. 1223), l'un des Cadis et savants de Bougie cité par le bio-bibliographe al-Gubrīnī (mort en 1314). Les nombreux biographes (Ibn al-Khatīb, Ibn Farhūn,...) lui attribuent trois ouvrages : un abrégé dans les récitations coraniques, un ouvrage en sciences des héritages et un important commentaire en algèbre. Toutefois, tous ces ouvrages sont considérés comme perdus.

En parlant d'al-Qurashī, Ibn Khaldūn affirme que parmi tous les commentaires du traité d'algèbre d'Abū Kāmil, celui d'al-Qurashī est l'un des meilleurs qui aient été rédigés. C'est l'unique Sharh qui a eu une influence dans les ouvrages maghrébins.

En ce qui concerne le contenu de ce traité, A. Djebbar, en se basant sur les informations fournies par Ibn Zakarriyā al-Garnātī (m. 1403) dans son ash-Sharh al-Kabīr (le grand commentaire explicatif) constate qu'al-Qurashī n'a pas fait un commentaire classique du traité d'Abū Kāmil. Il en a pris la matière et y a introduit quelques modifications: d'abord, au niveau de l'agencement des sujets exposés, en commençant par exemple par les opérations sur les monômes et les polynômes, avant d'aborder la résolution des équations. Ensuite, au niveau des équations canoniques simples, en changeant l'ordre traditionnel de leur exposition et de leur résolution.

On remarque que les équations sont ordonnées selon l'ordre croissant des degrés intervenant dans leurs premier et deuxième membres. Cette permutation, selon A. Djebbar, est due à des préoccupations, des orientations et une pratique nouvelles chez les mathématiciens musulmans postérieurs à Abū Kāmil. Notons que Fibonacci, qui semble être à l'écart de cette dynamique, du moins pour cette partie, a gardé la même classification qu'Abū Kāmil comme le prouve d'ailleurs ce passage extrait de son Liber Abaci :

« 1- Primus quidem modus est, quando quadratus, qui census dicitur, aequatur radicibus (x2 = b x).

2- Secundus, quando census aequatur numero (x2 = c);

3- tertius quando radix aequatur numero (b x = c)» (cf. Baldassare Boncompagni, Scritti di Leonardo Pisano, Vol. I, Rome, Page 406). En revanche, Fibonacci n'a pas gardé l'ordre d'al-Khawārizmī et d'Abū Kāmil au regard de la classification des équations du deuxième type.

Enfin, al-Qurashī a introduit des démonstrations légèrement différentes de celles d'Abū Kāmil. L'existence de ce traité montre que l'enseignement de l'algèbre à Bougie, (Bejaia) et en Occident musulman avait atteint un niveau élevé au moment du séjour de Léonardo Fibonacci.

VI – Ibn al-Bannâ' et la transmission de l'algèbre

La tradition mathématique médiévale du Maghreb peut être cernée à partir d'un savoir stabilisé [7]. En effet, c'est au cours des XIIIe – XIVe siècles que cette tradition se met en place sous l'apport essentiel de l'école de Marrakech. Cette dernière école sera structurée par le célèbre mathématicien Ibn al-Bannā'(1256 – 1321), ses élèves, puis ses commentateurs. Plusieurs d'entre-eux sont effectivement originaires d'Algérie et de Tunisie.

Les *Isnād* représentent une chaîne d'autorités, partie essentielle de la transmission d'une tradition (ou du savoir). Abu l'Abbas Ahmed, descendant direct des princes hammadites (cf. [1]) a été un disciple direct d'Ibn al-Bannā'. L'Idjaza (diplôme) que lui a délivré son maître, a été retrouvé dans la copie du Talkhis, côté 788, du fonds de manuscrits de la Bibliothèque de l'Escurial (Espagne). Ce manuscrit se termine par la mention si précieuse : « A la fin de l'original, avec lequel cette copie a été collationnée, figure littéralement ce qui suit :

> « Ecrit par Ahmed b.al-Hassan b. 'Abderrahman b. al-Mo 'iz b. al- 'Aziz Billah b.al-Mansur b. an-Nasir b. 'Alannas b. Hammad al-Himiyari, le premier jour de Gumada II de l'année 702 de l'Hégire (=1302)». Puis de la main de l'auteur : « J'autorise le jurisconsulte ... Abul 'Abbas Ahmad b. al-Hassan, ci-dessus nommé, à rapporter, d'après moi mon livre du « Talkhis A'mal al-Hisab », mon livre « de la connaissance des temps par le calcul » ainsi que mon ouvrage « de l'algèbre », qu'il a réunis de sa main dans ce recueil ... Il a étudié ces livres, sous ma direction, d'une façon précise, et avec maîtrise ». Fait et écrit de la main d'Ahmad b.Muhammad b. 'Utman al-Azdi, le dernier jour de Gumada 1er de l'année 708 H (=1308) ».

Parmi les autres élèves importants d'Ibn al-Bannā', citons :

- Le tlemcénien al-Abili (mort en 1356), qui va être à l'origine de la constitution d'une importante école de sciences rationnelles à Tlemcen : al-'Uqbānī (1320 – 1408), Ibn Zaghu (mort en 1445), Ibn Marzuk al-Hafid (1364 – 1439), al-'Uqbānī II (mort en 1456), al-Qalacadi (1412 – 1486), al-Machdaly (Bougie 1419 – Alep 1461), Abu `Ali Aberkan (1353 – 1453), al-Sanusi (1426 – 1490),... Par ailleurs, Ibn Khaldūn (mort en 1406) a suivi ses cours à Tunis. C'est probablement cet enseignement qui va être à l'origine des écrits de ce dernier sur les mathématiques dans la Muqqādima.

- Le marocain al-Luja'i, qui aura deux élèves algériens célèbres : le constantinois Ibn Qunfudh (1339 - 1406) et le bougiote Ibn Haydur (mort en 1413). Tous deux seront des commentateurs importants d'Ibn al-Bannā'. C'est d'ailleurs à partir de leurs écrits que sera constituée la biographie du maître.

En plus du Kitāb al-Usul (voir chapitre suivant), deux ouvrages fondamentaux d'Ibn al-Bannā' retiennent l'attention des historiens des mathématiques :

- Le Talkhis A`mal al-Hisab, qui est un cours relatif aux opérations de calcul. Ce précis a joué un rôle essentiel dans l'enseignement, comme le montre les très nombreux commentaires (au Maghreb, en Orient et en Andalousie). En effet, Ibn al-Bannā' énonce une suite de résultats en l'absence totale de toute justification. C'est pourquoi, il fournira les démonstrations dans le principal commentaire, à savoir le Raf`al-Hijab, rédigé par Ibn al-Bannā' lui-même.

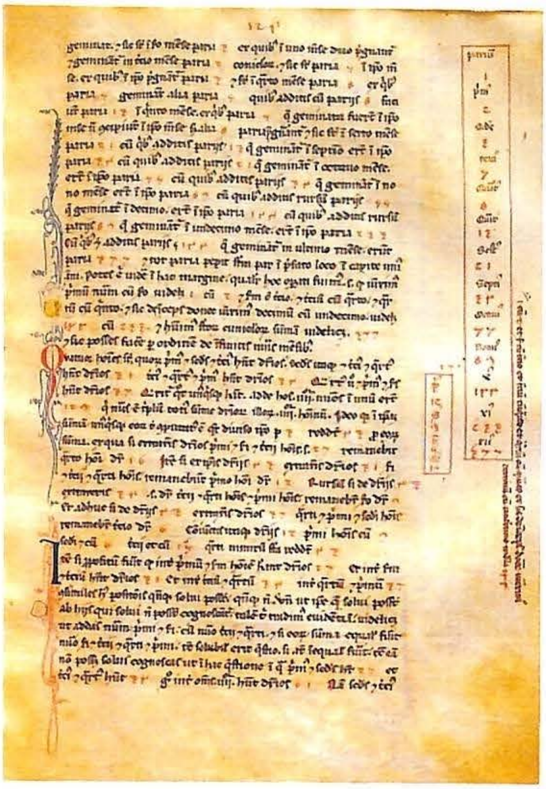
- Le Raf`al-Hijab, rédigé en 1302. Ce commentaire ne doit pas être considéré comme un commentaire classique. En effet, Ibn al-Bannā' n'a pas voulu le composer pour expliquer le contenu mathématique du Talkhis, mais plutôt pour « défendre son projet mathématique, donner les raisons de son choix de la matière mathématique contenu dans le Talkhis et expliquer certaines de ses formulations ayant fait l'objet de critique ». Il s'agit donc d'un complément théorique du Talkhis. La deuxième partie du Livre II concerne l'algèbre [6].

VII - Le Kitab al-Usûl fî al-Jabr wa l-Muqâbala d'Ibn al-Bannâ'

En 1938, H.P.J. Renaud a rapporté les écrits de nombreux biographes et chroniqueurs. C'est le cas d'Ibn al-Qādhī, qui, dans son Durat al-Hijāl, affirme que l'algèbre d'Ibn al-Bannā' (c'est-à-dire le livre *Kitāb al-Usūl wa l-Muqadimāt fī al-Jabr wa l-Muqābala*) serait un abrégé du commentaire de l'imâm profondément versé dans les sciences mathématiques, Abū al-Qāssim al-Qurashī, habitant Bougie (Bejaia) [Renaud, 1938].

Dans sa thèse, A. Djebbar a analysé et relevé les éléments nouveaux qui existent dans le *Kitāb al-Usūl,* le dernier grand ouvrage de l'Occident musulman qui, selon lui, suit totalement la tradition algébrique d'Abū Kāmil [6].

Il semble que ce traité soit partagé en deux parties. La première, qui a donné son titre à l'ouvrage, qui traite des fondements de l'algèbre, est partagée en trois chapitres. D'abord, l'arithmétique des irrationnels puis celles des polynômes et enfin la résolution des équations canoniques et de celles qui s'y ramènent.



Dans la deuxième partie du *Kitāb al-Usūl, Ibn al-Bannā'* traite de la résolution des différents types de problèmes à l'aide des méthodes algébriques. Il commence par exposer et résoudre les problèmes qui sont à solutions entières ou rationnelles puis, dans un dernier chapitre, ceux à solutions irrationnelles [6].

VIII - Les Algébristes du Maghreb postérieurs au XIIIe siècle

a) Ibn Haydūr et son traité sur les systèmes d'équations

Ibn Haydūr (mort en 1413) est présenté par le biographe Ahmad Baba at-Tumbukti, comme un éminent mathématicien du Maghreb, spécialiste dans la science du calcul et des partages successoraux. Il a rédigé des *Sharh* (commentaires explicatifs) sur al-Talkhīs (intitulé at-Tamhīs fī Sharh at-Talkhīs), et sur le Raf' al-Hijāb. Remarquons que le dernier chapitre de ces deux traités d'Ibn al-Bannā' sont consacrés uniquement à l'algèbre des équations quadratiques.

Dans son commentaire Tuhfat at-Tullāb et en conclusion lorsqu'il commente les procédés de résolution des systèmes d'équations du premier degré par la méthode de double fausse position, Ibn Haydūr affirme l'existence de plusieurs autres méthodes de résolutions que celle exposée par Ibn al-Bannā' . Il renvoie à son ouvrage intitulé Maqāla fī Mass'alat at-Tuyūr (traité sur les problèmes des oiseaux) [6].

b) Al -'Uqbānī et son commentaire d'algèbre

Originaire de Tlemcen, le mathématicien Sa'īd al-'Uqbānī (1321-1408) exerça la fonction de Cadi de la communauté à Bougie, lorsque le sultan mérinide Abī 'Inān prit possession de cette ville entre 1353 et 1358, « à une époque où les savants foisonnaient » (cf. Ibn Farhūn).

En mathématique, al-'Uqbānī a rédigé trois commentaires explicatifs. Le premier sur le célèbre traité en science des héritages du mathématicien andalou 'al-Hufī (mort en 1192). Le second sur le traité *Talkhīs*, d'Ibn al-Bannā', qui, rappelons-le, renferme un chapitre entier en algèbre. Dans cet ouvrage, al-'Uqbānī semble être l'un des derniers mathématicien maghrébins à utiliser dans ses démonstrations les propositions des Eléments d'Euclide ou des outils empruntés à des ouvrages antérieurs de la tradition mathématique des pays de l'Islam [6].

Enfin, le dernier commentaire d'al-'Uqbānī, est celui qu'il a fait sur le poème didactique en algèbre d'Ibn al-Yāsamīn (m. 1204). Ce dernier, composé de 54 vers, contient les algorithmes de résolution des six équations canoniques, suivis de deux méthodes de résolution des équations quadratiques non unitaires, et se termine par les règles de calcul sur les expressions algébriques [1]

IX – Algèbre et Science des Héritages: la méthode d'al-Qurashī

Il y a de nombreuses applications des procédés algébriques. D'ailleurs, au début de son livre d'algèbre (*Kitāb al-Jabr wa l-Muqābala*), al-Khawārizmī précise qu'il a composé son ouvrage pour servir les gens en matière d'héritages et de testaments, de participations, de jugements, des transactions, d'arpentages, de creusements des canaux et de géométrie.

L'algébriste al-Qurashī a mis au point une méthode nouvelle dans le domaine des héritages, appelée *Tarīqat al-Farā'idh bi-l-Kusūr* (méthode des fractions en science des héritages). Celle-ci est considérée par les mathématiciens des XIVe et XVe siècles comme une grande innovation.

La méthode d'al-Qurashī est basée sur la décomposition des nombres en facteurs premiers pour la réduction au même dénominateur des fractions qui interviennent dans la répartition d'un héritage donné [Zerrouki, 1995]. Elle a créé une grande dynamique dans la composition d'ouvrages et dans l'enseignement de cette science. De nombreux mathématiciens, tels que al-'Uqbānī (m. 1408) et al-Qalāsadī (m. 1486) vont rédiger des manuels, sur cette méthode, afin de l'expliquer et d'illustrer son utilisation.

X – Les mathématiques à Bougie et Fibonacci

a) Léonardo Fibonacci à Bougie

La ville de Béjaïa a eu le privilège d'accueillir vers la fin du XIIe siècle le jeune Leonardo de Pise. Nous le savons grâce à son propre témoignage dans le Prologue du Liber Abaci [3]. Ses séjours à Bougie et dans les autres centres de la Méditerranée ont certainement largement influencé les mathématiques de Fibonacci : à Bougie, Léonardo y aurait appris le calcul indien, la notation de fraction simple et de fraction composée, les fondements de l'algèbre d'après la tradition d'al- Khawārizmī et d' Abū Kāmil et grâce à son expérience de fils de marchand, la tradition mathématique arabe appliquée à l'art du négoce ; au cours de ses voyages dans l'Orient Musulman, par contre, il aurait pu venir en contact direct avec l'œuvre d' al-Karajī dont l'influence sur la section algébrique du Liber Abaci est reconnue par certains auteurs. Le jeune Léonardo vit alors aux côtés de son père dans un milieu marchand ; habitué aux affaires, et donc aux calculs. C'est vraisemblablement à Béjaïa qu'il entre pour la première fois en contact avec l'héritage mathématique des pays de l'Islam. Cela suppose évidemment qu'il était en mesure de suivre et de comprendre cet enseignement (cf. [5]).

b) L'algèbre de Léonard de Pise

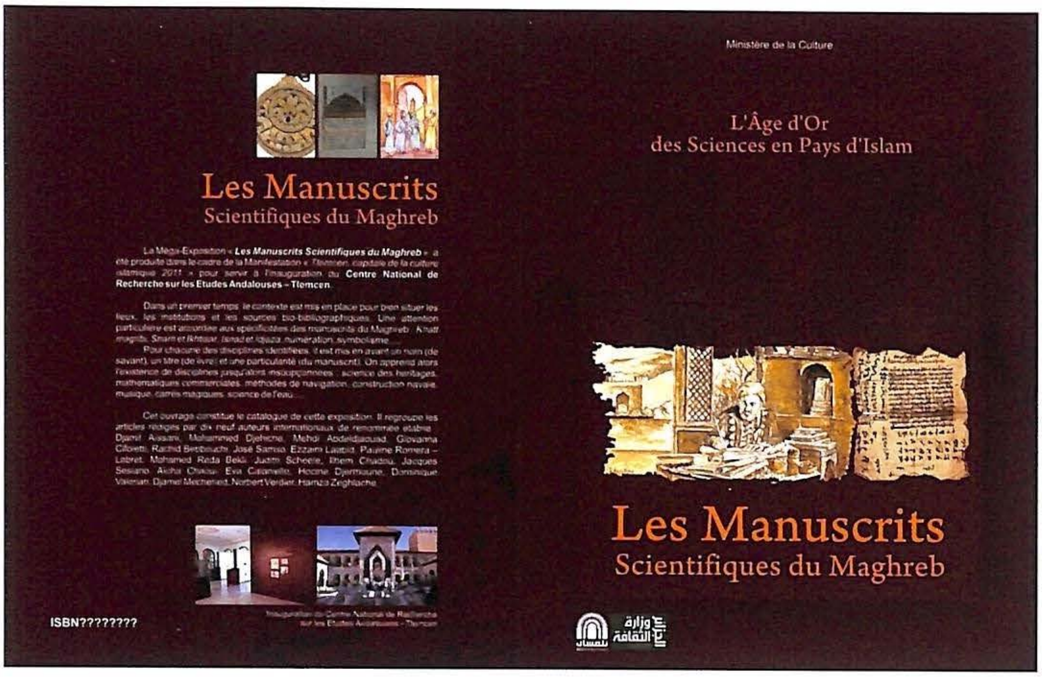
De nombreux chercheurs affirment que Léonardo Fibonacci, tout comme les mathématiciens maghrébins, ignore tout de l'évolution de l'algèbre et de l'arithmétique des siècles musulmans successifs (comme c'est le cas d' 'Umar al-Khayyām et de son école), et se lient à une tradition plus ancienne, celle du neuvième et du dixième siècle représentée par al-Khawārizmī et Abū Kāmil. En fait, l'Occident musulman, affirme J. Sesiano, pour des causes géographiques et aussi politiques n'avait guère eu connaissance des développements orientaux depuis le milieu du dixième siècle. Voila donc un point commun entre Fibonacci et les mathématiciens Maghrébins. D'autre part, dans le quinzième chapitre de son Liber Abaci consacré à l'algèbre, il s'avère que, selon Roshdi Rashed sur quatre-vingt-neuf problèmes, soixante-quinze sont une reprise à l'identique, ou bien avec quelques légères variations insignifiantes, telles que un changement des coefficients numériques, des problèmes qui figurent dans le livre d'Abū Kāmil et d'al-Khawārizmī.

La troisième section du chapitre 15 [cf. Boncompagni, Scritti, . Ch. XV, partie 3°, p.406] s'occupe des problèmes algébriques du deuxième degré ou reconductibles au deuxième degré. Léonard fait référence à « Mauhmet », c'est-à-dire al-Khawārizmī , pour les six formes normales, 3 simples et 3 composées. Il appelle l'inconnue x radix ou res (« jidhr» ou « shay » en arabe); pour il emploie census ou quadratus ou avere (la fortune, « mal » en arabe), pour cubus («ka'b» en arabe). Le terme constant est appelé numerus, denarius, dracma. («'adad mufrad»). La démarche de Fibonacci est la suivante : il donne la règle générale suivie par la résolution d'une équation simplifiée ; ensuite il donne la justification géométrique du procédé, en appliquant comme Abū Kāmil, les propositions 2.5 et 2.6 d'Euclide.

Il donne plusieurs variantes d'un même problème. Ce style d'exposition reflète les caractéristiques de l'ouvrage : il s'agit d'une *Summa*. Selon la tradition médiévale, la *Summa* était un texte qui rassemblait tous les commentaires connus sur un ouvrage classique ou sur un certain sujet. Léonardo Fibonacci adopte cette approche pour les mathématiques et structure son ouvrage sur la base des différents types de problèmes et sur les solutions fournies pour chacun d'eux.

c) Justification géométrique des 6 formes normales

Léonardo Fibonacci utilise donc les 6 formes canoniques d'al-Khawārizmī pour résoudre une équation du deuxième degré , mais il change l'ordre des trois dernières équations composées. La classification courante des équations composées d'après al-Khawārizmī est:



$4ax^2+bx=c$; $5ax^2+c=bx$; $6bx+c=ax^2$. Fibonacci par contre présente et résout, d'abord le type 4ème, puis le 6 ème et ensuite le type 5 ème.

Le même ordre d'al-Khawārizmī est présent dans l'algèbre d' Abū Kāmil. Ibn al-Bannā' présente dans le *Talkhis* la séquence des équations composées dans l'ordre d' al-Khawārizmī , mais dans l'exposition des méthodes démonstratives, présente d'abord le type 4ème , le 6ème (parce que les méthodes sont analogues) et enfin le type 5ème.

Une autre différence avec al-Khawārizmī est caractérisée par le fait que ce dernier (et ses adaptations latines) donne les règles de résolution des équations dans le contexte d'équations spécifiques, tandis que Fibonacci donne d'abord les règles générales suivies par la résolution d'une équation « type » simplifiée et enfin il présente la justification géométrique du procédé. On peut comparer l'explication de la règle pour la résolution d'une équation du 6ème type : $bx+c= ax^2$ donnée par al-Khawārizmī à celle donnée par Fibonacci.

d) Fibonacci et les problèmes d'oiseaux

Les problèmes d'oiseaux sont présentés par Fibonacci dans deux problèmes du Chapitre XI du *Liber Abaci* (1202) « Sur l'alliage des monnaies »: le premier avec 30 oiseaux de trois types différents pour 30 deniers et le deuxième avec trente oiseaux de 4 types différents pour les mêmes deniers (cf. [5]). Il utilise une méthode qui découle des règles de l'alliage des monnaies, qu'il appelle « distinctions » (Lat. differentiae) Les dites règles sont issues de la division proportionnelle, qui, en Europe, était connue comme « règle de compagnie». Fibonacci, dans la 7e distinction, étend la même procédure de résolution à des problèmes similaires. Il formule une méthode plus générale dans la *Lettre à maître Théodore* [5]. Notons qu'il n'y a aucune ressemblance entre la procédure utilisée par Léonard de Pise et celle employée par Abū Kāmil, qui utilise une méthode de type algébrique qui amène au traitement des systèmes indéterminés et à l'analyse combinatoire. Il dénombre les solutions entières du problème en tenant compte de certaines contraintes.

Léonardo Fibonacci emploie dans le douzième chapitre de son Liber Abaci, la méthode de la fausse position pour résoudre un ensemble de problèmes appelés problèmes des arbres (questiones arbororum) qui peuvent être exprimés sous la forme $ax \pm b/c \cdot x = s$. et qui découlent des mathématiques égyptiennes. Fibonacci présente, par la suite, dans le treizième chapitre, la méthode de double fausse position, qu'il appelle selon le modèle arabe « regula elchatayn » avec une variante [Vogel, 1970, p. 706].

En conclusion, il paraît donc peu probable que l'algèbre d'al-Khawārizmī ou ses adaptations latines aient été les sources directes du Liber Abaci. Par contre, l'influence d'Abū Kāmil sur l'œuvre de Fibonacci est très grande. De plus, le symbolisme qu'utilisera Fibonacci devait y être utilisé au moment de son séjour à Béjaïa. Le témoignage d'al-Gubrīnī, selon lequel al-Hassār (v. 1175) y était une référence pour la science du calcul, nous permet de le supposer.

Conclusion

La tradition algébrique du Maghreb s'inspire en grande partie des travaux de l'école du célèbre mathématicien égyptien Abū Kāmil (850 – 930). Ibn Khaldūn est précisément un témoin de cette longue chaîne de transmissions. Cette tradition algébrique se caractérise par l'affranchissement total de toute représentation géométrique en algèbre, l'extension des opérations de l'algèbre au zéro, de nouvelles démonstrations pour des problèmes classiques, enfin, une intervention de l'algèbre en géométrie par le biais des équations [7].

A cette époque, le Maghreb est très actif, sans frontière. Cette liberté d'échanges favorise la mise en place d'une terminologie commune, une concurrence des critiques et des commentaires, et explique sans doute l'élaboration d'un symbolisme propre (à l'Afrique du Nord) [7]. D'autre part, la circulation des connaissances entre l'Occident chrétien et l'Occident musulman est manifeste, comme le montre l'influence des travaux d'Abū Kāmil et d'al-Qurashī sur l'œuvre de Léonardo Fibonacci et la traduction à Montpellier du traité d'al-Hassār.

REFERENCES

[1] Djamil Aïssani and all., Bougie médiévale : Centre de transmission méditerranéen, In the book « History and Epistemology in Mathematics Education », IREM Edition, Montpellier, 1993, pp. 499 - 506.

[2] Djamil Aïssani, The Mathematics in the medieval Bougie and Fibonacci. In the book « Leonardo Fibonacci : Il Tempo, le opere, l'eredità scientifica », Pacini Editore (IBM Italia), Pisa, 1994, pp.67 – 82.

[3] Djamil Aïssani et Dominique Valerian, Mathématiques, Commerce et Société à Béjaïa (Bugia) au moment du séjour de Leonardo Fibonacci. International Journal "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, Vol. XXIII, Fas. 2, 2003, pp. 09 – 31.

[4] Djamil Aïssani et Giovanna Cifoletti, L'Algèbre à Béjaia et Léonardo Fibonacci (12e – 13e siècles), Séminaire spécialisé d'Histoire des Sciences, E.H.E.S.S., Paris, 19 Novembre 2009.

[5] Aïssani D. et Djehiche M., Les Manuscrits Scientifiques du Maghreb, Département Expositions Ed., Ministère de la Culture, Tlemcen/Alger, Août 2012, 165 pages. ISBN : 978-.9931-361-06-0.

[6] Ahmed Djebbar, Les mathématiques dans le Maghreb médiéval, Bulletin de l'Amuchma N° 15, Maputo, 1995.

[7] Elisabeth Hébert, Djamil Aïssani and all., Quelques aspects des mathématiques d'Ibn al-Banna (1321 - 1356) de Marrakech, IREM Ed., Rouen, 1995, 133 pages.

[8] Ibn Khaldûn, Les Prolégomènes, Traduits et commentés par : W. Mac Guckin De Slane, Berti Édition.

[9] Roshdi Rashed, Fibonacci et le Prolongement Latin des Mathématiques Arabes, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, Vol. XXIII, Fasc. 2, Roma, 2003.

(*) Eva Caïaniello, Giovanna Cifoletti, Dominique Valerian, Mohamed Réda Bekli.