تسعير الخيار الأوروبي في الزمن المنفصل والزمن المستمر: مقارنة بين نموذجي Black & Scholes و Binomial

أ د. طاولي مصطفى كمال

جامعة تلمسان

mk_taouli@yahoo.fr

أ .مصطفاي منال

جامعة تلمسان

mmostefai93@gmail.com

ملخص:

الخيارات هي أدوات مالية متعددة الجوانب تستمد أسعارها من الأصول الأساسية مثل الأسهم، إلا أنه هناك مسألة مهمة بشكل خاص تظهر عندما يتعلق الأمر بالخيارات هي تحديد قيمها العادلة ما أدى الى ظهور تقنيات كمية التي تسمح للمتعاملين بمتابعة تطور أسعار الأصول المالية ومن بين هذه الطرق الكمية هي نموذجي بلاك شولز وبينوميال لذلك هدفت هذه الدراسة الى المقارنة بين هذين النموذجين من خلال حساب القيمة العادلة على عقد خيار لسهم بنك QNB باستخدام نموذج ثنائي الحدين لفترة واحدة،فترتين وكذلك بناء شجرة بينوميال من أجل n=12 وعلى اعتبار أنه عند استخدام عدد كاف من الخطوات الزمنية تكون نتائج نموذج ذي الحدين ونموذج بلاك شولز متطابقة لذلك قمنا بحساب القيمة العادلة للخيار بالاعتماد على نموذج Black & Scholes للتأكد من صحة النتائج المتحصل عليها.

الكلمات المفتاحية: *الخيارات- Black & Scholes - Binomial - الزمن المنفصل – الزمن المستمر – الحركة البروانية الهندسية.*

Abstract *:*

Options are versatile financial instruments That derive their price from an underlying asset such as a share or a bond , but there is a particularly important issue that arises when it comes to options is fixing their value , which led to the emergence of *quantitative techniques that allow operators to follow the evolution of financial assets price, among these quantitative methods are typical Black Scholes and Binomial.*

The study aimed to compare these two models by calculating the fair value on the option contract for QNB Bank using a binomial model for a period, two periods, as well as building a binomial tree for n = 12 and considering that when using a sufficient number of time steps The results of the binomial model and the Black Scholes model are identical. We calculated the fair value of the option based on the Black & Scholes model to verify the validity of the results obtained.

Key words *: Options - Black & Scholes - Binomial - Discrete time - continuous time.*

مقدمة:

تسعير الخيارات هو جانب صعب من تجارة المشتقات نظرا لعدد العوامل التي تؤثر على سعر الأصل محل التعامل وصعوبة التنبؤ بالسعر النهائي للأصل، فسعر الخيار يجب أن يكون مقبولا للطرفين على اعتبار أن أحدهما سيحقق ربحا أقل أو حتى خسارة عند تنفيذ العقد، لذلك يجب أن يكون السعر مسارا متوسطا يمكن الطرفان أن يتفقا على أن الربح النهائي مقبولا لهما.

هناك عدد من الطرق المختلفة لحساب السعر لأحد الخيارات، اذ لكل طريقة مزايا وعيوب معينة على الاخرى، في حين احدى الطرق يمكن أن تكون أسرع ولكن أقل دقة، لذلك يجب الالمام بمختلف الجوانب للعثور على أفضل طريقة ممكنة.

فبداية نظرية تسعير الخيارات تعود الى أبحاث Bachelier (1900) حين قام باستخدام الحركة البروانية لتقييم الخيارات الفرنسية على السندات الحكومية، بعد ذلك لم تحظى الخيارات بأي اهتمام الى غاية بداية السبعينات أين بدأت طرق تقييم الخيار في الحصول على الاتساق والتماسك من خلال تحديد صيغة لحساب الخيارات الأوروبية من قبل كل من Black, Scholes, Merton، وبعدها بسنوات قام Cox,Ross,Rubinstein باثراء مجال تسعير الخيارات من خلال تقديم نموذج بينوميال والذي هو

عبارة عن محاكاة لتطور أسعار الأصول محل التعامل من خلال تقسيم الوقت حتى تاريخ الاستحقاق الى عدد معين من الفترات القصيرة.

اشكالية البحث:

من خلال ما سبق يمكننا طرق التساؤل التالي:

مامدى مساهمة نموذجي Black & Scholes و Binomial في تسعير الخيارات؟

أهداف الدراسة:

تسعى هذه الدراسة الى تحقيق النقاط التالية:

- التعرف على الخيارات والفرضيات التي تقوم عليها نماذج تسعيرها.
- التعرف على احدى أهم النموذجين المستخدمين في نمذجة الخيارات وهما بينوميال وبلاك شولز.
- الالمام بنوذج بينوميال من خلال نمذجة الخيار المبنى على سهم بنك QNB ل n=12 ثم مقارنة النتائج المتحصل عليها مع نموذج بلاك شولز.

الدراسات السابقة:

1) دراسة ل f.t.oduro ,v.k.dedu (**2012**) بعنوان **the binomial and black-scholes option pricing models** تناولت هذه الدراسة تقييم نماذج تسعير الخيارات وعلى وجه التحديد نموذجي بينوميال وبلاك-سكولز التي تعتمد على نظرية السير العشوائي والحركة البروانية واستعانت الدراسة بالرسوم البيانية لتوضيح كيفية تطبيق مثل هذه النماذج وتوصلت بأنها سهلة الاستخدام وبسيطة بالنسبة للجميع وكذلك يقلل من الوقت والأخطاء المصاحبة للحساب اليدوي.

2) دراسة ل Sunday emmanuel وآخرون (**2014**) بعنوان **performance measure of binomial model for pricing American and European options** قام الباحثون من خلال هذه الدراسة بإجراء مقارنة بين نموذج بينوميال وبلاك-سكولز لتقييم الخيارات وتوصلوا الى ان نموذج بينوميال هو اكثر مرونة مقارنة بنموذج بلاك-سكولز وكذلك يستخدم لتسعير مجموعة واسعة من الخيارات.

3) دراسة ل عيساوي سهام (**2016**) بعنوان **تسعير الخيارات باستخدام نموذج التسعير ثنائي الحدين ودورها في تشكيل محفظة التحوط – دراسة تطبيقية لبعض الشركات المدرجة في أورونكست باريس–** حيث هدفت هذه الدراسة الى استخدام نموذج بينوميال لفترة واحدة ولفترتين لايجاد أسعار عقود الخيار المتداولة في الأسواق المالية وذلك بهدف التحوط من مخاطر تقلبات الأسعار وخفضها وذلك بتكوين محفظة استثمارية خالية من المخاطر من خلال توليفة متنوعة من الأسهم وعقود الخيارات.

أولا: مدخل مفاهيمي حول الخيارات

الخيارات هي عقود مالية تمنح لأصحابها الحق وليس الالتزام لشراء أو بيع شيء ما في تاريخ مستقبلي بسعر يحدد اليوم، التمييز بين الحق والالتزام الذي يعطى لصاحب الخيار هو سمة أساسية، الخيارات هي أوراق مالية مشتقة تستمد قيمها من الأصول التي سيتم شراؤها أو بيعها في المستقبل، استخدام عقود تشبه الخيارات قديم جدا، أقدم الأمثلة تعود الى العصور القديمة اليونانية، والى خيارات سنة 1600 على الأرز التي تم تداولها في اليابان والخيارات على زهور الأقحوان في هولندا ومع ذلك فان أول تبادل للخيارات في العالم لم يفتح حتى عام 1973 في شيكاغو (مجلس شيكاغو لتبادل الخيارات) في نفس السنة التي نشرت فيها صيغة تسعير الخيارات الشهيرة بلاك سكولز، أما في أوروبا بدأت التجارة الموحدة في الخيارات في عام 1978 في بورصة الخيارات الأوروبية في أمستردام، ومنذ ذلك الحين نمت التعاملات بالخيارات بشكل كبير.[1]

فرضيات تسعير الخيارات:

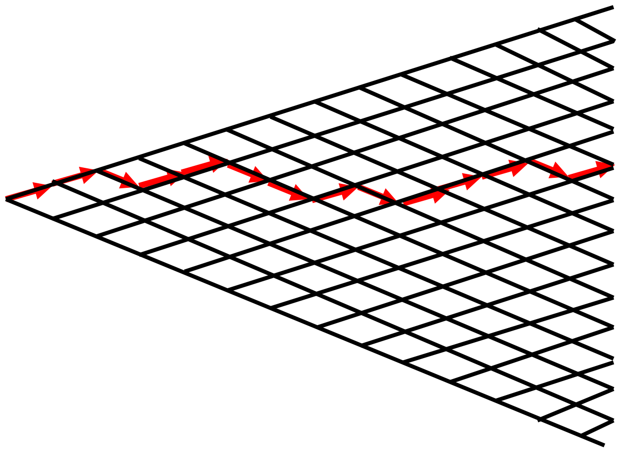
مثل جميع النظريات الرياضية تسعير الخيارات يقوم على مجموعة من الافتراضات هي:

- سعر السهم يتبع عملية الحركة البروانية الهندسية، ذلك لتشابه الخصائص الإحصائية للأسواق المالية مع الحركة البروانية الهندسية لكن الأسواق الحقيقية لديها fat tail وبالتالي فرصة أكبر لعائدات أكثر في الواقع بالمقارنة مع نموذج الحركة البروانية الهندسية التي يتم استيعابها عادة باستخدام التقلب الضمني.
- كلا من التقلب σ وسعر الفائدة r ثابتة مع الزمن، من الواضح أن افتراض التقلب الثابت ليس صحيحا ومع ذلك في بعض النماذج يتم تخفيض هذا الافتراض، أما في الواقع فالمتعاملون بالخيارات يستخدمون التقلب الضمني Implied volatility والذي هو تقلب مناسب لجعل قيمة الخيار صحيحة، وبالتالي نماذج تسعير الخيارات تطورت تدريجيا كشكل من أشكال الفن للتكيف مع حقائق السوق.
- البيع على المكشوف مسموح به Short selling حيث أن حجة عدم التحكيم No-arbitrage المستخدمة لتسعير الخيارات تعتمد على محفظة ذات مراكز بيع قصيرة، لذلك هذه الحجة غير صالحة اذا لم يكن بالامكان بيع الأصل على المكشوف.
- عدم تحمل تكاليف المعاملات: المحفظة الخالية من المخاطر التي تستخدم لتسعير الخيارات يجب أن تتغير من خطوة زمنية الى خطوة زمنية أخرى لكن مع افتراض أن هذا التغيير لا يكلف شيئا، من الواضح أنك تتكبد تكاليف المعاملات في الواقع ذلك بسبب أن انشاء محفظة لا تنطوى على المخاطر مع التحوط من قبل الدالتا له تكاليف بالتأكيد، الا أنه بالنسبة الى الأسهم الأكثر تداولا قد تكون هذه التكلفة منخفضة ولكن بالنسبة للبعض الاخر قد تؤدي الى عدم الثقة.
- عدم تطبيق توزيعات الأرباح: معظم الأسهم تقوم بدفع الأرباح ويمكن تضمينها في التحليل اذا لزم الأمر، فعادة ما يتم التعامل مع توزيعات الأرباح على أنها ثابتة تماما مثل سعر الفائدة ولكنها في الواقع عشوائية.[2]

ثانيا: نموذجي ثنائي الحد وبلاك شولز

نموذج ثنائي الحد Binomial لتسعير الخيارات:

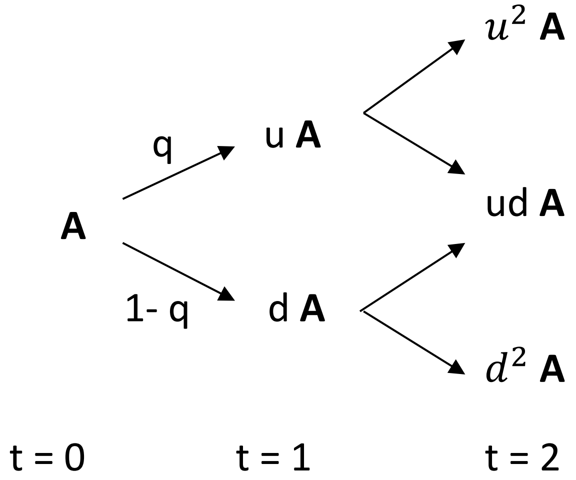
تم تقديم نموذج تسعير الخيارات ذو الحدين في ورقة كتبها Cox,Ross,Rubinstein في 1979، نموذج بينوميال يوفر طريقة أنيقة وسهلة لإظهار الحدس الاقتصادي وراء تسعير الخيارات وأساليبها الرئيسية، لكن هذا النموذج لا ينبغي اعتباره تقريب بسيط لمشكلة معقدة على العكس تماما فهو أداة قوية لتقييم الأوراق المالية عموما ويمكن استخدامه عندما لا يوجد حل تحليلي مغلق للنماذج الزمنية المستمرة، علاوة على ذلك عندما تتقارب الخطوات المنفصلة الى سلسلة متصلة يقترب النموذج الى صيغة في الزمن المستمر.



الشكل رقم (01): شجرة ذات الحدين ومسار عينة.

طريقة بينوميال هي مشابهة لنظرية State-prefrence theory فهو يستخدم الزمن المنفصل Discrete time والمتغيرات المنفصلة، أما الزمن تتم نمذجته كسلسلة من النقاط عبر الوقت t الذي يتم فيه حل عدم اليقين خلال الفترة السابقة، حيث يتم نمذجة عدم اليقين في المتغيرات من خلال التمييز بين حالتين مختلفتين عادة ما تسمى بحالة الارتفاع Up والانخفاض Down كلتا الحالتين لهما عامل العائد للمتغير الضمني التي نستخدم من أجلها رمزي u و d على التوالي.

احتمال حدوث حالة الارتفاع هو q لذلك فان حالة الانخفاض هي (1-q) وبما أن $u \times d = d \times u$ فان النتيجة هي شجرة بينوميال وبالتالي فان المتغير محل التعامل يتبع عملية ثنائية الحدين المضاعفة.



الشكل رقم (02): نهج سير الأسعار للأصلA [3]

I. نموذج ثنائي الحد لفترة واحدة The One Period Binominal Model.

كما ذكرنا سابقا أن سعر السهم اما يرتفع Moving up، أو ينخفض Moving down، ويتم الاشارة اليها ب u أو d على التوالي، أما بالنسبة للمعطيات المستعملة من أجل تفسير النموذج هي كالتالي:

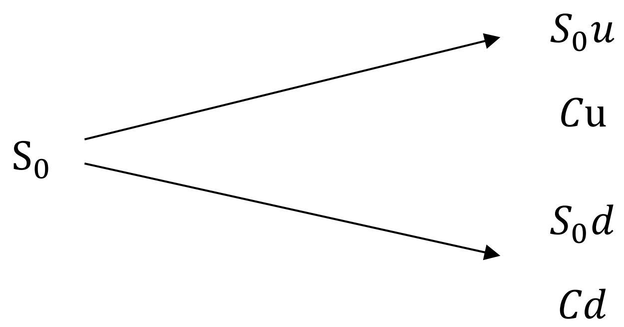
S_0 : سعر السهم الحالي (Current Stock Price).

S_0u : سعر السهم الجديد نتيجة ارتفاعه من S_0 (upward movement).

S_0d : سعر السهم الجديد نتيجة انخفاضه عن S_0 (downward movement).

Cu: قيمة الخيار في حال ارتفاع سعر السهم الى S_0u .

Cd: قيمة الخيار في حال انخفاض سعر السهم الى S_0d.[4]



وبالتالي اعتمادا على التغير في السهم ستكون قيمة الخيار حيث أن Cu هي سعر خيار الشراء في حال ارتفاع سعر الموجود الأساس u وتحسب كالآتي:

$$Cu = Max\ (0, Su - E)$$

أما في حالة الانخفاض تحسب كالتالي:

$$Cd = Max\ (0, Sd - E)$$

انطلاقا مما سبق يمكن حساب ثمن خيار الشراء وفق لنموذج ثنائي الحدين لفترة واحدة بالمعادلة التالية:[5]

$$C = \frac{P\ (Cu) + (1-P)\ Cd}{1+r}$$

حيث أن P هي احتمال ارتفاع السهم ب u أو انخفاضه ب d، ويتم احتسابها كالتالي:[6]

$$\mathrm{P} = \frac{1+\mathrm{r}-\mathrm{d}}{\mathrm{u}-\mathrm{d}}$$

$$q = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1 - P$$

II. نموذج ثنائي الحد لفترتين The Two Period Binominal Model.

ولعرض زيادة واقعية لنموذج الفترة الواحدة، سوف يتم اضافة فترة أخرى للنموذج وبذلك تزداد عدد النتائج المحتمل الحصول عليها في تاريخ النفاذ وعبر الفترات t_0, t_1, t_2، [7] باعتبار أن عدد النتائج الممكن حدوثها سوف تزداد وهذا يعني أن مخرجات المدة الأولى سوف تكون مدخلات المدة الثانية أي في تاريخ استحقاق الخيار، اذا ارتفع سعر السهم في الفترة الأولى الى (S_{u})، ثم ارتفع ثانية في الفترة الثانية تصبح قيمة السهم

$$S_{\mathrm{u}}^2 = \mathrm{S}\,(1+u)^2$$

أو ستنخفض بعد ارتفاعه الأول في الفترة الأولى فسوف يعبر عن هذه الحالة كمايلي:

$$S_{\mathrm{ud}} = \mathrm{S}\,(1+\mathrm{u})(1+\mathrm{d})$$

وعلى ضوء هذه الافتراضات فان قيم الخيار المختلفة المقابلة لمختلف تحركات سعر السهم الضمني يتم تحديدها وفقا للأتي[8]

$$\mathrm{C}_{\mathrm{u}}^{2} = \mathrm{Max}\,(0, \mathrm{u}^2\mathrm{S} - \mathrm{X})$$

$$C_{\mathrm{ud}} = \mathrm{Max}(0, \mathrm{udS} - \mathrm{X})$$

$$\mathrm{C}_{d}^{2} = \mathrm{Max}(0,\ \mathrm{d}^2\mathrm{S} - X)$$

ان أسعار الخيار الممكن حدوثها في نهاية الفترة الأولى هي ارتفاع سعر الخيار الى C_{u}، أو أن ينخفض الى C_{d} وفي كلتا الحالتين هناك نتيجتان محتملتان في الفترة الثانية، وبذلك يمكن استعمال النموذج الثنائي للفترة الواحدة لتسعير الخيار في حالة الارتفاع وفي حالة الانخفاض كمايلي[9]

$$C_{\mathrm{u}} = \frac{P\,\mathrm{C}_{\mathrm{u}}^{2} + (1-\mathrm{p})\ C_{\mathrm{ud}}}{1+\mathrm{r}}$$

$$C_{\mathrm{d}} = \frac{P\,\mathrm{C_{ud}} + (1-\mathrm{p})\ \mathrm{C}_{\mathrm{d}}^{2}}{1+\mathrm{r}}$$

وعليه فان سعر الخيار هو دالة للمتغيرات (P،r ،$\mathrm{C_d}$، $\mathrm{C_u}$) وأن قيمة P تحسب بالمعادلة التالية:

$$P = \frac{r-d}{u-d}$$

تتحدد القيمة النظرية العادلة للخيار لفترة واحدة وفقا للمعادلة الأتية:

$$C = \frac{P\,(Cu) + (1-P)\,Cd}{1+r}$$

ومع تعويض قيم كل من C_{d} و C_{u} في المعادلة السابقة نحصل على الصيغة الرياضية للقيمة النظرية العادلة لتسعير الخيارات للفترتين وهي كالأتي:

$$C = \frac{P^2\,\mathrm{C}_{\mathrm{u}}^{2} + 2P\,(1-P)\,C_{\mathrm{ud}} + (1-P)^2\,\mathrm{C}_{\mathrm{d}}^{2}}{(1+r)^2}$$

III. نموذج ثنائي الحدين Binomial لـ N فترة.

نموذج بينوميال للفترة n تطبق على نفس مجموع فترات الزمن حيث أن $T = N\Delta t$ ، حيث كلما زادت عدد فترات الزمن فان توزيع خطوات سوف يقترب من التوزيع الطبيعي، كما أنه في نموذج بينوميال للفترة n انتهاء الخيار T هو مقسم بالتساوي الى خطوتين من الزمن $T = 2\Delta T$ ، حيث أن الأصول الخطرة تتحرك الى الأعلى بمعامل u وباتجاه الأفل بمعامل d [10] وبافتراض حيادية الخطر وان u و d هي عوامل ثابتة خلال كل خطوة زمن فان :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

احتمال ارتفاع الأصل هو:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$$

- سعر الخيار الأوروبي يعطى بالصيغة التالية[11]

ليكن F_{ij} سعر الخيار الشراء أو البيع الأوروبي، المؤشر i يعبر عن الفترة الجزئية التي يتم فيها حساب سعر الخيار، j تعبر الوضعية المحددة لتطور سعر الأصل الموجود الأساس (الارتفاع أو الانخفاض) بين الفترة المبدئية والفترة i.

$$Fij = e^{-r\Delta t}\left[pF_{I+1,\mathrm{j}+1} + (1-p)F_{\mathrm{i}+1,\mathrm{j}}\right]$$

أين:

r: سعر الفائدة خالي من المخاطرة.

P: احتمال ارتفاع سعر الأصل الأساس ويسمى باحتمال حيادية الخطر.

نموذج Black & Scholes لتسعير الخيارات:

بعد الاسهامات الرائدة من قبل كل من Black, Scholes, Merton في أوائل السبعينات سرعان ما نمت مالية الزمن المستمر continuous time finance الى فرع كبير من الاقتصاد المالي، وهذه المنطقة تم تنشيطها بقوة من خلال الانتشار الهائل للتداول بالخيارات وحصولها على اعتراف علمي من خلال جائزة نوبل ل Scholes وMerton في 1997.

حيث قدم Sundaresan سنة 2000 لمحة عامة عن الزمن المستمر في المالية عن تطوراته وتطبيقاته في مختلف المجالات بعنوان Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment، فالزمن المستمر في المالية هو المجال الذي يمكن من خلاله استغلال المنهج الرياضي بالكامل من أجل النظر في أسعار الأوراق المالية في الأسواق الكاملة والخالية من التحكيم complete and arbitrage-free markets لحل مشكلة كيفية تقييم الأوراق المالية الجديدة.[(12)]

معادلة Black & Scholes لتسعير الخيارات:

المعادلة التي اشتقها Black و Scholes (1973)، يمكن استعمالها لتقييم الخيارات الأوروبية الموجودة في السوق التي لا توجد فيها توزيعات على السهم المعني خلال فترة الخيار حتى تاريخ الاستحقاق، حيث أن C و P يمثلان خيار الشراء والبيع الاوروبي على التوالي[13] كما هو معلوم عن الخيارات هناك مجموعة من المتغيرات التي تأثر على قيمة خيار الشراء أو البيع، والتي هي محددة في العقد مثل سعر التنفيذ Strike price ، الوقت المتبقي لنفاذ الخيار Time to expiry (T-t) حيث أن T هي تاريخ انتهاء العقد و t هو التاريخ الحالي، كذلك قيمة الخيار تعتمد على خصائص الأصل محل التعاقد مثل سعره السوقي، وانحرافه الذي يعبر عن درجة تقلب الأصل بالإضافة الى معدل الفائدة الخالي من المخاطرة وبالتالي يمكننا كتابة قيمة الخيار كالأتي: [14]

$$C = SN\,(d_1) - \; X_e^{-rt}\,\mathrm{N}\,(\mathrm{d}_2)$$

$$P = X_e^{-rt}\;\mathrm{N}(-\mathrm{d}_2) - SN\,(d_1)$$

حيث أن:

$$d_{1=}\;\frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \; d_1 - \;\sigma\sqrt{T}$$

المتغيرات في المعادلة هي: [15]

S: السعر السوقي (Stock price)

X أو K: سعر تنفيذ الخيار (Strike price of option)

r: معدل الفائدة الخالي من المخاطر (Risk-free interest rate)

T: الزمن المتبقي من نفاذ الخيار (Time to expiration) σ: درجة التقلب في قيمة الأصل (سهم) (volatility of underlying asset)

تسعير خيار سهم بنك QNB باستعمال نموذج Binomial و Black & Scholes :

تهدف هذه الدراسة الى استخدام نموذج بينوميال لتسعير خيارات الشراء الأوروبي على الأسهم العادية لبنك QNB المدرج في سوق قطر المالي خلال الفترة 2016-2017 حيث يستخدم النموذج لحساب القيمة النظرية العادلة للخيارات الأوروبية في حالة فترة زمنية واحدة، فترتين ثم حالة n=12 فترة باستخدام شجرة بينوميال على عقد خيار سهم بنك QNB، ثم للتأكد من صحة النتائج نقوم بمقارنتها بنموذج Black & Scholes.

نبذة عن بنك QNB:

يعتبر بنك قطر الوطني QNB أكبر مؤسسة مالية في الشرق الأوسط وشمال افريقيا، كما يعتبر احدى الشركات الثلاث الأولى من حيث قيمة التداول للأسهم المدرجة ضمن قطاع البنوك في البورصة القطرية حيث قاد سهم QNB تعاملات السنة بحصة بلغت نسبتها 13.29% من قيمة التداول الاجمالية لسنة 2017.

منذ تأسيسه في عام 1964 مر بنك قطر الوطني بسلسلة من التحولات إلا أنه استمر في نهجه بلعب دور ريادي في دفع عجلة التنمية في دولة قطر وهو الدور الذي يشكل نقطة قوة البنك اليوم، ففي عام 1966 لعب دورا رئيسيا في تمويل بناء مطار الدوحة الدولي ومازال يساهم حتى اليوم بأدوار بارزة في تمويل مشاريع البنية التحتية، زيادة على أن البنك تبنى سياسة توسعية ففي عام 1976 أي بعد مرور أقل من عقد على افتتاح أول فرع محلي بدأ QNB بالتواجد على الصعيد الدولي بافتتاح فرعه في العاصمة البريطانية لندن وبعدها بعامين عزز البنك حضوره الدولي بافتتاح فرعه في باريس، وفي سنة 2005 بدأ بنك قطر الوطني بتنفيذ خطة شاملة وطموحة للتوسع الدولي مما عزز حضوره اليوم في أكثر من 30 دولة.[16]

يوضح الجدول التالي متوسط سعر QNB في بورصة قطر لعامي 2016-2017

البنك	2016		2017	
	S P	E P	S P	E P
QNB	150.52	142.994	133.99	127.2905

المصدر: من اعداد الباحثين بالاعتماد على تقارير بورصة قطر.

وقد اعتمدنا في دراستنا هذه على الفرضيات التالية:

1. يكون سعر التنفيذ 95 % من سعر الأصل الضمني.
2. نسبة تقلب السهم هي 25 % صعودا و 15 % نزولا.
3. معدل تقلب السهم ثابت خلال فترة سنة واحدة.
4. عدم وجود توزيعات الأرباح.
5. خيارات أوروبية
6. تفترض هذه النظرية بأن سعر الأصل يتبع قانون السير العشوائي، ويتم في الزمن المتقطع، وبالتالي فان معدل العائد الخالي من المخاطرة في الزمن المتقطع يحسب كالتالي:

$$1-\ e^{-r}\ \Rrightarrow 1-\ e^{-0.05}=5\%$$

اشتقاق سعر السهم باستخدام الحركة البروانية الهندسية من خلال شجرة بينوميال للفترة n:

من أجل نمذجة أسعار الأصول المالية نحن بحاجة الى نموذج لتحديد سلوك أسعار الأسهم، أين سنقوم باستخدام واحد من النماذج الأكثر شيوعا في المالية وهي الحركة البروانية الهندسية (GBM) والتي هي من الناحية التقنية تعتبر جزء من عمليات ماركوف وهذا يعني أن سعر السهم يتبع السير العشوائي والذي يتوافق مع فرضية المستوى الضعيف لكفاءة السوق.

حيث أن المنهجية المستخدمة لتسعير الأسهم هي من خلال نمذجة حركة أسعار هذه الأصول كحركة براونية هندسية بمعدل نمو(Drift)، اذ أنه يتم تطبيقها من خلال استعمال نماذج في الزمن المنفصل وذلك من أجل الحصول على أسعار تقريبية لسعر السهم، ومن بين هذه النماذج في الزمن المنفصل هي نموذج شجرة ثنائي الحدين، أين الفترات الزمنية يتم تقسيمها الى n فترة، والحركة البراونية الهندسية يتم نمذجتها باستخدام رسم بياني للسير العشوائي يسمى شجرة بينوميال للفترة n، حيث أن هذه الشجرة تستخدم لوصف سلوك أسعار الأسهم، كما أن هيكل هذه الشجرة يتم تشكيلها بناءا على أن S يمكن له اما أن يرتفع أو ينخفض وبالتالي فان حركة سعر السهم يتم تمثيلها بمسارات.

سوف نقوم بتطبيق الحركة البراونية الهندسية من خلال نمذجة أسعار السهم لبنك (**QNB**) باستخدام شجرة بينوميال للفترة n حيث أن:

السعر السوقي $S = 133.$

أما درجة تقلب السهم $\sigma = 0.22245$

$$t = 01 = 12\ mois$$

$$\Delta t = 1 \text{mois}$$

$$\Delta t = 0.083 \implies 1/12$$

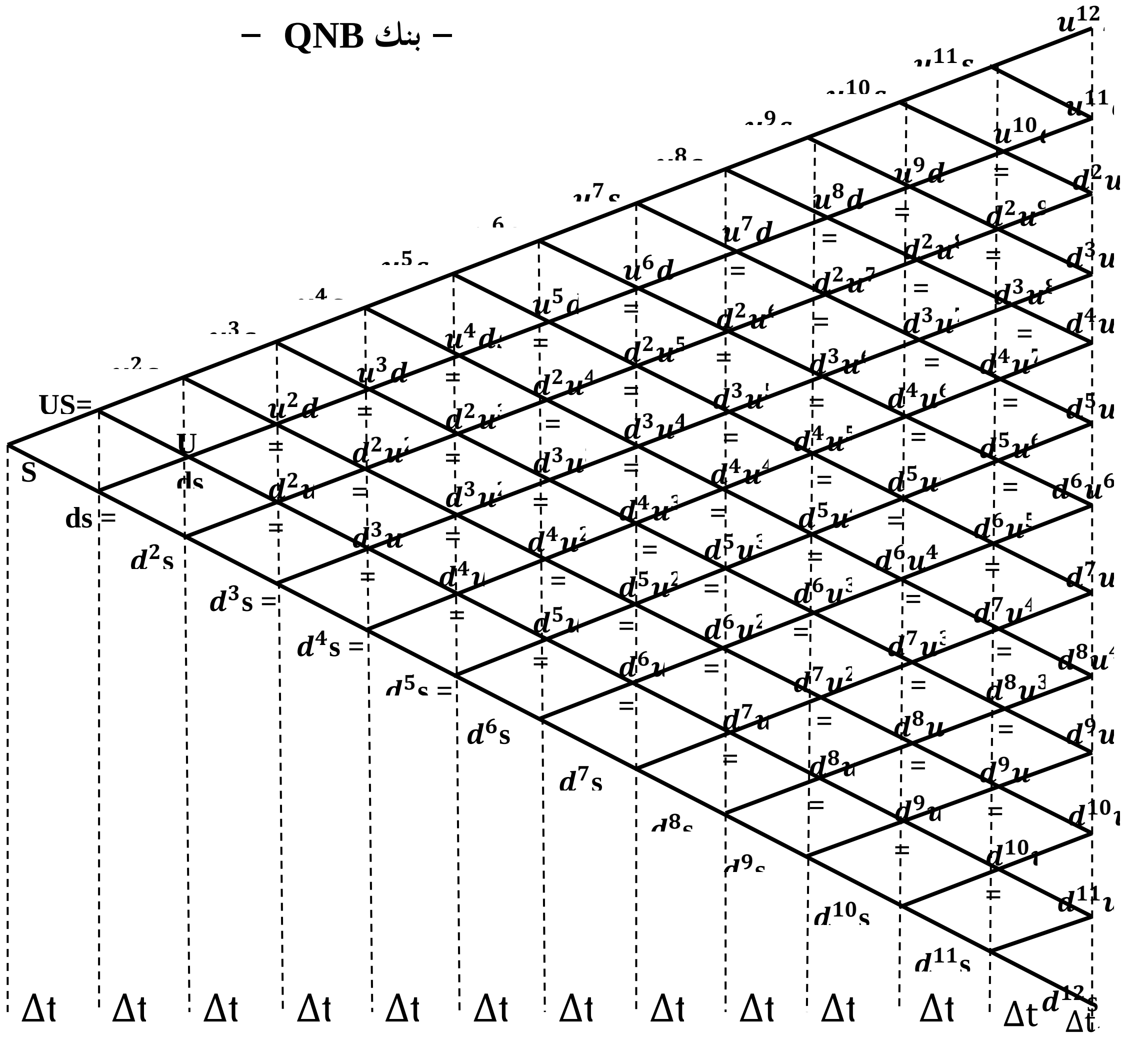
تبدأ بعقدة واحدة S_0 ، حيث أنه خلال كل فترة فان سعر السهم أما سيرتفع بمعامل u وذلك باحتمال P ، أو سينخفض بمعامل d وذلك باحتمال P − 1 بالتالي فان:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \Rightarrow u = e^{0.22245\sqrt{0.083}} = 1.066$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \Rightarrow u = e^{-0.22245\sqrt{0.083}} = 0.937$$

شكل رقم (03): يوضح اشتقاق سعر السهم لفترة 12 شهرا

– بنك QNB –



من خلال قيامنا بنمذجة أسعار الأسهم لبنك QNB، وذلك باستعمال الحركة البروانية الهندسية من خلال شجرة بينوميال فقد تحصلنا على توزيعات احتمالية لأسعار أسهم هذا البنك خلال 12 فترة جزئية، وبالتالي معرفة أعلى قيمة يمكن أن يحقق سهم بنك قطر الوطني خلال فترة الدراسة وكذلك أقل انخفاض يمكن أن تصل اليه هذا السهم، وهذا ما يجعلنا نتوصل الى أن استخدام الحركة البروانية الهندسية في بناء العديد من النماذج المخصصة لتسعير الأصول المالية يرجع الى توافق خصائصها مع طبيعة حركة أسعار الأسهم في الواقع مما يمكن المستثمرين من اتخاذ القرارات الاستثمارية المناسبة.

تسعير الأصول المالية وفق نموذج ثنائي الحد لفترة واحدة.

البنك	S	E	r	u	d	Su	Sd	Cu	Cd	C*
QNB	133.99	127.29	0,05	0,25	0,15	167.487	113.89	40.197	0	19.14

يتضمن الجدول الرموز التالية:

- S: متوسط سعر سهم البنك خلال فترة الدراسة 2017.
- E: سعر تنفيذ عقد الخيار والذي يمثل 95% من متوسط سعر السهم.
- u وd : نسبتي ارتفاع وانخفاض سعر السهم في السوق على التوالي واللتين بلغتا 25 % صعودا و 15% نزولا.
- Su و Sd: تمثلان قيم الأسهم في حالتي الارتفاع والانخفاض على التوالي.

تسعير الخيار باستعمال نموذج Binomial لفترتين.

البنك	S	E	r	u	d	Su^2	Sud	Sd^2	Cu^2	Cud	Cd^2	C**
QNB	133.99	127.29	0,05	0,25	0,15	209.36	142.36	96.81	82.07	15.07	0	25.44

حيث r: معدل الفائدة خالي من المخاطرة والبالغ 5% حسب إحصائيات البنك المركزي القطري لسنة 2017.

Su^2: يشير إلى ارتفاع الأسهم في المدة الأولى 2016 ثم في المدة الثانية 2017.

sud: أسعار الأسهم للقطاع في حالة ارتفاع أسعار الأسهم في الفترة الأولى ثم انخفاض الأسعار في المدة الثانية.

Sd^2: يشير إلى انخفاض أسعار الأسهم في المدة الأولى عام 2016، ثم الانخفاض عام 2017.

Cud: تمثل الأسعار العادلة للخيار في حالة صعود ثم هبوط

Cd^2 : الأسعار العادلة للخيار في حالة انخفاضين متتالين

Cu^2: الأسعار العادلة للخيار في حالة صعود ثم صعود

تسعير الخيار باستخدام نموذج ثنائي الحدين لـ N فترة.

نموذج ثنائي الحدين لـ n فترة هو تعدد النموذج الثنائي الحدين لفترة واحدة، فبدلا من اعتبار فترة كبيرة واحدة T هذه الأخيرة يتم تجزئتها إلى فترات جزئية ذات المجال Δt في كل فترة جزئية، فإن قيمة الخيار يتم تحديدها انطلاقا من قيم الفترات الجزئية التالية بعد تحيينها بسعر الفائدة خالي من الخطر، وعند تطبيق هذا النموذج على بنك قطر الوطني (QNB):

سعر الخيار الأوروبي يعطى بالصيغة التالية:

$$Fij = e^{-r\Delta t}\left[pF_{I+1,\mathrm{j}+1} + (1-p)F_{\mathrm{i}+1,\mathrm{j}}\right]$$

مع العلم أن:

$$S = 133.99 \quad \Delta = 0.22245 \quad E = 127.2905 \quad r = 0.05$$

$$t = 01 = 12\ mois$$

$$\Delta\mathrm{t} = 1\mathrm{mois}$$

$$\Delta t = 0.083 \implies 1/12$$

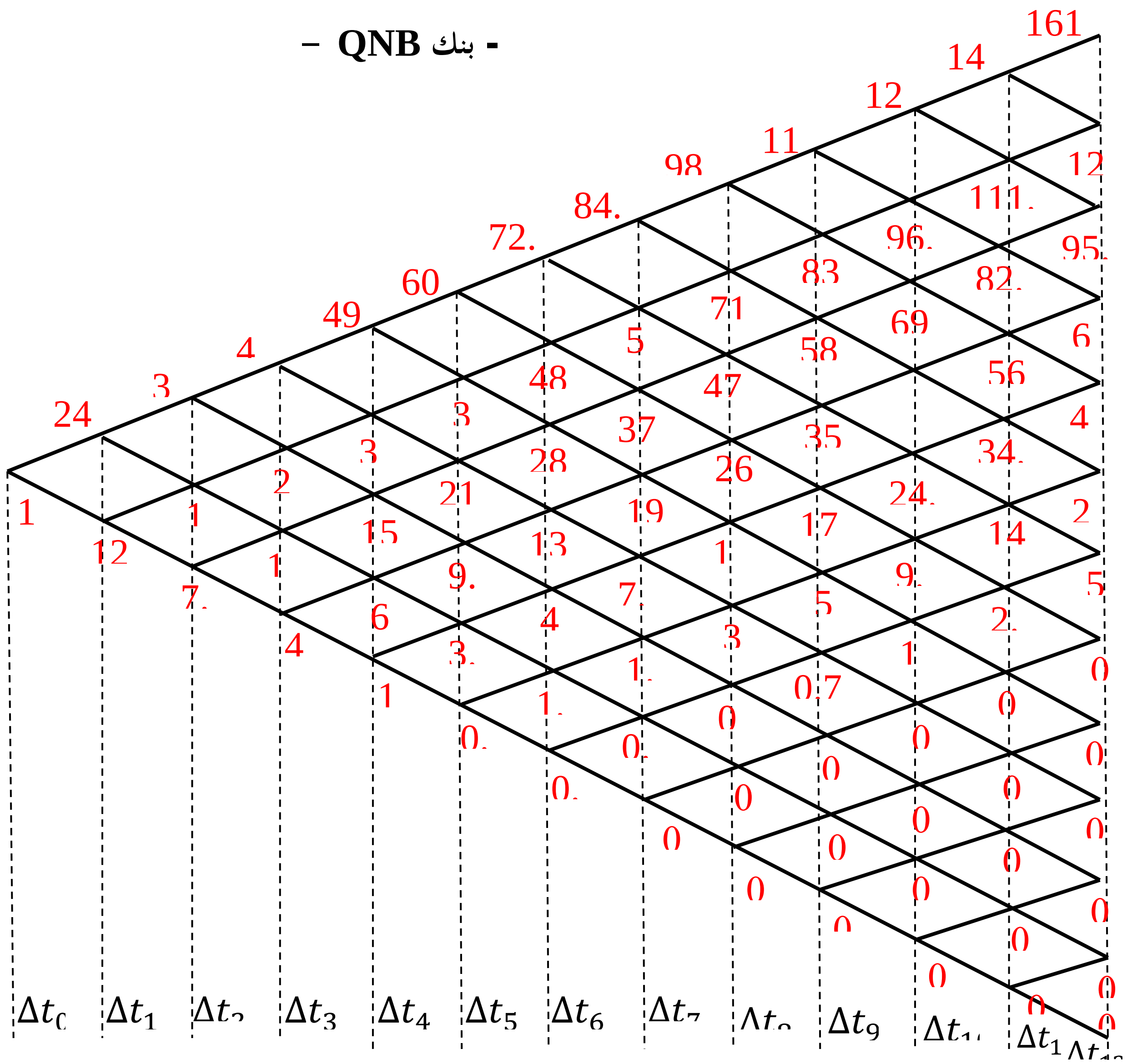
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \Rightarrow u = e^{0.22245\sqrt{0.083}} = 1.066$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \Rightarrow u = e^{-0.22245\sqrt{0.083}} = 0.937$$

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{r}\Delta\mathrm{t}} - \mathrm{d}}{\mathrm{u}-\mathrm{d}} \Rightarrow \frac{\mathrm{e}^{0.05*0.083} - 0.937}{1.066-0.937} = 0.520$$

الشكل رقم (04): القيمة النظرية العادلة لخيار شراء لمدة 12 شهرا

- بنك QNB -



بعد التطرق الى شجرة بينوميال ومن اجل ان تكون النتائج دقيقة (متقاربة) كان لابد من التطرق الى نموذج Black & Scholes

تسعير خيار الشراء وفقا لنموذج Black & Scholes.

ومن أجل تسعير الخيار محل الدراسة فإننا بحاجة لحساب متغيرات النموذج والتي تتمثل في العناصر التالية:

البيانات الخاصة باحتساب قيمة عقد خيار شراء حسب نموذج بلاك شولز.

البنك	S	E	R	درجة تقلب السهم	t	S/E	ln S/E
QNB	133.99	127.29	0,05	0.22245	01	1.0526	0.0513

تحديد قيمة مكافأة خيار الشراء.

البنك	d1	d2	N(d1)	N(d2)	C
QNB	0.5666	0.34415	0.7145	0.6345	18.906

كما ذكرنا سابقا فانه من خلال تطبيق نموذج بينوميال للفترة n يمكننا المقارنة مابين هذا الأخير ونموذج Black & Scholes لذلك فقد قمنا بتطبيق شجرة ثنائي الحد على بنك قطر الوطني (QNB) وتوصلنا الى قيمة الخيار ستكون 18.8 ريال، أما في نموذج بلاك شولز وجدنا قيمة الخيار 18.906 ريال وبالتالي يمكننا ملاحظة بأن القيم التي تحصلنا عليها كانت متقاربة جدا وهو ما يبين صحة هذين النموذجين وبالتالي وملائمتها لتسعير الأصول المالية لذلك فهما يعتبران من أهم النماذج المستخدمة في التسعير وذلك لقدرتهما على تقديم نتائج دقيقة وبالتالي مساعدة المستثمر على اتخاذ القرارات الاستثمارية المناسبة.

الخاتمة:

في السنوات الأخيرة تطورت الأسواق المالية الى حد كبير حيث أصبح بإمكان المتعاملين الاستثمار باستخدام استراتيجيات وأدوات مختلفة اما للحد من مخاطر التداول أو تحقيق أقصى قدر من الربح، لذلك توصلت هذه الدراسة الى أنه يرتبط نموذج التسعير ذي الحدين ارتباطا وثيقا بنموذج بلاك سكولز وتطوره ينبثق من الصيغة الرياضية التي قدمها Cox والآخرون بغرض استخدامها كوسيلة لتوضيح وشرح كيفية عمل نموذج بلاك شولز إلا أنه يمكن اعتبار أن نموذج بينوميال أكثر مرونة من هذا الأخير بسبب مجموعة من النقاط أولها أن ذي الحدين هو عبارة عن محاكاة لسعر الأصل ما يسمح بمعرفة الأسعار التي يمكن أن يحققها الأصل خلال مدة حياة الخيار وبالتالي تمكين المتعاملين من اتخاذ القرار الاستثماري السليم بالإضافة الى أنه على عكس نموذج بلاك شولز فانه لا يفترض أن الخيار يمارس فقط عند نقطة انتهاء الصلاحية وبسبب هذا أصبح من الواضح أن بينوميال أكثر دقة عندما يتعلق الأمر بحساب قيم الخيارات من النمط الأمريكي وهذا ما جعل نموذج ذي الحدين من النماذج التي تستخدم على نطاق واسع.

التوصيات:

- ضرورة التوسع في دراسة مالية الزمن المستمر continuous time finance لما لها من أهمية في تسعير الأصول بالإضافة الى تناسبها مع حركة أسعار الأسهم مما يجعلها أكثر واقعية.
- تكرار المساهمة من قبل الباحثين على اجراء دراسات ميدانية في حقل هذا الاختصاص الهام والعمل على استعمال نماذج رياضية ذات استعمال واسع في مجال الأوراق المالية والعمل على تطبيقها في الجانب المحلي لما يفيد أغراض التوسع في المعرفة النظرية والميدانية لكافة مفردات وتطبيقات تسعير الأصول المالية.

المراجع:

(1) - Nico Van Der Wijst , **finance a quantitative intoduction**, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, UK, 2013, p187.

(2) - Steve Bell, **Quantitative finanace for dummies**, John Wiley & Sons, Ltd, uk, 2016,p 195.

(3) - Nico Van Der Wijst , **finance a quantitative intoduction**, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, UK, 2013, p207-8

(4) - F.T. Oduro, V.K. Dedu, **The Binomial and Black-Scholes Option Pricing Models**: **A Pedagogical Review with Vba Implementation**, Department of Mathematics, Kwame Nkrumah University of Science and Technology,Kumasi, Ghana, Vol-2 No. 2, September, 2012, p 34.

(5) عبد الكريم الرتيمي، **تسعير الخيارات باستخدام نموذج ثنائي الحد وبناء محفظة تحوط: دراسة حالة لقطاع البنوك في سوق الكويت المالي خلال الفترة 2013/2012**، مذكرة ماجستير، جامعة قاصدي مرباح ورقلة، 2014/2013، ص 15-16.

(6) – Prasad Chalasani, Somesh Jha, **Steven Shreve**: **Stochastic Calculus and Finance**, Steven E. Shreve , July 25, 1997, p14.

(7) مسعودة بن لخضر، **عقود الخيار ودورها في التقليل من مخاطر أسواق رأس المال: دراسة تطبيقية على بورصة باريس للفترة 2014/2009**، مذكرة ماجستير، جامعة محمد خيضر –بسكرة-، 2015/2014، ص 118.

(8) هاشم فوزي دباس العبادي، **مرجع سابق**، ص 219-221.

(9) كاظم مدلول العارضي، **نماذج تسعير الخيارات المتقدمة ودورها في تحديد قيمة المكافأة للخيار وبناء محفظة التحوط : دراسة تطبيقية في القطاع المصرفي العراقي**، مجلة اداب الكوفة، العدد (5)، ص 204.

(10) – Fadugba Sunday Emmanuel, Ajayi Olayinka Adedoyin, Okedele Olanrewaju Hammed, **Performance measure of binomial model for pricing American and European options**, Science publishing group, Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, No. 6-1, 2014, p 18-30.

(11) – Tim Kyng, **The multi-binomial model and applications**, Division of Economic and Financial Studies, Macquarie University, Sydney- Australia, Research Paper No. 2005/03, July 2005, p 09.

(12) – Nico Van Der Wijst , **finance a quantitative intoduction**, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Uk, 2013,p220.

(13) – Espen gaarder haug, **the complete guide to option pricing formulas**, second edition, McGrew-hill, new York,p 02.

(14) – Paul Wilmot, **Quantitative finance**, Second edition, John Willey & Sons , Ltd, England, 2006, p 91-92.

(15) – Thomas Grossman, Steve Powell, Kent L Womack, Ying Zhang, **The Intuition Behind Option Valuation**: **A Teaching Note**, 2002, p 18.

(16) – www.qnb.com