قوائم المحتويات متاحة على ASJP المنصة الجزائرية للمجلات العلمية
الأكاديمية للدراسات الاجتماعية والإنسانية
الصفحة الرئيسية للمجلة: www.asjp.cerist.dz/en/PresentationRevue/552

سلاسل ماركوف وإستخدامها للتنبؤ بمعدل البطالة في الجزائر للفترة: 2007-2018

Markov hains and their use to forecast the rate of unemployment in Algeria for the period: 2007-2018

د. عيماد معوشي [1،*]
[1] كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، جامعة المدية، رئيس فرقة بحث بمخبر الإقتصاد التطبيقي في التنمية، الجزائر.

Key words:
Probability
Markov chains
Forecasting
Economic Modeling.

Abstract

Probability theory is one of the sciences that has developed recently, and has contemporary applications where economic variables that fulfill the conditions of random processes are considered a field for applications of probability theory and related topics. In this research paper, we chose a quantitative method of prediction, which is Markov chains, which is concerned with studying the behavior of random variables and predicting them in a probabilistic form, where we first explain the various methods for calculating probabilities, until the goal of understanding random systems is achieved later, defining them and showing the method of building a Markovian model for prediction. We found through the study that the prediction of the unemployment rate in the studied period is valid in the short term only by using the Markov chain model, as the stability of the model during the long term did not provide us with any results due to the multiplicity of solutions.We also concluded that the probability of decreasing the unemployment rate is greater than its probability of stabilizing, and the latter is greater than its probability of increasing.

معلومات المقال
تاريخ المقال:
الإرسال: 2020-07-23
الإرسال: 2020-12-01
القبول : 2020-12-10

الكلمات المفتاحية:
الاحتمالات
سلاسل ماركوف
التنبؤ
النمذجة الاقتصادية.

ملخص

تعد نظرية الإحتمالات أحد العلوم التي تطورت مؤخرا، وذات التطبيقات المعاصرة حيث تعد المتغيرات الإقتصادية التي تحقق شروط السيرورات العشوائية مجالا لتطبيقات نظرية الإحتمالات والموضوعات ذات الصلة. في هذه الورقة البحثية إخترنا أسلوبا كميا للتنبؤ وهو سلاسل ماركوف والتي تعنى بدراسة سلوك المتغيرات العشوائية والتنبؤ بها في شكل إحتمالي، حيث بداية وضحنا مختلف الطرق لحساب الإحتمالات، حتى يتحقق هدف فهم الأنظمة العشوائية فيما بعد، والتعريف بها وبيان طريقة بناء نموذج ماركوفي للتنبؤ به. توصلنا من خلال الدراسة أن التنبؤ بمعدل البطالة في الفترة المدروسة يصلح في المدى القصير فقط بإستخدام نموذج سلسلة ماركوف، حيث ان إستقرار النموذج خلال الأجل الطويل لم يمدنا بأي نتائج نظرا لتعدد الحلول. كذلك توصلنا إلى أن إحتمال إنخفاض معدل البطالة أكبر من إحتمال إستقراره، وهذا الأخير أكبر من إحتمال إرتفاعه.

* Corresponding author at :Univercity fo Medea. ALGERIA.
Email :imaouchi@gmail.com

1. مقدمة

سلاسل ماركوف هي أداة كمية لتحليل السلوك الحالي لمتغير معين وذلك لأغراض التنبؤ بالسلوك المستقبلي لهذا المتغير المعين، وتنسب سلاسل ماركوف إلى إسم مكتشفها أندريا ماركوف " ذلك العالم الروسى الذى ولد عام 1856م وتوفى عام 1922م "، وتعتبر سلاسل ماركوف أحد أدوات "البرمجة الديناميكية" التي تعد أحد أساليب بحوث العمليات. حيث يهتم أسلوب ماركوف بدراسة عملية إتخاذ القرارات في المسائل التي تتوقف الحالة المستقبلية لها على الحالة الراهنة وذلك بغض النظر عن الأحوال السابقة للنظام، كما يمكن إستخدام سلاسل ماركوف كأحد أساليب التنبوء. قبل الحديث عن أساس بناء النموذج الماركوفي علينا معرفة العنصر الأساسي لبنائه وهو الإحتمال حيث يتوجب علينا أن نفهم القواعد المنطقية والتجريدية لحساب إحتمال، غير أننا في هذا المقام لا نسرد الموضوع بتفاصيله التي لا تعد ذات أهمية لفهم نظام عشوائي بسيط بل نكتفي بالقوانين الأساسية التي تمكننا من إبراز الجانب التقني من نظرية الإحتمالات.

تمتد إستخدامات نظرية الإحتمالات إلى عمليات التنبؤ بمختلف أساليبها والتي تعد من أهم العمليات التي يحتاجها متخذ القرار ليبني قراراته ومساعدته في بناء الخطط، ولإجراء تنبؤات ذات مصداقية عادة ما تستخدم طرق القياس الإقتصادي أو بعض النماذج الإحتمالية ذات التطبيق الإقتصادي مثل سلاسل ماركوف حيث تحتل نظرية عمليات ماركوف مكانة كبيرة وهامة جدا في العمليات العشوائية.

الإشكالية المطروحة: كيف يمكن بناء نظام عشوائي يخص معدل البطالة في الجزائر و التنبؤ بسلوكه باستخدم سلسلة ماركوف خلال الفترة (2007/2018)؟

التساؤلات الجزئية: للإجابة على هذه الإشكالية نقسمها لمجموعة من التساؤلات الجزئية:

1- ما هي الطرق المعتمدة لتعيين الإحتمال؟

2- ما ذا نقصد بسلسلة ماركوفية ؟

3- ما هو أساس بناء نظام عشوائي ؟

4- كيف يتم التنبؤ بنموذج ماركوف ؟

5- هل تغني عمليات التنبؤ الماركوفية عن الأساليب الأخرى للتنبؤ ؟

6- كيف يتم التنبؤ بمعدل البطالة في الجزائر بإستخدام سلسلة ماركوفية ؟

الفرضيات: وللوصول إلى النتائج المرجوة نضع الفرضيات التالية:

1- هناك عدة طرق لتعيين الإحتمال وتؤدي إلى نفس النتيجة.

2-لا تختلف الأنظمة العشوائية عن الأنظمة الرياضية الأخرى.

3-يمكن الإعتماد على نموذج ماركوف للتنبؤ بالمتغيرات الإقتصادية .

4- تقتصر عمليات التنبؤ بسلاسل ماركوف على المسائل الإقتصادية التي يمكن نمذجتها وفقا لنظام عشوائي.

5- التنبؤ بمعدل البطالة في الجزائر أحد التطبيقات لسلاسل ماركوف.

أهمية البحث: يأخذ موضوع البحث أهميته من الإهتمام المتزايد بإستخدام الأساليب الكمية والطرق الإحصائية في معظم البحوث في العصر الحديث، حيث أثبتت هذه الأدوات القدرة على وصف وتحليل الظواهر الإقتصادية وغير الإقتصادية، وتعد سلاسل ماركوف من بين أهم التطبيقات التي تساعد في تحليل النظم والتنبؤ بها .

أهداف البحث : نهدف من خلال بحثنا هذا إلى:

التعرف على طرق تعيين الإحتمالات لفهم الإحتمال من مختلف الجوانب وتذليل الصعوبات المتعلقة بالمنهج المتبع للقياس الإحتمالي للمسائل الإقتصادية.

التعرف على سلاسل ماركوف وأسلوبها في التنبؤ بالأنظمة ذات الصبغة العشوائية، والتعرف على المنهجية المتبعة للتنبؤ .

التعرف على حدود عملية التنبؤ بسلسلة ماركوفية، وتبيان أوجه القوة والقصور لهذه السلاسل، وهذا لمعرفة حدود إستعمال هذه الطريقة في التنبؤ وخاصة في الأجل الطويل.

منهج البحث: نعتمد المنهج الإستقرائي بأداوته الوصفية والتحليلية، بالتعرف على النموذج الإحتمالي لماركوف وإسقاطه على سلسلة تطور معدل البطالة في الجزائر، وتحليل النتائج المتوصل إليها بعد المرور بكل المراحل الوصفية من بناء النموذج البياني مرورا بالبناء الجبري وحتى عملية التنبؤ..

الدراسات السابقة: تعد سلاسل ماركوف أحد النماذج المستخدمة في التنبؤ بالمتغيرات الإقتصادية، فهناك بعض الدراسات التي تناولت الموضوع، ونعرض بعض الدراسات كما يلي:

(1) **دراسة أحمد ذياب أحمد** (2009) **بعنوان**: استخدام سلاسل ماركوف للتنبؤ بالأرقام القياسية لأسعار المستهلك في العراق، مركز بحوث السوق وحماية المستهلك، كلية الإدارة والإقتصاد، العراق.

حيث كان الهدف من هذه الدراسة هو التنبؤ باتجاه الأرقام القياسية لأسعار المستهلك للسلع الأساسية باستخدام سلاسل ماركوف، إذ تم تقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقالية بطريقة الإمكان الأعظم التي طبقت على بيانات شهرية أخذت من الجهاز المركزي للإحصاء وتكنولوجيا المعلومات، حيث أظهرت نتائج التنبؤ استنتاجا مهما هو أن جميع الأرقام القياسية لأسعار المستهلك للسلع الأساسية ستشهد ارتفاعا

ملحوظا ومن ثم ستنخفض، وتكمن أوجه الإختلاف بين الدراستين في المتغير المدروس من جهة، والبلد من جهة أخرى بالإضافة لإختلاف فترة الدراسة بطبيعة الحال.

(2) **دراسة محمد عكروش، يسيرة دريباتي، دارين محمد جلموتي** (2017) **بعنوان**: استخدام سلاسل ماركوف للتنبؤ بالأرقام القىاسىة لأسعار المستهلك في سورية، مجلة جامعة البعث، كلية الإدارة والإقتصاد، سورية: حيث تم في هذا البحث التنبؤ بالأرقام القياسية لأسعار المستهلك ل: (الأغذية، الملابس و الأحذية ، الاتصالات، النقل، الصحة، التعليم، سكن و مياه و كهرباء)، و ذلك باستخدام مصفوفة ماركوف في التقدير، بالاعتماد على بيانات شهرية أُخذت من المكتب المركزي للإحصاء في سورية خلال الفترة (2010\1\1، 31\12\2011)، حيث تم تحليل النتائج من خلال حساب شعاع احتمالات الوضعيات (الحالات) في اللحظة t0 = 2010 واستخدامه مع مصفوفة الاحتمالات الانتقالية للتنبؤ بشعاع احتمالات الوضعيات على المدى الطويل والقصير لمعرفة الاتجاه الذي ستسلكه الأرقام القياسية في المستقبل. و كانت أهم نتائج البحث: عدم ثبات شعاع الاحتمالات الانتقالية للوضعيات (ارتفاع - انخفاض-استقرار) أثناء فترة التنبؤ، كذلك الأمر بالنسبة لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية. ومثل الدراسة السابقة تكمن أوجه الإختلاف بين الدراستين في المتغير المدروس من جهة، والبلد من جهة أخرى بالإضافة لإختلاف فترة الدراسة بطبيعة الحال.

(3) **دراسة عبد الغفور جاسم العبيدي، عمار ياسين سليمان** (2018) **بعنوان**: استخدام سلاسل ماركوف في المجالات الطبية، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، ع 27، ص-ص 107-120: تم في هذا البحث دراسة السلسلة الزمنية لعدد الإصابات بمرض ذات الرئة كمتسلسلة ماركو ، وذلك بوضع افتراضات على عدد الإصابات لصياغة المسألة وفق نموذج متسلسلة ماركوف بالاعتماد عمى عدد الحالات التي تمثل الظاهرة، وبعد إيجاد الصفات الإحصائية لهذه السلسلة تم إيجاد التوزيع المستقر لهذه السلسلة، وتخلف دراستنا عن هذه الدراسة في المجال التطبيقي من حيث متغيرة الدراسة والبلد.

(4) دراسة مؤمن محمد الحنجوري، شادي إسماعيل التلباني (2015) بعنوان: استخدام سلاسل ماركوف الامتصاصية في تحليل حركة الطلبة خلال المراحل الدراسية -دراسة تطبيقية على طلبة كلية الهندسة بالجامعة الإسلامية بغزة، مجلة جامعة القدس المفتوحة للأبحاث والدراسات، ع 35، فلسطين. تناول هذا البحث استخدام سلاسل ماركوف الامتصاصية باعتبارها أسلوبا للعمليات العشوائية، حيث يعد هذا الأسلوب من أفضل الأساليب المستخدمة في تحليل حركة الطلبة خلال المراحل الدراسية، وكذلك تقدير الزمن اللازم الذي يستغرقه الطالب إلى حين تخرجه بهدف ربط مخرجات التعليم العالي بحاجات المجتمع. وتناول البحث أيضا الجانب النظري والتطبيقي لسلاسل ماركوف الامتصاصية ومن ثم تطبيقها على بيانات طلبة كلية الهندسة بالجامعة الإسلامية بغزة خلال الفترة من 2000 حتى 2011، وقد توصل البحث إلى نتائج عدة من أهمها أن متوسط عدد الطلبة المتوقع حصولهم على بكالوريوس هندسة في خمس السنوات القادمة 2013/2012 حتى 2017/2016 هو 2196 طالب. وبطبيعة الحال مجال دراستنا يختلف عن هذه الدراسة من خلال مجال التطبيق والبلد.

(5) **دراسة بن النوي أحلام وبوقرة رابح** (2019) **بعنوان**: استخدام سلاسل ماركوف في التنبؤ بالحصة السوقية للبنوك التجارية -دراسة تطبيقية على بنوك : BADR, BDL, BEA وكالات برج بوعريريج-، مجلة دراسات إقتصادية، العدد 12، ص-ص 457-469، جامعة الجلفة، الجزائر: حيث إعتبرت الدراسة أن سلاسل ماركوف من أهم النماذج الكمية التي يتوجب على متخذي القرار معرفتها، وأهميتها تنشأ من مجالات تطبيقها الواسعة، حيث طبقت بنجاح في عمليات التنبؤ بالحالة التي يكون عليها النظام خلال فترة زمنية معينة أو في نهاية فترة زمنية ما. وهدفت الدراسة إلى تحديد الحصص السوقية للبنوك محل الدراسة (BADR, BDL, BEA) وكالات برج بوعريريج والتنبؤ بالحصص السوقية لها، مع عرض و تحليل نتائج الدراسة، حيث تختلف دراستنا عن هذه الدراسة في مجال التطبيق من جهة وفي طريقة المعالجة من جهة أخرى.

هيكل البحث: تم الإعتماد على ثلاثة محاور أساسية، للتمكن من إبراز الجوانب النظرية والتطبيقية لنظرية الإحتمالات والتعرف على نموذج سلاسل ماركوف وكذا طريقة تطبيقه على التنبؤ بمعدل البطالة في الجزائر في الفترة المدروسة وذلك بأخذ سلسلة بيانات تغطي هذه الفترة ، وكانت المحاور كما يلي:

المحور الأول: مفهوم الإحتمال وطرق تعيينه؛

المحور الثاني: سلاسل ماركوف والتنبؤ بالأنظمة العشوائية؛

المحور الثالث: النموذج الإحتمالي لسلوك معدل البطالة في الجزائر.

2. مفهوم الإحتمال وطرق تعيين الإحتمالات

إن خصائص فضاء العينة (المحدود أو غير المحدود) وكذا خصائص الحوادث المرتبطة به (سواء في حالة تساوي فرص الظهور أو لا) يحتم سلوك عدة طرق لتعيين الإحتمال المناسب وحسب الخصائص المتوفرة.

1.2.**الطريقة التقليدية (اللابلاسية)**: لنفترض أنه يطلب منا إعطاء إحتمالات الحوادث الأولية لتجربة إحتمالية E، وفراغ الحوادث الأولية Ω المرتبط بها يتضمن عددا منتهيا من الحوادث

ω، أي أن . $\Omega=\{\omega_i; i:\overline{1-n}\}$ في بعض الحالات يمكن إعتبار أن كل الحوادث الأولية ω من الفراغ Ω متساوية الإمكانية في الظهور، وبالتالي لا يتمتع أي حادث أولي ω بأفضلية موضوعية عن الحوادث الأولية الأخرى من حيث الوقوع أو عدم الوقوع. ونسمي هذه الخاصية تساوي الإحتمالات للحوادث الأولية [رأفت، بدون سنة نشر، ص 107].

بصفة عامة: ليكن Ω فراغ الحوادث الأولية المنتهي (المحدود) والمرتبط بتجربة إحتمالية (عشوائية) E. إذا اعتبرنا أن الحوادث الأولية $\omega \in \Omega$ متساوية الإمكانية، فإن كل حادث أولي $\omega_i \in \Omega; i: \overline{1-n}$، يمكن وضعه مقابلا لنفس قيمة الإحتمال وهو $1/_n$ ، أي أن [مصطفى، 2008، ص 3]:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

تدعى هذه الطريقة لإعطاء الإحتمالات بالطريقة التقليدية أو طريقة "لابلاس". ونكتب بإختصار:

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n};\ \omega_i \in \Omega$$

إحتمال أي حادث A، يتكون من مجموعة من الحوادث الأولية ω، $A = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m\}$ يمكن حسابه كما يلي:

$$P(A) = P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup \cdots \cup\{\omega_m\}) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \frac{m}{n} = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)}$$

حيث $\eta(A)$ يدعى أصلي A (عدد عناصر A)، و $\eta(\Omega)$ هو أصلي فراغ الحوادث الأولية. من الملاحظ أن إحتمال

الحادث A يتناسب مع عدد عناصره طرديا. ونكتب القانون التقليدي لحساب الإحتمال لحدث ما A، كما يلي:

$$\text{إحتمال الحادث } A = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

أو:

$$P(A) = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)}$$

إن نظرية الاحتمالات وكما تم ذكره سلفا، إرتبطت في بداية تطورها بألعاب الحظ. لهذا فالطريقة التقليدية لتعيين الاحتمالات إستخدمت في الأساس من أجل بناء نماذج تلك الأنواع من ألعاب الحظ (إلقاء قطعة نقود، إلقاء حجر زهر، ورق لعب ...). لكن لا يجوز فهم الطريقة التقليدية لتعيين الاحتمالات على أنها تقتصر فقط على حساب الإحتمالات لتلك الحوادث البسيطة فقط، كظهور الصورة أو الرقم عند إلقاء قطعة نقود معدنية. بل لها تطبيقات أخرى عديدة، كإختبار الفرضيات، في حالات عدة تعتمد على التعريف التقليدي للإحتمال. فمثلا في تجربة إلقاء قطعة نقود، إذا كانت فرضية العدم (تناظر قطعة النقود) مقابل (القطعة غير متناظرة) فإن قبول أو رفض فرضية العدم تعتمد على الطريقة التقليدية لتعيين الإحتمالات.

الحادث A يتناسب مع عدد عناصره طرديا. ونكتب القانون التقليدي لحساب الإحتمال لحدث ما A، كما يلي:

$$\text{إحتمال الحادث } A = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

أو:

$$P(A) = \frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)}$$

إن نظرية الاحتمالات وكما تم ذكره سلفا، إرتبطت في بداية تطورها بألعاب الحظ. لهذا فالطريقة التقليدية لتعيين الاحتمالات إستخدمت في الأساس من أجل بناء نماذج تلك الأنواع من ألعاب الحظ (إلقاء قطعة نقود، إلقاء حجر زهر، ورق لعب ...). لكن لا يجوز فهم الطريقة التقليدية لتعيين الاحتمالات على أنها تقتصر فقط على حساب الإحتمالات لتلك الحوادث البسيطة فقط، كظهور الصورة أو الرقم عند إلقاء قطعة نقود معدنية. بل لها تطبيقات أخرى عديدة، كإختبار الفرضيات، في حالات عدة تعتمد على التعريف التقليدي للإحتمال. فمثلا في تجربة إلقاء قطعة نقود، إذا كانت فرضية العدم (تناظر قطعة النقود) مقابل (القطعة غير متناظرة) فإن قبول أو رفض فرضية العدم تعتمد على الطريقة التقليدية لتعيين الإحتمالات.

2.2. **الطريقة الهندسية لتعيين الإحتمالات**: ليكن الفراغ Ω لتجربة احتمالية E، يتألف من عدد غير منته من الحوادث الأولية ، أي أن $\eta(\Omega)=\infty$. ولتكن Ω مجموعة محدودة في R^n . سنفترض أن Ω ، وبالتالي الحوادث Ai لها قياس هندسي منته : حيث القياس الهندسي في R للمجموعة Ω يعتبر طولها، وفي R^2 يعتبر مساحتها، أما في R^3 حجمها. وهذا القياس قد يكون طولا L، مساحة G ، أو حجم V.

إن تعيين الإحتمال للحوادث الأولية ω_i بالطريقة التقليدية، ينتج عنه ما يلي:

$$P(\omega) = \frac{1}{\eta(\Omega)} = 0$$

وللخروج من هذه الوضعية نقوم بإيجاد إحتمال مجموعة من الحوادث الأولية ω_i [حادث مركب A] وليس إحتمال كل حادث أولي على حدى. غير أن من الجدير بالذكر التذكير

بأنه يجب على القياس الاحتمالي للمجموعة الشاملة (فراغ العينة) Ω يجب أن يحقق مسلمات الإحتمال (يساوي الواحد). وأن إحتمال أي حادث يتناسب مع قياس A، وهذا القياس قد يكون طولا l، مساحة g، أو حجم v.

ويمكن كتابة صيغة الإحتمال حسب هذه الصيغة كما يلي:

$$P(A)=\frac{\eta(A)}{\eta(\Omega)}=\frac{\text{قياس } A}{\text{قياس } \Omega}=\frac{\text{طول } A}{\text{طول } \Omega}=\frac{\text{مساحة } A}{\text{مساحة } \Omega}$$
$$=\frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } \Omega}$$

الطريقة الهندسية هي تعميم للتعريف التقليدي وذلك في بعض الحالات التي يكون فيها فضاء العينة غير محدود. خصوصية هذه الطريقة هي أنها تعتمد على القياسات الهندسية وتفترض أن يكون لأي حدث (A) من المجموعة الشاملة Ω قياس هندسي منته (طول منته، مساحة منتهية، حجم منته، ...) في الفراغ R^n، كما تفترض أن الحدث يجري نشكل متساو على كامل المنطقة Ω. مما سبق نرى بأن التعريف الهندسي للإحتمال ما هو إلا تعميم للتعريف التقليدي للإحتمال على بعض الحالات التي يكون فيها فراغ الحوادث الأولية غير منته. [مصطفى، 2008، ص 73]

3.2. **الطريقة الإحصائية (الإستقرائية أو التجريبية)**: في الواقع ليس معلوما دائما عدد الحوادث الأولية لفراغ العينة Ω، فمثلا ما عدد مرات إلقاء قطعة نقود معدنية حتى نحصل على الصورة للمرة الأولى، وما عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتف معين خلال فترة زمنية t؟

هذا بالإضافة إلى إن شرط الإمكانية المتساوية لوقوع (البيولوجي) أو التقني، أن نحدد مسبقا (بدون تجريب) إحتمال حدث ما إعتمادا على التعريف التقليدي أو الهندسي للإحتمال. ولإيجاد مثل هذا النوع من الاحتمال يستخدما المدخل التجريبي، وبالتالي الإحتمال الإحصائي. [مصطفى، 2008، ص91]

4.2. مسلمات ودساتير الإحتمالات

1.4.2. **مسلمات الاحتمال**: إذا كانت E تجربة عشوائية، Ai حوادث شاملة (إتحادها يعطى المجموعة الشاملة) متنافية مثنى مثنى (غير متقاطعة) من هذه التجربة فإن [البشيتز، 2000، ص28]:

$$1*\quad 0\le P(A)\le 1$$
$$2*\quad \sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$$
$$3*\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ \ si\ \ A\cap B=\emptyset$$
$$4*\ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

2.4.2. **دساتير الإحتمالات**: نتناول هنا عمليتي الجمع والضرب للإحتمالات كمايلي:

- إذا كان A وB حدثان فإن [شبيجل، 2004، ص8]:

$$P(A+B)=P(A\cup B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- إذا كان A وB حدثان فإن: (الحالة العامة أي مرتبطان أو مستقلان)

$$P(A\times B)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)$$

- إذا كان A وB مستقلان فإن

وبالتالي يصبح [FREDON,MAUMY-BERTRAND, BERTRAND , 2009, p39]:

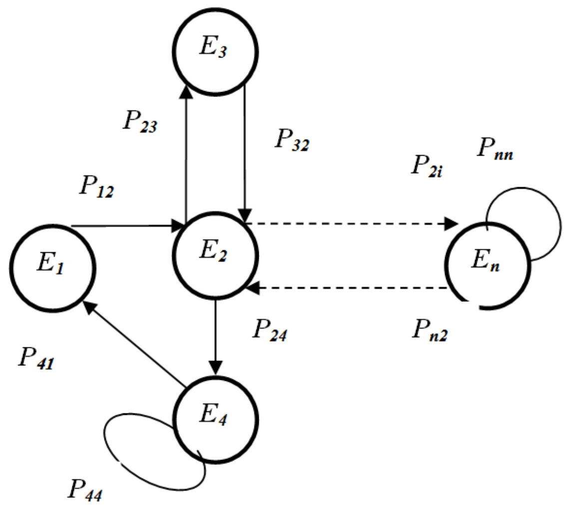
$$P(A\times B)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

3. سلاسل ماركوف والتنبؤ بالأنظمة العشوائية

تحتل نظرية عمليات ماركوف* مكانة كبيرة وهامة جدا في نظرية العمليات العشوائية. تعزز هذه المكانة تعدد التطبيقات التي تتمتع بها عمليات ماركوف في النماذج الفيزيائية والبيولوجية وعلم الاجتماع والهندسة وعلم الإدارة بالإضافة إلى تطبيقاتها المتعددة في الكثير من النماذج الإحصائية و الهندسية .

1.3. **مفهوم سلسلة ماركوف**: عادةً يتم تفسير سلسلة ماركوف على أنها عبارة عن متتابعة من الحالات التي يمكن أن يكون فيها نظام ما عند أي لحظة زمنية t، أو متتابعة من المواضع التي يحتلها جسيم متحرك. بإعتبار أن هذه الحالات هي E1 , E2, En , نعرض التمثيل البياني التالي لبيان علاقات سير النظام العشوائي وذلك بشكل مبسط ومختصر يفي بالغرض كما يلي:

الشكل رقم (1) : مثال بياني لنظام عشوائي



المصدر: إعداد الباحث

* أندري أندرييفيتش ماركوف (1856-1922) Andreï Andreïevitch Markov كان أستاذا في جامعة سانت بيترسبرج بالاتحاد السوفيتي السابق من عام 1886 كما أنه أصبح عضوا

من خلال الرسم نلاحظ الإحتمالات الإنتقالية P_{ij} من حالة إلى أخرى موضحة فوق كل سهم وحسب الإتجاه.

إذن فيمكن من خلال البيان أعلاه كتابة المصفوفة العشوائية w للنظام وتمتاز بأنها مصفوفة مربعة ومجموع قيم الأشعة عموديا يساوي الواحد كما يلي [الطويل، 2009، ص 232]:

الحالات	E_1	E_2	$\cdots$	E_n
E_1	P_{11}	P_{12}	$\cdots$	P_{1n}
E_2	P_{21}	P_{22}	$\cdots$	P_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	P_{ij}	$\vdots$
E_n	P_{n1}	P_{n2}	$\cdots$	P_{nn}
Σ	1	1	1	1

$$w = \left[P_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & P_{ij} & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

وتحقق قيم المصفوفة ما يلي:

$$1)\quad 0 < P_{ij} < 1$$

$$2)\quad \sum_{i=1}^{n} P_{ij} = 1\,;\quad j = \overline{1-n}$$

وكخطوة أساسية يتم تحديد شعاع الإنتقال العشوائي الإبتدائي ونرمز له ζ_0 حيث يعبر عن حالة النظام في المرحلة الإبتدائية أي نصيب كل حالة:

$$\zeta_0 = \left[P_i\right]_{1\le i\le n} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

2.3طريقة التنبؤ بسلسلة ماركوف: يتم التنبؤ عن طريق نموذج ماركوف بضرب مصفوفة الإنتقال العشوائية في شعاع الإنتقال العشوائي، ويمكن إجراء التنبو ، بإفتراض نريد التنبؤ بخطوة واحدة تعادل خطوة إنتقال في النظام (شهر، يوم، ساعة ...) نرمز لها $\zeta 1$ ونكتب:

$$\zeta_1 = w \cdot \zeta_0$$

وهكذا من أجل الخطوة 2، تكون نتيجة ضرب مصفوفة الانتقال العشوائي في شعاع المرحلة الأولى المحصل عليه بعد المرحلة الابتدائية:

$$\zeta_2 = w \cdot \zeta_1 = w \cdot w \cdot \zeta_0 = w^2 \cdot \zeta_0$$

وبصفة عامة تعطى التحركات الإحتمالية بالصيغة التالية [الفاتح، المغربي، 2017، ص 183]:

$$\zeta_t = w^t \cdot \zeta_0 \quad ; t \in \mathbb{N}$$

3.3. استقرار (إتزان) سلسلة ماركوف: تعبر الإنتقالات الإحتمالية عن التنبؤات في الأجل القصير، غير أن التنبؤ في الأجل الطويل يجعل من الشعاع المتنبأ به $\zeta_s=\psi$ مساويا للشعاع السابق له $\zeta_{(s+1)}=\psi$، ويمكن الوصول إلى هذه الحالة عن طريق عمليات تكرارية للضرب أو عن طريق العملية الرياضية التالية:

$$\psi_{(n\times 1)} = w_{(n\times n)} \cdot \psi_{(n\times 1)}$$

ونعبر عنها مصفوفاتيا كما يلي:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & P_{ij} & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

ثم يتم حل النموذج الخطي التالي:

$$\begin{cases} \gamma_1 = P_{11}\gamma_1 + P_{12}\gamma_2 + \cdots + P_{1n}\gamma_n \\ \gamma_2 = P_{21}\gamma_1 + P_{22}\gamma_2 + \cdots + P_{2n}\gamma_n \\ \vdots \\ \gamma_n = P_{n1}\gamma_1 + P_{n2}\gamma_2 + \cdots + P_{nn}\gamma_n \\ \quad \gamma_1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

ويكون الحل النهائي يعبر عن حالة الإتزان للسلسلة:

$$\psi = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

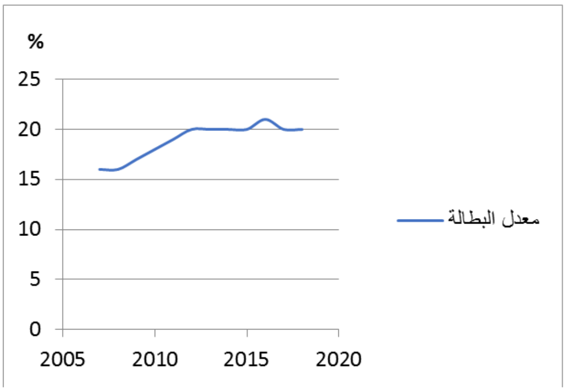
وهذا الشعاع يمثل الإحتمالات الجزئية لكل حالة من حالات النظام، وهو يعطينا تصورا نسبيا مئويا لسلوك كل حالة في الأجل القصير والطويل غلى غاية إتزان السلسلة.

4. بناء النموذج الإحتمالي لسلوك معدل البطالة في الجزائر

هذا المحور هو همزة الوصل بين المحاور السابقة حيث نحاول إسقاط نموذج سلسلة " ماركوف " الذي تطرقنا إليه في المحور السابق، على تطور معدل البطالة في الجزائر وتظهر المعطيات الخاصة بالدراسة في الجدول رقم (1) من الملاحق، وفيما يلي نعطي تمثيلا بيانيا يوضح سلوك هذا المتغير:

كاملا في أكاديمية العلوم سانت بيترسبرج منذ عام 1896. بدأ دراسة سلاسل بسيطة في عام 1906 وقام بنشر العديد من الأبحاث تخص هذا الموضوع وبعد فترة حصل على شهرة كرائد في هذا المجال. وقد ظهر تعبير سلسلة ماركوف قبل عام 1926.

الشكل رقم (2) : تطور معدل البطالة في الجزائر 2018-2007



المصدر: إعداد الباحث بالإعتماد على برنامج Excel ومعطيات الجدول (1) في الملاحق.

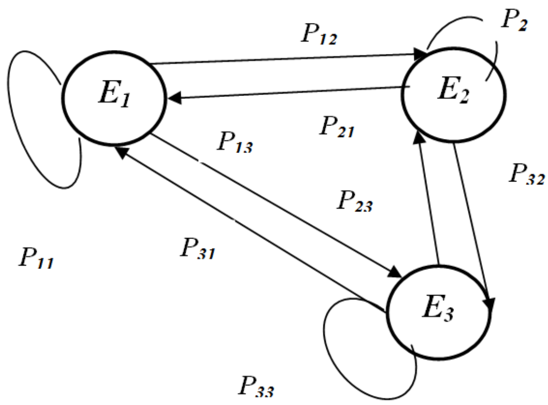
تعدّ الجزائر إحدى الدول الإفريقيّة المزدحمة بالسكان، وهي من أكبر الدول العربية والإفريقيّة مساحةً، حيث يتركّز اقتصادها على قطاع النفط (المحروقات)، واعتماده كوسيلة أولية لتمويل إيرادات الدولة.

من خلال التمثيل البياني يتضح أن معدل البطالة في الجزائر خلال العشرة سنوات الأخيرة عرف إستقرارا نسبيا في الآونة الأخيرة غير أنه إرتفع في بداية فترة الدراسة أي من 2007 إلى غاية 2012.

حيث تعتبر ظاهرة البطالة في الجزائر من أهم إفرازات الأزمة الاقتصادية التي مست الجزائر منذ سنة 1986 -تاريخ الصدمة البترولية-. فعلى إثر انخفاض أسعار النفط تراجعت إيرادات الدولة المعتمدة أساسا عليها -أي الإيرادات-. في تمويل الاقتصاد الوطني وفي تسيير دواليب الحياة الاقتصادية، مما اضطر العديد من المؤسسات إلى تسريح عمالها في محاولة منها لتطبيق إستراتيجية صندوق النقد الدولي لتجاوز الأزمة.

1.4. التطبيقات الرياضية : إن أهم خطوة أو الحجر الأساسي للتنبؤ بأي سيرورة عشوائية كما سبق وأن ذكرنا هو إيجاد المصفوفة الإحتمالية وهي مصفوفة مربعة تحقق الخصائص المذكورة سابقا، وكذلك تحديد شعاع الإنتقال أو نصيب النظام في المرحلة الإبتدائية ونستخدم الرموز التالية:

الشكل رقم (3) : تمثيل بياني للنظام



المصدر: إعداد الباحث

ونفرغ هذا النظام في الجدول التالي، لكي يهل علينا حساب الإحتمالات الإنتقالية وإستخراج مصفوفة الإنتقال فيما بعد:

	E_1	E_2	E_3	ζ_0
E_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_1
E_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_2
E_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_3
$\sum$	**1**	**1**	**1**	**1**

الحالات الثلاثة للنظام هي :

E_1: حالة إرتفاع

E_2: حالة إنخفاض

E_3: حالة إستقرار

- مختلف الإحتمالات المتعلقة بالعلاقات بين حالات النظام:

P_{11}: إحتمال إرتفاع بعد أن كان مرتفعا.

P_{12}: إحتمال إنخفاض بعد أن كان مرتفعا.

P_{13}: إحتمال إستقرار بعد أن كان مرتفعا.

P_{21}: إحتمال إرتفاع بعد أن كان منخفضا.

P_{22}: إحتمال إنخفاض بعد أن كان منخفضا.

P_{23}: إحتمال إستقرار بعد أن كان منخفضا.

P_{11}: إحتمال إرتفاع بعد أن كان مستقرا.

P_{11}: إحتمال إنخفاض بعد أن كان مستقرا.

P_{11}: إحتمال إستقرار بعد أن كان مستقرا.

أولا. يتم حساب عدد الإنتقالات n_{ij} المتوافقة مع تعريفات الإحتمالات P_{ij} المذكورة:

	E_1	E_2	E_3	Σ
E_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	$\sum_{j=1}^{3} n_{1j}$
E_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	$\sum_{j=1}^{3} n_{2j}$
E_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	$\sum_{j=1}^{3} n_{3j}$
Σ	$\sum_{i=1}^{3} n_{i1}$	$\sum_{i=1}^{3} n_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3} n_{i3}$	$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}$

المعادلات الثلاثة لحساب الإحتمالات داخل المصفوفة الإحتمالية:

$$P_{i1} = \frac{n_{i1}}{\sum_{i=1}^{3} n_{i1}} \; ; i = 1;\ 2;\ 3$$

$$P_{i2} = \frac{n_{i2}}{\sum_{i=1}^{3} n_{i2}} \; ; i = 1;\ 2;\ 3$$

$$P_{i3} = \frac{n_{i3}}{\sum_{i=1}^{3} n_{i3}} \; ; i = 1;\ 2;\ 3$$

ثانيا. نحسب الإحتمالات داخل شعاع الإنتقال (مصفوفة المتجه العمودي) ، حيث تكون المعادلة الأساسية لحساب هذه الإحتمالات كما يلي:

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^{3} n_{ij}}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}} \; ; \; i = 1;\ 2;\ 3$$

2.4. **التطبيقات العملية**: نخصص هذا البند لإفراغ المعطيات الخاصة بالدراسة على النموذج الرياضي ذو الخصائص الإحتمالية المشار إليه في البند السابق:

	E_1	E_2	E_3	Σ
E_1	0/5	0/1	1/4	1/9
E_2	3/5	1/1	1/4	4/9
E_3	2/5	0/1	2/4	4/9
Σ	5/5	1/1	4/4	9/9

$$\Downarrow$$

ونكتب شعاع الإنتقال (أقصى اليمين في الجدول) وكذا مصفوفة الإنتقال في النهاية كما يلي:

	E_1	E_2	E_3	ζ_0
E_1	0	0	0.25	0.12
E_2	0.60	1	0.25	0.44
E_3	0.40	0	0.50	0.44
Σ	1	1	1	1

نكتب الجدول في شكل مصفوفة وشعاع:

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0.60 & 1 & 0.25 \\ 0.40 & 0 & 0.50 \end{pmatrix} \quad ; \quad \zeta_0 = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.44 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$

يظهر من خلال شعاع الإنتقال ζ_0 أن هناك إحتمال 0.12 لإرتفاع معدل البطالة بعد كل عملية انتقال، و0.44 لإنخفاضه أو إستقراره. ولغرض العمليات الحسابية تم الإعتماد على برمجية Eviews نظرا لما يفره من سهولة في العمليات على المصفوفات.

$$\zeta_{2019} = w \cdot \zeta_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0.60 & 1 & 0.25 \\ 0.40 & 0 & 0.50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.44 \\ 0.44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.110 \\ 0.622 \\ 0.268 \end{pmatrix}$$

وهذه الأخيرة توضح الإحتمالات المختلفة لسنة 2019، فإحتمال إنخفاض المؤشر بلغ 0.622 أي 62.2%، أما إحتمال إرتفاعه بلغ 0.110 اما احتمال إستقراره بلغ 0.268 ، أي أن معدل البطالة له نزعة نحو الإنخفاض. وفيما يلي التنبؤ لسنوات 2020 إلى 2023:

$$\zeta_{2020} = w \cdot \zeta_{2019} = w \cdot w \cdot \zeta_0 = w^2 \cdot \zeta_0$$

$$\zeta_{2020} = \begin{pmatrix} 0.067 \\ 0.755 \\ 0.178 \end{pmatrix} ;$$

$$\zeta_{2021} = \begin{pmatrix} 0.044 \\ 0.839 \\ 0.115 \end{pmatrix} ;$$

$$\zeta_{2022} = \begin{pmatrix} 0.028 \\ 0.895 \\ 0.075 \end{pmatrix} ;$$

$$\zeta_{2023} = \begin{pmatrix} 0.018 \\ 0.931 \\ 0.049 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ تقارب النتائج كلما إبتعدنا عن فترة الدراسة (في مجال التنبؤ). وكلما كررنا الإنتقال الإحتمالي إقتربت النتائج من قيمة معينة يمكن الحصول عليها **بالطريقة الرياضية** المذكورة سابقا كما يلي:

$$\psi_{3\times1} = w_{3\times3} \cdot \psi_{3\times1}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0.60 & 1 & 0.25 \\ 0.40 & 0 & 0.50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = 0.25\,\gamma_3 \\ \gamma_2 = 0.60\,\gamma_1 + \gamma_2 + 0.25\,\gamma_3 \\ \gamma_3 = 0.40\,\gamma_1 + 0.50\,\gamma_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

أو نكتبه على الشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0.25\\0.60 & 0 & 0.25\\0.40 & 0 & -0.50\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفة المعاملات تحوي عمودا صفريا وبالتالي محددها يساوي الصفر، وبالتالي هناك عددا لانهائيا من الحلول، وبالتالي التنبؤ على المدى الطويل يصبح لا جدوى منه هنا. ما يميز هذا النوع من التنبؤات -سلاسل ماركوف- أنها لا تحتاج إلى فترات طويلة ويفضل أن لا تكون الإنتقالات طويلة زمنيا (يوم، شهر، ...).

5. النتائج ومناقشتها

من خلال ما سبق نقوم بتحليل النتائج في النقاط التالية:

- التنبؤ بنموذج سلاسل ماركوف لا يمكن أن يستمر لفترات تنبؤية طويلة نظرا لإستقراره أو إتزانه عند حد معين يصف لنا حالة النظام في الفترة المدروسة، لذا يجب تحديث النموذج كلما دعت الحاجة لذلك وذلك بإدراج البيانات الحديثة في النموذج وإعادة تعيين الإحتمالات وبالتالي مصفوفة الإنتقال وإعادة التنبؤ للأجال الزمنية قصيرة المدى وذلك للحصول على نتائج عقلانية وقريبة من الواقع ولا تؤدي إلى تضليل متخذ القرار.

- تتميز سلاسل ماركوف في أنها لا تتطلب فترات زمنية طويلة (عدد المشاهدات قليل) ولكن تتعامل مع القيم المنفصلة (إذا كانت الظاهرة متصلة تتطلب تحويلها إلى ظاهرة منفصلة أو متقطعة)، وذلك لكي يسهل بناء النظام العشوائي حيث تعدد القيم العشرية وكثرتها يجعل من الصعوبة بما كان حصر تقلبات النظام العشوائي خلال فترة الدراسة.

- حالة الإستقرار في نموذج ماركوف ليس دائما صالح للتحليل حيث يمكن أن يوجد حل تافه (صفري) ليس له معنى، أو عددا لا نهائيا من الحلول وفي هذه الحالة يصبح النموذج غير صالح للأجل المتوسط والطويل.

6. الخلاصة

مما سبق يتضح لنا أن عمليات التنبؤ من أهم العمليات التي يحتاجها متخذ القرار ليبني قراراته ومساعدته في رسم السياسات، وذلك إما على مستوى المجمعات الإقتصادية الكلية أو ما يعرف بالإقتصاد الكلي مثلما رأينا في هذه الورقة البحثية مع معدل البطالة في الجزائر، أو على مستوى الوحدات الإقتصادية سواء المستهلكة كالأفراد والمؤسسات كمستهلكة للمواد الأولية أو المنتجة وذلك عندما ينظر للمؤسسات كمنتج؛ وهذا المجال يعرف بالإقتصاد الوحدوي أو الجزئي، غير أن الأساس الرياضي لبعض النماذج لا يختلف كثيرا بين المجالين المذكورين في الكثير من الإستخدامات كالتنبؤ على سبيل المثال، وتعد سلاسل ماركوف كما رأينا أحد هذه الأساليب ذات الإستعمالات التنبؤية في شتى المجالات العلمية والإقتصادية وحتى الإجتماعية، التي تستند إلى مفهوم الإحتمال وتطبق في الحالات التي يمكن نمذجتها كنظام ينتقل من حالة إلى حالة وبطريقة عشوائية.

النتائج: تكمن أهم النتائج المتوصل غليها فيما يلي:

- جاء "ماركوف" بفكرة جديدة وذلك لتسهيل حسابات التنبؤ بأسلوب السلاسل الزمنية بعد أن كان يشرك في حسابات التنبؤ جميع قيم المشاهدات للظاهرة المدروسة (المتغير العشوائي قيد الدراسة)،

- يكون الحصول على القيم التنبؤية صعب جدا عندما تكون السلسلة طويلة وذات أرقام كبيرة، ولذلك أهمية إستخدام سلاسل ماركوف تستمد من كونها طريقة جديدة تنص عند التنبؤ وتحليل السلاسل الزمنية أنه يكفي الاعتماد على القيم الحالية للتنبؤ بقيم السلسلة في المستقبل وعدم الاعتماد على القيم السابقة أو القيم التاريخية للسلسلة المدروسة والتي تكون أهميتها قليلة خاصة عندما يكون النظام العشوائي قيد الدراسة متغير في الأجل الطويل.

وهذا ما رأيناه عند إعتمادنا على سلسلة زمنية قصية من معدلات البطالة في الجزائر وتحويلها إلى أرقام صحيحة ومن ثم بناء النموذج العشوائي لها حسب منهجية سلاسل ماركوف ومن ثمة القيام بعملية التنبؤ لفترة زمنية قصيرة ودراسة إتزان هذا النموذج في الأجل الطويل حيث إتضح أن حل النموذج لا نهائيا حيث انه يفضل التنبؤ بهذا النموذج للآجال الزمنية القصيرة فقط.

- إحتمال إنخفاض معدل البطالة أكبر من إحتمال إستقراره، خلال السنوات المتنبأ بها (2019، إلى 2023).

- إحتمال إستقرار معدل البطالة أكبر من إحتمال إرتفاعه، خلال السنوات المتنبأ بها (2019، إلى 2023)، وبالتالي إحتمال إنخفاضه أكبر بكثير من إحتمال إرتفاعه.

التوصيات: من خلال النتائج المتوصل إليها نقترح:

- أنه يمكن الإعتماد على سلاسل ماركوف في التنبؤ، بالمؤشرات التي تتلائم وشروط هذا النوع من الأدوات الكمية، نظرا لكونها تعطي نتاج موثوقة وتصف حالة النظام بدقة، خاصة في الأجل القصير. حيث تعد سلاسل ماركوف أسلوبا كميا ذو تطبيقات واسعة.

- كما يمكن الإعتماد على سلاسل ماركوف للتنبؤ بمعدلات البطالة في الدول بصفة عامة والجزائر بصفة خاصة وهو ما رأيناه في هذه الورقة البحثية.

الملاحق

الجدول رقم (01) : معدل البطالة في الجزائر خلال الفترة 2018ـ2007

السنوات	% معدل البطالة
2018	20
2017	20
2016	21
2015	20
2014	20
2013	20
2012	20
2011	19
2010	18
2009	17
2008	16
2007	16

المصدر: موقع Knoema الإحصائي الإلكتروني، تاريخ الإطلاع: 2019/01/05، الرابط:

https://knoema.fr/atlas/Alg%c3%a9rie/Accroissement-de-la-population

تضارب المصالح

❖ يعلن المؤلف أنه ليس لديه تضارب في المصالح.

المصادر والمراجع

باللغة العربية

1) الطويل مجدي (2009) "الإحتمالات -النظرية والتطبيق-"دار النشر للجامعات، مصر.

2) محمد الفاتح محمود بشير المغربي (2017)" الأساليب الكمية في إدارة الأعمال" دار الجنان، الأردن.

3) عبد الحفيظ مصطفى (2008) "نظرية الاحتمالات: مبادئ وتطبيقات" الجزء 1، د. م. ج.، ط 2، الجزائر.

4) موراي شبيجل، جون شيلر، ألو سرينيڤاسان (2004) "الاحتمالات والاحصاء" سلسلة ملخصات شوم إيزي، ترجمة: محمود علي ابو النصر، مصطفى جلال مصطفى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، ط1، مصر.

5) رأفت رياض رزق الله (بدون سنة نشر)"مباديء الاحتمالات" ج. 1، المكتبة الأكاديمية، مصر

6) سيمور ليبشتز (2000)"نظريات ومسائل في الإحتمالات" سلسلة ملخصات شوم، ترجمة: عبد العظيم أنيس، الدار الدولية للنشر والتوزيع، ط 2، 2000، مصر

باللغة الفرنسية

1) GOLDFARB B., PARDOUX C. (2000) "Introduction à la méthode statistique" DOUNOD, 3e éd., Paris.

2) FREDON D.,MAUMY-BERTRAND M., BERTRAND F., (2009) « Mathématiques : statistique et probabilités » Dunod, Paris.

كيفية الإستشهاد بهذا المقال حسب أسلوب APA :

معوشي عيماد (2022)، سلاسل ماركوف وإستخدامها للتنبؤ بمعدل البطالة في الجزائر للفترة: 2007-2018، المجلة الأكاديمية للدراسات الاجتماعية والإنسانية، المجلد 14، العدد 01، جامعة حسيبة بن بوعلي بالشلف، الجزائر. ص ص: 148-157