



Revue des Matériaux & Energies Renouvelable

Journal home : www.cu-relizane.dz

ISSN : 2507-7554

E- ISSN : 2661-7595



Une nouvelle théorie quasi-3D de déformation de cisaillement pour l'analyse statique des poutres stratifiées à couches croisées symétriques et antisymétriques en matériaux non homogènes

KADDARI Miloud ^{1,*}, KAÇI Abdelhakim ^{1,2}, TOUNSI Abdelouahed ¹

¹ Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Département de Génie Civil et Travaux Publics, Université Djilali Liabes de Sidi Bel-Abbes, Faculté de technologies, , BP 89 Cité Ben M'hidi 22000 Sidi Bel-Abbes, Algérie.

² Université Dr Tahar Moulay, Faculté de Technologie, Département de Génie Civil et Hydraulique, BP 138 Cité En-Nasr 20000 Saida, Algérie.

RESUME

Dans cette recherche, une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique prenant en compte de l'effet de déformation de cisaillement transversal ainsi que l'effet d'étirement est présentée pour l'analyse de la flexion statique des poutres stratifiées à couches croisées symétriques et antisymétriques. Le champ de déplacement utilise une fonction sinusoïdale en termes de coordonnée d'épaisseur pour inclure l'effet de déformation par cisaillement transversal. La fonction cosinus en coordonnées d'épaisseur est utilisée dans le déplacement transversal pour inclure l'effet de la déformation normale. Il prend en compte de la variation réaliste de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur et satisfait les conditions de nullités des contraintes de cisaillement au niveau de la surface supérieure et inférieure de la poutre. La théorie élimine le besoin de facteur de correction de cisaillement. Les équations et les conditions aux limites de la théorie sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Des résultats sont obtenus pour la flexion statique des poutres stratifiées à couches croisées symétriques et antisymétriques. Ces résultats sont comparés à ceux d'autres théories modifiées et la solution d'élasticité disponible dans la littérature scientifique.

Article history:

Received: july23, 2020

Received in revised form july25, 2020

Accepted august 18, 2020

Keys word: Static flexure; laminated beams ; symmetric and anti-symmetric ; cross-ply.

Copyright © 2020 - All rights reserved

1. Introduction

Dans les poutres composites stratifiées, la déformation transversale par cisaillement affecte de manière significative le déplacement transversal, les fréquences propres de vibration et les charges de flambement. La théorie élémentaire des poutres (TEB), qui repose sur l'hypothèse d'Euler -Bernoulli selon laquelle les plans initialement normaux au plan médian restent plans et perpendiculaires à la surface moyenne après flexion, conduit à des pourcentages d'erreur élevés dans l'analyse des poutres anisotropes en raison de la négligence des déformations du cisaillement transversal.

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) est une amélioration par rapport à la théorie élémentaire de la poutre Reissner [3]; Mindlin [17]; Reissner [2]. Cette théorie est cependant appelée théorie de Timoshenko dans les poutres. Dans la théorie de Timoshenko, la répartition de la contrainte de cisaillement transverse est constante à

* Corresponding author. E-mail address: kaddari_mil@yahoo.fr

travers toute l'épaisseur de la poutre et exige un facteur de correction de cisaillement pour corriger l'énergie de contrainte de la déformation Thai and Vo [22]; Thai and Vo [23].

Les limitations de la théorie élémentaire des poutres (TEB) et de la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) ont imposé le développement de théories de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). La théorie d'ordre élevé (HSDT) donne une représentation correcte de la contrainte de cisaillement.

Par la suite, différentes théories d'ordre supérieur plus précises que les modèles du premier ordre ont été proposées par Levinson [9], Ambartsumian [1], Touratier [24], Soldatos [21], Karama et al. [7] and Reddy [18] afin de satisfaire les conditions aux limites sur les bords libres de la poutre.

Lo, Christensen et Wutheory [10, 11] ont développé une théorie cohérente d'ordres élevés pour les plaques homogènes et stratifiées, comprenant les effets de la déformation en cisaillement transverse, de la déformation normale transversale et de la distribution non linéaire des déplacements par rapport à la coordonnée épaisseur. La théorie contient onze variables de déplacement. Cette théorie est largement utilisée par de nombreux chercheurs pour l'analyse des poutres et plaques déformables par cisaillement et les solutions sont obtenues par la méthode des éléments finis.

Khdeir et Reddy [8] ont présenté l'analyse des poutres stratifiées à couches croisées symétriques et antisymétriques à l'aide des théories classique de premier ordre, de deuxième ordre et de troisième ordre. Kant et Manjunatha [6] et Manjunatha et Kant [13, 14] ont développé un ensemble de théories d'ordre supérieur pour l'analyse des poutres composites et sandwich utilisant la théorie de Lo, Christensen et Wu [10, 11]. Maiti et Sinha [12] et Vinayak et al. [25] ont présenté l'analyse par éléments finis des poutres stratifiées épaisses symétriques et asymétriques basées sur la théorie d'ordres supérieurs de Lo et al. [10]. Soldatos et Elishakoff [20] ont développé une théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre pour l'analyse statique et dynamique d'une poutre orthotrope basée sur la théorie classique des poutres. La théorie intègre les effets du cisaillement transverse et de la déformation normale transversale.

Muskhelishvili [15] à effectuée une analyse tridimensionnelle de l'élasticité de poutres non homogènes en flexion, toutes les couches ayant le même coefficient de Poisson. L'analyse se complique lorsque chaque couche à un coefficient de Poisson différent. Silverman [19] à présenté des solutions d'élasticité pour la flexion de poutres orthotropes sous des charges polynomiales en utilisant les fonctions de contrainte d'Airy. Des formules sont données pour les contraintes axiales de flexion, la flèche et le cisaillement transversal pour les poutres simplement appuyées et en porte-à-faux. Pagano [16] à présenté des solutions d'élasticité exacte pour les stratifiés composites en flexion cylindrique. Un stratifié unidirectionnel et des stratifiés à couches croisées à deux et trois couches soumis à une charge sinusoidale sont considérés. Ghugal et Shimpi [4] ont présenté une revue récente de ces théories avec orientation nouvelle.

Dans ce travail, l'accent à été mis sur le développement d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D pour l'analyse statique des poutres stratifiées à couches croisées symétriques et antisymétriques tenant compte des effets de cisaillement transversal et l'effet d'étirement (déformation normale). Dans cette théorie raffinée, la composante du déplacement transversale w peut être dissociée en deux termes: le premier w_b représente une partie de la flèche pure de la poutre, tel que la dérivée de cette composante égale à la rotation de la section transversale, le second terme w_s , représente la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement de la section transversale. Les équations d'équilibre sont déterminées à partir du principe du travail virtuel. Des solutions analytiques de type Navier sont utilisées pour les poutres stratifiées à couches croisée pour des conditions aux limites simplement supportées. La performance du modèle proposé est vérifiée en comparant les résultats numériques avec des solutions d'élasticités et d'autres théories d'ordre élevé disponibles dans la littérature.

2. Formulations théoriques

2.1 Relations cinématiques et équations constitutives

Dans cette recherche, un champ de déplacement selon la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D s'écrivent:

$$u(x, z) = u_0(x) + z \frac{w_b}{x} + f(z) \frac{w_s}{x} \tag{1.a}$$

$$w(x, z) = w_b(x) + v_s(x) + g(z) + \varphi(x) \tag{1.b}$$

Où u et w sont des déplacements dans les directions x et z , respectivement. u_0 est le déplacement du plan médian de la poutre ($x=0$). Un déplacement additionnel φ est introduit pour prendre en compte l'effet de la contrainte normal (l'effet d'étirement).

$f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions de formes avec :

$$f(z) = z \sin \frac{\pi z}{2l} \quad \text{et} \quad g(z) = 1 - f(z) \tag{2.a}$$

$$\text{Où :} \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \tag{2.b}$$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements des équations (1.a) et (1-b), soit :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= k_x^b \frac{w_b}{x} + f(z) k_x^s \\ \epsilon_z &= g(z) \\ \gamma_{xz} &= g'(z) \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Où :

$$k_x^b = \frac{u_0}{x}, \quad k_x^b = \frac{w_b}{x^2}, \quad k_x^s = \frac{w_s}{x^2} \tag{4.a}$$

$$\epsilon_z = \frac{w_s}{x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{w_s}{x} \tag{4.b}$$

Les relations contraintes-déformations constitutives de la $k^{\text{ème}}$ couche de la poutre stratifiée peuvent être exprimées dans les coordonnées globales (x, y, z) comme suit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$ sont les contraintes et $(\epsilon_x, \epsilon_z, \gamma_{xz})$ sont les composantes de la déformation de la couche dans les coordonnées globales, et les \bar{C}_{ij} sont des constantes matérielles données par Jones [5].

2.2. Principe des travaux virtuels

En vue d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre, ainsi que les conditions aux limites de la poutre en composite stratifiée, le principe des travaux virtuels peut être énoncé sous la forme suivante :

$$\delta U - \delta V = 0 \tag{6}$$

Où : δU est la variation de l'énergie de déformation et δV est la variation du travail des charges externes appliquée à la poutre. La substitution des expressions énergétiques appropriées peut être déterminée :

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) A dz + \int_0^L q v_b + v_s + v_{st} dx = 0 \tag{7}$$

2.3 Solution exacte pour une poutre simplement appuyée

Pour le cas d'une poutre simplement appuyée sur les deux cotés, les conditions aux limites pour la présente théorie s'écrivent:

$$w_b = w_s = \frac{w_s}{s} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{à} \quad x = 0, L \quad (8)$$

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème du comportement élastique de la flexion des poutres. Elle peut alors être recherchée en écrivant les déplacements u_0 , w_b , w_s et ψ sous forme de simple série de Fourier, satisfaisant les conditions aux limites.

$$\begin{aligned} u_0 &= U_n \cos(\lambda x) \\ w_b &= W_{bn} \sin(\lambda x) \\ w_s &= W_{sn} \sin(\lambda x) \\ \psi &= \psi_n \sin(\lambda x) \end{aligned} \quad (9.a)$$

Où :

$$\lambda = n \pi / L \quad (9.b)$$

U_n , W_{bn} , W_{sn} and ψ_n sont des paramètres arbitraires représentent l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier, λ est une constante. On obtient l'opérateur suivant :

$$[K] \{c\} = \{F\} \quad (10)$$

Où $\{c\} = [U_n, W_{bn}, W_{sn}, \psi_n]^T$ et $[K]$ c'est une matrice symétrique donnée par :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_n \\ q_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Avec:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathcal{R}A_{11} \\ a_{12} &= \mathcal{R}B_{11} \\ a_{13} &= \mathcal{R}B_{11}^s \\ a_{14} &= \mathcal{R}L \\ a_{22} &= \mathcal{R}D_{11} \\ a_{23} &= \mathcal{R}D_{11}^s \\ a_{24} &= \mathcal{R}L^a \\ a_{33} &= \mathcal{R}I_{11}^s - \mathcal{R}A_{55}^s \\ a_{34} &= \mathcal{R}A_{55}^s - \mathcal{R}R \\ a_{44} &= \mathcal{R}A_{55}^s - \mathcal{R}R^a \end{aligned} \quad (12)$$

Le chargement transversal $q(x)$ agissant suivant l'axe z est exprimé sous forme de simple série de Fourier :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(\lambda x) \quad (13)$$

Les coefficients q_n sont donnés pour certaines charges comme suit:

$$q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{14}$$

q_0 pour un chargement sinusoidale distribué.
 $\frac{Aq_0}{n}$ pour un chargement uniformément répartie.

Ou q_0 représente l'intensité de la charge sur la poutre.

3. Résultats numériques et discussion

Nous présentons les résultats de l'analyse du comportement en flexion menée sur une poutre composite stratifié en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé avec l'effet de la déformation normale.

Certaines études de convergence sont données à titre d'exemples afin de démontrer l'exactitude de la méthode. Les résultats sont également donnés pour les poutres composites à trois couches symétrique à empilement croisés (0°/90°/0°) et deux couches antisymétrique à empilement croisés (0°/90°) pour différentes propriétés du matériau et des rapports longueur épaisseur variables.

Les stratifiés sont censés avoir des épaisseurs égales et faites avec les mêmes matériaux orthotropes dont les propriétés sont:

$$\frac{E_1}{E_2} = 25, \quad \frac{E_3}{E_2} = 1, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5, \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.2 \quad \text{et} \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes normales et tangentielles :

$$\bar{u} = \frac{E_2 b}{q_0 h} u, \quad \bar{w} = \frac{100 E_2 h^3}{q_0 L^4} w, \quad \tau_x = \frac{b}{q_0} \tau_x, \quad \tau_{xy} = \frac{b}{q_0} \tau_{xy}, \quad S = L/h$$

Tableau 1 : déplacement axiale maximale adimensionnelle \bar{u} à $x = 0, z = h/2$, déplacement transversal \bar{w} à $x = L/2, z = 0$, contraintes normales τ_x à $x = L/2, z = h/2$ et τ_{xy} tangentielles à $x = 0, z = 0$ pour une poutre en matériau composite stratifié à couches croisées simplement appuyée (0°/90°) soumise à un chargement sinusoidale pour différents rapports d'élancement.

$S = L/h$	Théorie	\bar{u}	\bar{w}	τ_x	τ_{xy}
4	Présente $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0$	1.7185	4.3959	33.8266	2.5185
	Présente $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$	1.7175	4.3923	33.8158	2.5187
	Mantari et Canales (2016) $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0$	1.7178	4.3936	33.8205	2.5187
	Timoshenko	1.4212	4.7966	27.9049	1.8189
	Euler –Bernoulli	1.4212	2.6254	27.9049	0
	Elasticité	1.5288	4.7080	30.0190	2.7212
10	Présente $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0$	22.9180	2.9090	180.4490	6.4260
	Présente $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$	23.1718	2.9429	181.8662	6.4179
	Mantari et Canales (2016) $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0$	23.1767	2.9433	181.7666	6.4154
	Timoshenko	22.2060	2.9728	174.4052	4.5473
	Euler –Bernoulli	22.2060	2.6254	174.4052	0
	Elasticité	22.4760	2.9611	176.5300	7.2678

On remarque que les résultats trouvés dans le tableau 1 par la présente méthode sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature et particulièrement avec ceux de Mantari et Canales (2016) avec $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0$. Ce qui important de signaler est

que le fait de négliger l'effet d'étirement augmente les déplacements et la contrainte pour un rapport d'élancement $S=4$ et l'inverse est observé pour $S=10$ et ceci est dû à l'effet du cisaillement qui est important dans les poutres courtes.

Le tableau 1 montre clairement que pour la théorie des poutres classiques basées sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli (ETB), la contrainte de cisaillement transverse est nulle.

Tableau 2: Déplacement axiale maximale adimensionnelle \bar{u} à $x=0, z=h/2$, déplacement transversal \bar{w} à $x=L/2, z=0$, contraintes normales τ_x à $x=L/2, z=h/2$ et τ_{xz} tangentiels à $x=0, z=0$ pour une poutre en matériau composite stratifié à couches croisées simplement supportée ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à un chargement sinusoïdale pour différents rapports d'élancement.

$S=L/h$	Théorie	\bar{u}	\bar{w}	τ_x	τ_{xz}
4	Présente $\epsilon_z \neq 0$	0.8901	2.7242	17.5208	1.1615
	Présente $\epsilon_z = 0$	0.8899	2.7053	17.6145	1.1607
	Reddy [18]	0.8653	2.7000	16.9898	1.1094
	Timoshenko	0.5136	2.4107	10.0854	0.6366
	Euler –Bernoulli	0.5136	0.5109	10.0854	0
	Elasticité	0.9150	2.8870	17.8800	1.4250
10	Présente $\epsilon_z \neq 0$	8.9968	0.8815	70.8377	3.0475
	Présente $\epsilon_z = 0$	8.9974	0.8816	70.8379	3.0475
	Reddy [18]	8.9398	0.8751	70.2128	2.8839
	Timoshenko	8.0257	0.8149	63.0339	1.5915
	Euler –Bernoulli	8.0257	0.5109	63.0339	0
	Elasticité	9.1050	0.8800	71.300	4.2000

On remarque que les résultats trouvés dans le tableau 2 sont inférieures à ceux trouvés pour une poutre en matériau composite stratifié ($0^\circ/90^\circ$) et ce, est essentiellement dû à l'augmentation de la rigidité.

Les déplacements \bar{u} et \bar{w} obtenu par la présente théorie sont sous estimés par rapport à la solution exacte et la contraintes normales τ_x obtenu est sous estimé par rapport à la solution exacte.

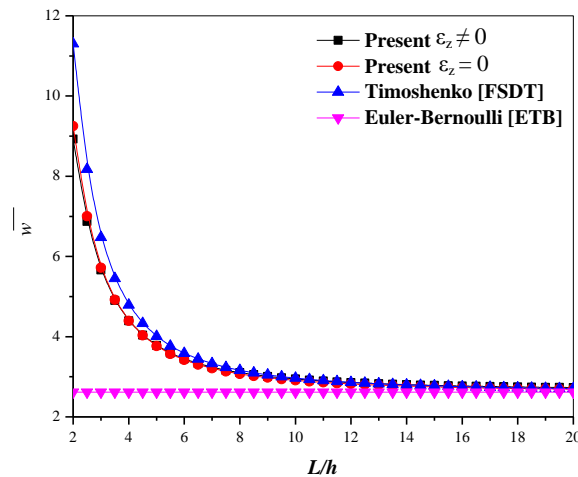


Figure 1: Variation du déplacement transversal \bar{w} de la poutre ($0^\circ/90^\circ$) soumise à un chargement sinusoïdale pour différents rapport d'élancement.

La figure 1 montrent la variation du déplacement transversal \bar{w} de la poutre ($0^\circ/90^\circ$) soumise à un chargement sinusoïdale pour différents rapport d'élancement L/h pour différentes théories. On voit que l'effet d'étirement se fait sentir pour une poutre courte.

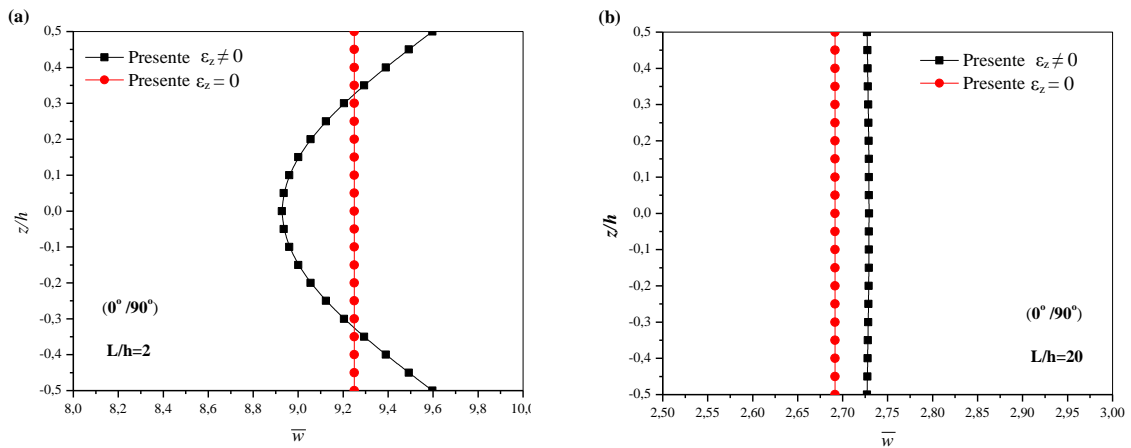


Figure 2: Variation du déplacement transverse \bar{w} de la poutre $(0^\circ/90^\circ)$ soumise à un chargement sinusoïdale à travers l'épaisseur de la poutre pour, (a) $L/h = 2$, (b) $L/h = 20$

La figure 2 montrent la variation du déplacement transverse \bar{w} de la poutre $(0^\circ/90^\circ)$ soumise à un chargement sinusoïdale à travers l'épaisseur de la poutre pour $L/h = 2$ et $L/h = 20$, On voit que l'effet d'étirement $\epsilon_z \neq 0$ à une influence importante.

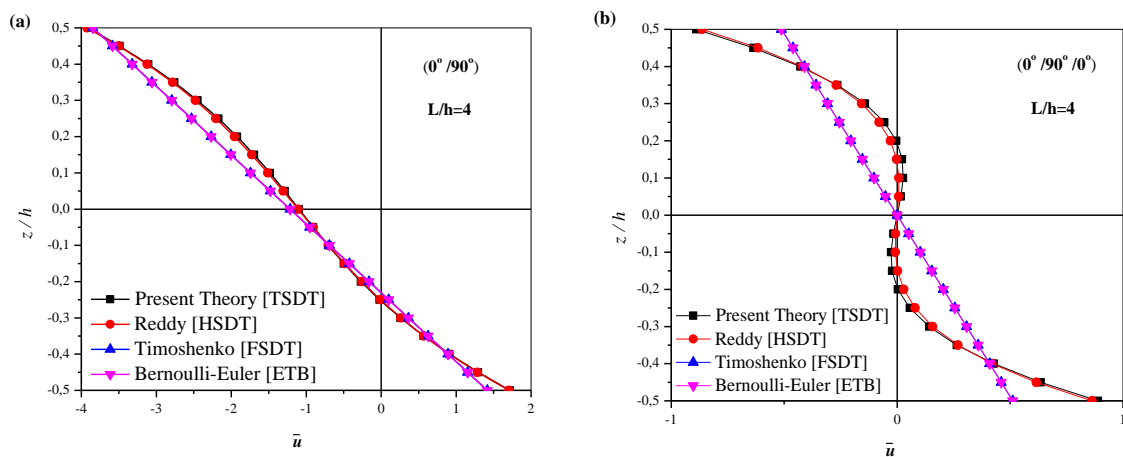


Figure 3: Variation du déplacement axial à travers l'épaisseur de la poutre soumise à un chargement sinusoïdale pour un rapport d'élancement de $L/h = 4$, (a). $(0^\circ/90^\circ)$, (b). $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$

La variation du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre $(0^\circ/90^\circ)$ et $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ soumise à un chargement sinusoïdale pour différentes théories est illustrée sur la figure 3, en remarquons que tous les modèle proposés présentent de bonne approximations. Les déplacements axiaux prédits par les modèles sont du même ordre de précision.

Aussi, il est remarqué qu'au niveau de la partie supérieure et inférieure des deux poutres une divergence des modèles FSDT et ETB par rapport à ceux du modèle de Reddy [18] ainsi que la présente théorie pour un rapport d'élancement $L/h = 4$ toutefois cette divergence diminue au fur et à mesure qu'on augmente le rapport d'élancement.

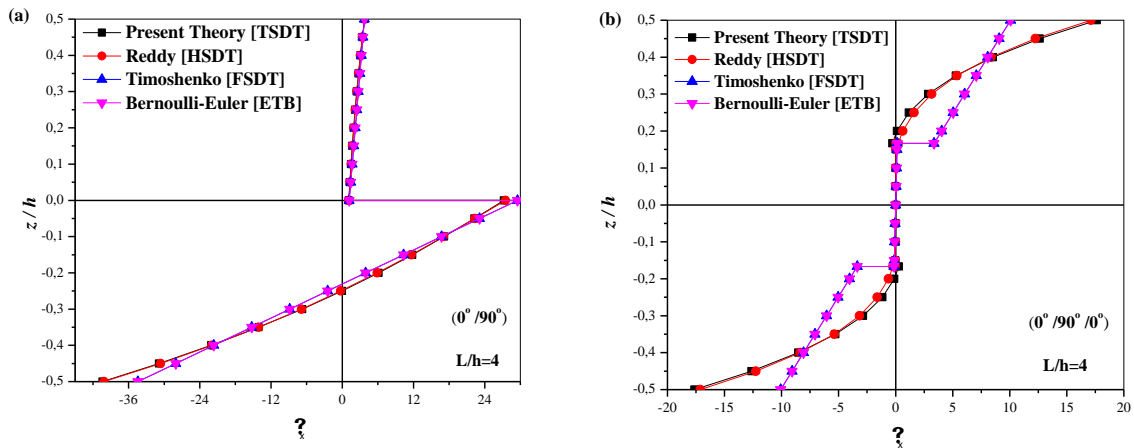


Figure 4 : Variation de la contrainte axiale σ_x à travers l'épaisseur de la poutre ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à un chargement sinusoïdale pour un rapport d'élancement de $L/h = 4$.

La figure 4.a pour une poutre ($0^\circ/90^\circ$) soumise à un chargement sinusoïdale pour un rapport d'élancement de 4, montre que la contrainte axiale de flexion prédit par la présente théorie est en excellent accord avec celle de la solution exacte. La théorie de Reddy [18] donne la valeur plus élevée de la contrainte de flexion par rapport à la valeur exacte pour tous les aspects d'élancement alors que FSDT et ETB prédit une valeur inférieure pour la même chose.

Les figures 4.b montrent la variation de la contrainte axiale de flexion à travers l'épaisseur de la poutre ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) soumise à un chargement sinusoïdale pour un rapport d'élancement de 4. On remarque que sur la fibre supérieure est une compression après elle devienne une traction sur la partie inférieure. On observe que sur la couche centrale, la contrainte est presque identique pour la poutre ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$).

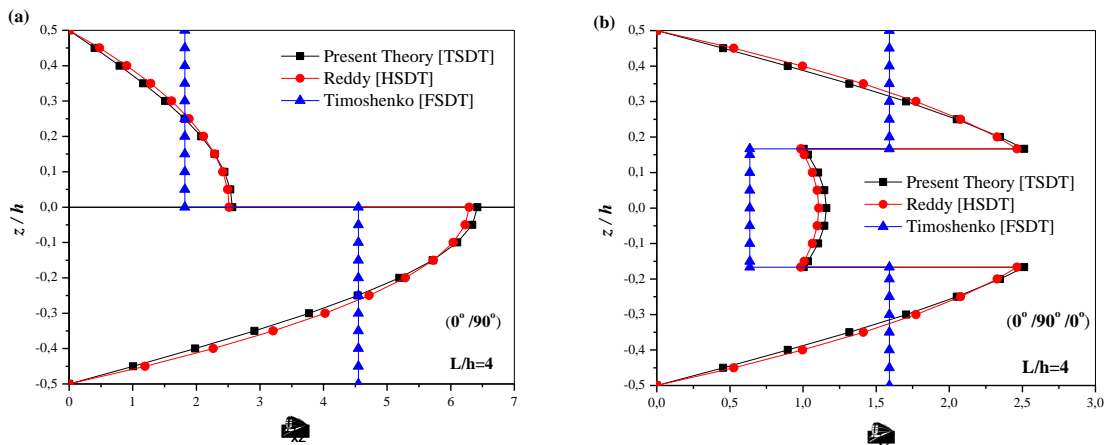


Figure 5 : Variation de la contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre ($0^\circ/90^\circ$) soumise à un chargement sinusoïdale pour un rapport d'élancement de $L/h = 4$.

La contrainte de cisaillement transverse prédit par la présente théorie est en excellent accord pour le rapport d'élancement 4. Les contraintes de cisaillement ont une distribution parabolique sur l'épaisseur de la poutre et la théorie quasi-3D actuelle montre une bonne précision dans la prédiction de la contrainte de cisaillement transverse par rapport à la solution exacte obtenue en utilisant l'équation d'équilibre (voir la figure 5). La contrainte de cisaillement transverse maximale prédite par la théorie de Reddy [18] est juste avec la solution exacte alors que FSDT et ETB surestiment lorsqu'il est obtenu en utilisant l'équation d'équilibre. Il est clair qu'au niveau de la fibre supérieure et inférieure de la poutre, la contrainte tangentielle est égale à zéro. On remarque aussi que la contrainte tangentielle est inférieure dans la couche centrale et cela est essentiellement dû à l'orientation des fibres pour ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$).

4. Conclusion

Dans cette recherche, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement élastique de la flexion des poutres en matériau composite en utilisant une nouvelle théorie à distribution hyperbolique de déformation de cisaillement.

La présente théorie à une forte similitude avec la théorie d'ordre élevée des poutres dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

Toutes les études comparatives ont démontrées que les flèches et les contraintes dues au chargement mécanique obtenues en utilisant la présente théorie et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé ainsi que la théorie exacte sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise pour résoudre le comportement élastique de la flexion des poutres.

REFERENCES

- [1] - Ambartsumian SA. On the theory of bending plates. *Izv Otd Tech Nauk SSSR* 1958; 5: 69–77.
- [2] - E. Reissner, "On the theory of bending of elastic plates," *J. Math. Phys.*, 23, 184-191 (1944).
- [3] - E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *J. Appl. Mech.*, 12, 69-77 (1945).
- [4] - Ghugal YM and Shimpi RP (2002). A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 21: 775-813.
- [5] - Jones RM (1975). *Mechanics of Composite Materials*. McGraw Hill Kogakusha. Ltd. Tokyo
- [6] - Kant T and Manjunatha BS (1989). Refined Theories for Composite and Sandwich Beams with C0 Finite Elements. *Computers and Structures*. 33: 755–764.
- [7] - Karama M, Afaq KS and Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int J Solids Struct* 2003; 40: 1525-1546.
- [8] - Khdeir AA and Reddy JN (1997). An Exact Solution for the Bending of Thin and Thick Cross-ply Laminated Beams. *Composite Structures*. 37(2): 195–203.
- [9] - Levinson M. An accurate simple theory of static and dynamics of elastic plates. *Mech Res Commun* 1980; 7: 343-350.
- [10] - Lo KH, Christensen RM and Wu EM (1977a). A higher order theory for plate deformations, part 1: homogeneous plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 44: 663–668.
- [11] - Lo KH, Christensen RM and Wu EM (1977b). A higher order theory for plate deformations, part 2: laminated plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 44: 669–676.
- [12] - Maiti DK and Sinha PK (1994). Bending and Free Vibration Analysis of Shear Deformable Laminated Composite Beams by Finite Element Method. *Composite Structures*. 29: 421–431.
- [13] - Manjunatha BS and Kant T (1993a). New theories for symmetric/unsymmetric composite and sandwich beams with c0 finite elements. *Composite Structures*. 23: 61–73.
- [14] - Manjunatha BS and Kant T (1993b). Different numerical techniques for the estimation of multiaxial stresses in symmetric/unsymmetric composite and sandwich beams with refined theories. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 12: 2–27.

- [15] - Muskhelishvili NI (1963). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. English Translation of 4th Ed., Noordhoff, Groningen, the Netherlands, Chap. 25.
- [16] - Pagano NJ (1969). Exact solution for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*. 3: 398–411.
- [17] - R. D. Mindlin, “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates,” *J. Appl. Mech.*, 18, 31-38 (1951).
- [18] - Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [19] - Silverman IK (1964). Orthotropic beams under polynomial loads. *Journal of the Engineering Mechanics Division Proceedings of ASCE*. 90: 293–319.
- [20] - Soldatos KP and Elisha off I (1992). A transverse shear and normal deformable orthotropic beam theory. *Journal of Sound and Vibration*. 154(3); 528–533.
- [21] - Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech* 1992; 94: 195–200.
- [22]- Thai HT, Vo TP. A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling* 2012a; doi: 10.1016/j.apm.2012.08.008.
- [23] - Thai HT, Vo TP. A size-dependent functionally graded sinusoidal plate model based on a modified couple stress theory. *Composite Structures* 2012b;doi: 10.1016/j.compstruct.2012.09.025.
- [24] - Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991; 29: 901–916.
- [25] - Vinayak RU, Prathap G and Naganarayana BP (1996). Beam Elements Based on a Higher Order Theory-I: Formulation and Analysis of Performance. *Computers and Structures*. 58: 775–789.