دور الجانب الهندسي في تقديم وكيفية تعليم وتعلّم مفهوم المشتق في مرحلة التعليم الثانوي

The Role of the Geometrical Aspect in Introducing Teaching and Learning the Concept of the Derivative in Secondary Education

محمد بوقرة[1*]، ناجي تمار[2]، يوسف صاولة[3]

[1]المدرسة العليا للأساتذة /سطيف (الجزائر)، m.bouguerra@ens-setif.dz

طالب دكتوراه، مخبر الأبستمولوجيا وتاريخ الرياضيات(LEHM) ، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة (الجزائر)

[2] المدرسة العليا للأساتذة /القبة (الجزائر)، nadji.temar@g.ens-kouba.dz

[3] المدرسة العليا للأساتذة /القبة (الجزائر)، saoula.youcef@g.ens-kouba.dz

تاريخ الاستلام:16-01-2023 تاريخ القبول: 05-06-2023 تاريخ النشر : 19-06-2023

ملخص: يدور فحوى هذا المقال حول تقديم وكيفية تعليم وتعلم مفهوم رياضيّاتي-المشتق- في مرحلة التعليم الثانوي باستعمال شروحات مدعّمة بتمثيل هندسيّ، عمدت فيه إلى التقعيد التاريخي لمفهوم المشتق لأنه يركّز على الجانب الهندسي، وعلى الوجه الأدقّ إبراز تقديم المشتق في الربط بين المساحة والمحيط والحجم، هذا التقديم يكاد يكون مغيّبا في المحيط التعليمي للتلاميذ في مرحلة التعليم الثانوي، أدّى هذا النوع من التقديم دور الجانب الهندسي في ترسيخ المفاهيم المجردة النهاية والمالانهاية التي لها علاقة بالمشتقّ وهي أفضل طريقة في إيصال الكثير من المفاهيم الرياضياتيّة.

الكلمات المفتاحية: الهندسة؛ التمثيل الرياضياتي؛ المشتق؛ النهاية.

Abstract: This article is about how to teach and learn the basic mathematical concept - the derivative - in secondary education. By using some explanations supported by geometric representation, I sought to trace back the historical concept of the derivative because it focuses on the geometric aspect. More precisely, I tried to highlight the introduction of the derivative in the connection with the concepts of area, perimeter, and volume. This presentation is almost absent in the educational environment for students in secondary education. This type of presentation played a role of showing the role of geometrical aspect in establishing the abstract concepts of limit and infinity that are related to the derivative, which is the best way to communicate many mathematical concepts.

Keywords: Geometry, mathematical representation, derivative, Limit.

*المؤلف المراسل.

1- مقدّمة:

تتطلب الرياضيّات مهارات وطرقا خاصة في تدريسها، ممّا يستلزم اهتمام الفكر وتطوير العقل لدى المتعلّم مثل القدرة على التفكير الاستدلالي والتأملي والإبداعي والنّقدي بالإضافة إلى منحى هام في طرق تدريس الرياضيّات وهو القدرة على حلِ المشكلات الرياضيّاتيّة، واتخاذ القرار والتنبؤ والتخيّل وتكوين نماذج وأنماط وتراكيب رياضيّاتيّة مما يكسب المتعلّم مرونة في التفكير وانتقال أثر التعلّم على حياته. لا يخفى على أي ممارس للرياضيّات أنّ إنشاء مفاهيم رياضيّاتيّة جديدة وتوظيفها أحد أهمّ مميّزات الرياضيّات مما يجعل من المفهوم الرياضيّاتيّ أحد أهمّ الركائز الجوهريّة في بناء الرياضيّات وتطوّرها. على غرار الكثير من المفاهيم الرياضيّاتيّة، يأتي مفهوم المشتقّ من أبرز المفاهيم التي تتجلّى فيه هذه المواصفات، إذ يصنّفه أهل الاختصاص في خانة المفاهيم التّي جرى عليها الاتفاق منذ القدم، خاصة في العهود الإغريقية التّي عرفت فيها الأعمال الهندسيّة ازدهارا هائلا، من حيث أهميته وتواجده في كثير من الميادين العلميّة.

إنّ استخدامات المشتق ومواطن تأثيره، أخذت بتصرف من المرجع(Rouy, 2007, p. 147) ، ظهرت بوادرها منذ القدم ولو بصفة مخفيّة غير مباشرة. ولنا في ذلك نماذج شهيرة وكثيرة: ديكارت (Descartes) وحسابه للزاويّة المعرّفة بتقاطع منحنين، غاليلي (Galilée) ومقرابه، وهايجنس (Huygens) وساعاته، وفيرما (Fermat) وبحثه عن القيّم العظمى والصغرى لتابع، ونيوتن (Newton) وحسابه لسرعة وتسارع حركة جسم، وكيبلر (Kepler)
وتحقّقه من قانون الجاذبيّة في علم الفلك إلخ ... جدير بنا أن نشير في هذا الصدد إلى أنّ الإغريق القدماء كانوا مهتمّين بمشكلتين أساسيتين هما: طريقة إنشاء المماس عند نقطة، وكيفيّة تحديد المساحة الواقعة بين المنحنى وقاطع من قواطعه. فقام أرخميدس (Archimède) باقتراح طريقة لإنشاء المماس عند نقطة لشكل حلزونيّ، وكذلك طريقة لتربيع قطعة من قطع مكافئ. أدى ذلك إلى ظهور كميات لا متناهيات الصغر في حساب التفاضل والتكامل. كما أنّ الحاجة إلى مفهوم جديد كانت تتجلّى بوضوح في أعمال العديد من العلماء والباحثين السابق ذكرهم، أدى ذلك إلى بداية ظهور مفهوم المشتق، الذي نجده بشكل خفيّ في أعمال ليبنيتز (Leibniz) ونيوتن وكارنو(Carnot) في تحسينه لنظرية ليبنيتز. ثم أخذ في التطوّر والتوسّع في أعمال باسكال (Pascal) ولوبيطال (l'Hôpital)وغيرهم. تُوِّجت هذه الجهود بوضع تعريف لهذا المفهوم من قبل لأمبير(D'Alembert)، ليصبح أخيرا مبيّنا من خلال أعمال فيرشستراس (Weierstrass).

2-الإشكاليّة:

إذا ما نظرنا إلى الصعوبات التي يعاني منها تلامذتنا الآن في تعليم الهندسة بالخصوص، نجد أنّها أصبحت عائقا أمام تطوّرهم. بالرجوع إلى الجانب التاريخيّ ممثّلا في كتاب الأصول لإقليدس (حوالي القرن الثالث ميلادي)، والمخروطات لأبلينوس (Apollonius) (حوالي القرن الأول ميلادي)، وكذلك كتب مترجمة أو مؤلّفة في نطاق الرياضيّات العربيّة (بين القرن التاسع ميلادي والقرن الرابع عشر ميلادي)، نجد أنّها ركّزت على الجانب الهندسيّ في ايصال الكثير من المفاهيم المتعلّقة بالجبر أو التحليل.

حسب دراسة سابقة لبينقولبالي ومونغان (Bingolbali &Monaghan) مأخوذة بتصرف من المرجع (Zazkis, 2012, 1). اللذين لاحظا أنّ أولويّة المدرّس، فيما يخص نسبة التغيّر أو مميّزات مشتق المستقيم المماسيّ، هي التي تُحدث تطوّر صور المفهوم لدى الطلبة. فصور مفهوم المشتق لدى طلبة الهندسة الميكانيكية،

مثلا، تتعلّق بنسبة التغيّر يقصد هنا جانب نظري، بينما تتعلّق لدى طلبة الرياضيات بالمماس يقصد هنا الجانب الهندسي.

وحسب دراسة سابقة أخرى لبرزنيوسلو (Przenioslo) أخذت بتصرف من المرجع (Zazkis, 2012, p. 2) العناصر الأكثر استعمالا من طرف الطلبة أثناء أجوبتهم عن أسئلة تتعلق بنهاية تابع على سبيل المثال، البعض فضل الكلام عن النهاية عن طريق الجوار ويقصد هنا جانب نظري وآخرون باستعمال اقتراب البيان من شيء ويقصد هنا الجانب الهندسي للنهاية. لقد وجدت الدراسة أنّ صور مفاهيم الطلبة تتواجد بشكل منفصل بين الجانب النظري والجانب الهندسي.

كما ركّزت هذه الدراسات والأبحاث بقوّة على ضرورة تشخيص الروابط بين المفاهيم داخل الإطار الواحد وبين الإطارات، لكن هذه الظاهرة، الانتقال بين الأطر المختلفة للرياضيّات، غالبا ما تكون غير ظاهرة في البرامج التعليميّة الجزائريّة. وبالتالي تكون هناك قطيعة عند المتعلّمين أثناء تعلّمهم لهذه المفاهيم الرياضيّاتيّة. على سبيل المثال، يدرس مفهوم المشتقّ ضمن باب التحليل، وتدرس المفاهيم المتعلّقة بحساب المحيطات والسطوح والحجوم في بابين هما الهندسة والتحليل. يعتقد الكثير من التلاميذ أنّها منفصلة نظرا للطّرق التعليميّة المنتهجة داخل الصفوف التعليميّة من جهة، وإلى طبيعة المناهج المسيّرة للعمليّات التعليميّة التعلميّة من جهة ثانية.

ضمن الإطار السابق، تتحدّد إشكالية الدراسة في السؤال الرئيسيّ التالي:

هل يتمّ اللجوء إلى الجانب الهندسي في تقديم وتفسير العدد المشتقّ؟

3-أهداف الدراسة:

إن الهدف الرئيسي من هذا البحث هو تشخيص الهندسة وعلاقتها بالتحليل على مستوى التعليم الثانوي وبالأخص علاقة الهندسة بتقديم مفهوم رياضياتي وهو المشتق. نطمح إلى تحقيق هدفين هما:

- تسليط الضوء على استعمال الهندسة لتقديم وتفسير العدد المشتق.
- معرفة بعض صعوبات المعلم والمتعلم في ربط الجانب الهندسي بالعدد المشتق وبالأخص صعوبات تعليم المشتق.

4-أهمية الدراسة:

اهتمت هذه الدراسة بتسليط الضوء على أهم مشكلة التي تعيق سير العملية التعليمية، وهي عدم ربط مفاهيم هندسية بمفاهيم في التحليل مثلا المشتق سواء للمعلم أو المتعلم، والفائدة المرجوة للمتعلم والمعلم أن الجانب الهندسي تنمى فيه بعض القدرات من الحدس والتخيّل والدقة في التعبير، ولأنّ تقديم المشتق بشكل تجريدي مصدر صعوبة خاصة للمتعلم وعليه الجانب الهندسي يربط بين مفهوم مجرد وتجريبي ونطمح أولا بالنسبة لوزارة التربية وبالخصوص المفتشين إلى وضع منهاج مادة الرياضيات بحيث يتعلم التلميذ المفهوم الهندسي أولا ثم يتسنى له فهمه واستخدامه في مفاهيم أخرى، وثانيا بالنسبة للمفتشين العمل على ضرورة التكوين النوعي لأساتذة التعليم الثانوي رياضيات قصد التحكم أكثر الجانب الهندسي لتمكينهم من أداء مهمتهم بشكل فعال ومرض.

5-مصطلحات الدراسة:

نذكّر فيما يلي ببعض المصطلحات التي تم توظيفها في هذا المقال، لقد تم عرضها بشكل مختصر تارة، وبشيء من التفصيل تارة أخرى ما تقتضيه الحاجة وحسب ما نقدره من أهمية ونتوخاه من فائدة.

5-1-الهندسة:

علم حدسي تساعد المتعلم على تحسين طريقة تفكيرهم من خلال التدريب على فهم وربط العلاقات، واستخدام أساليب البرهان المختلفة للوصول إلى تقديم مفهوم رياضيّاتيّ، كما أنها علم عقلاني يسمح بتطوير المعرفة عن طريق الاستدلال، وهي تعتبر كذلك علما تجريبيا من خلال العمليات على الأشكال ابتداء من الإنشاءات الهندسية خصوصا الإنشاءات بالمسطرة والمدور.

نذكّر بالتكامل بين الجوانب الحدسية والتطبيقية (المسطرة والمدور مثلا) والجوانب المفاهيمية (المستقيم والدائرة مثلا)، هذه التكاملية يجب أن تظهر في تدريس الهندسة(Bkouche, 2006, p. 6) .

5-2-التمثيل الرياضيّاتيّ:

يقصد بالتمثيل الرياضيّاتيّ (Pape, 2001, p. 118) أنّه تجريد داخلي (عقلي) للأفكار الرياضيّاتيّة، أو مخطّط معرفي طوّره المتعلّم من خلال التجربة (فهو تمثيل داخلي). تعتبر التمثيلات العدديّة والجبريّة والرسومات والجداول والمخططات والخرائط توضيحا للمفاهيم، أو تجسيدا للبناءات العقلية (فهي تمثيلات خارجيّة). تساهم التمثيلات الداخليّة في تنظيم الأفكار الرياضيّاتيّة وحلّ مشاكل، والتمثيلات الخارجية (بالخصوص التعبير اللغوي) في توضيحها.

5-3-المشتقّ:

ظهر مفهوم المشتقّ في كتابات ليبنيتز ونيوتن الخاصة بالتفاضل والمعرّف أيضا بحاصل القسمة النهائيّة. شارك لوبيطال في نهاية القرن السابع عشر، في توسيع نظرية الأعداد اللامتناهيّة في الصغر خصوصا عند استخدام المشتقّ من أجل حساب النهاية في حالة الأشكال غير محدّدة. قدّم دلامبير تعريفا دقيقا للعدد المشتقّ كنهاية نسبة تزايد تابع مستمرّ؛ ليصبح أخيرا مبيّنا من خلال أعمال فيرشستراس (Hairer,E, 2001, p. 81).

5-4-النهاية:

يبدو أنّ هناك ميلا إلى إهمال مفهوم النهاية في مدارس التعليم الثانويّ، وذلك على الرغم من أنّ هذا المفهوم الهام يمكن أن يقدّم في الوضعيات التي تكون فيها العمليّات مجرّدة. يمكن للمتعلّمين أن يدركوا مفهوم النهاية (عبيد، 1993، صفحة 132): عندما يمثّل من خلال السلاسل غير المنتهية، وكذلك التفاضل والتكامل وأخيرا التمثيل العشري غير المنتهي للأعداد الناطقة. يمكن أن يحدث مزيد من تعميم المفهوم عند دراسة المتتاليات الحسابيّة والهندسيّة، كما يمكن في الهندسة أن توضّح. الدائرة على أنّها الوضع النهائيّ لمتتالية من المضلعات المنتظمة التي يزداد عدد أضلاعها زيادة لانهائية.

6-مفهوم المشتقّ تاريخيّا وبيداغوجيّا تعليميّا:

6-1-مقدّمة:

إنّ علاقة الرياضيّات والفيزياء واضحة منذ القرن السابع عشر، وروابطهما مختلفة عن الروابط بين الرياضيّات والعلوم الأخرى. يمكن تخيّل البيولوجيا أو الاقتصاد وحتى الكيمياء بدون رياضيّات، لأنّ هذه الأخيرة

لعبت دورا هامشيّا في نشأة هذه العلوم. وبالعكس فإنّ التاريخ يظهر أنّ هيكلة الفيزياء تمّ وضعها عن طريق مشروع بناء صورة رياضيّاتيّة من حقيقة فيزيائيّة. حسب (Bobin, 1997, 22)، فإنّ الرياضيّات ليست لغة، تقدّم كلمات لتلبيس أفكار الفيزيائيّ، بل وأكثر عمقا من ذلك، فأفكار الفيزيائيّ ومفاهيم الفيزياء مصاغة بشكل جوهريّ عن طريق الرياضيّات. يمكن القول، بأنّ الرياضيّات لها دور بالنسبة للفيزياء، ليس دورا خارجيّا بمعنى البحث عن أدوات ومصطلحات ولغة رياضيّاتيّة، من أجل التكلم عن الفيزياء. لكن بالعكس لها دور وطيد يمكن التعبير عنه بنشأة الفيزياء من خلال الرياضيّات.

ابتداء من القرن السابع عشر، استعمل المنهج الكميّ لوصف الطبيعة، ولكنّ الرياضيّات اعتبرت كطريقة للمعارف وليس أداة بسيطة للحساب. فكرة الوصف الكمّي للعالم الفيزيائيّ موضّحة عند ڤاليلي وديكارت. هذه الفكرة تستدعي رياضيّات جديدة منشأة من طرف نيوتن وليبنيتز، وقد أدّت إلى تطوير الميكانيك الكلاسيكيّ. إذا كان ڤاليلي لديه صعوبة في فهم مفهوم السرعة اللحظيّة فذلك لأنه ليس لديه إلاّ الهندسة الإقليديّة ونظريّة القضايا. إنّ إنشاء الحساب اللامتناهي ومفهوم المشتقّ هو الذي سمح بظهور المفهوم الفيزيائيّ للسرعة اللحظيّة. الأداة الرياضيّاتيّة تُصحح وتوضع في مركز دراسة ظاهرة ميكانيكيّة، هناك تفاعل بين الرياضيّات والفيزياء. تقترب الفيزياء من الرياضيّات عن طريق المرور من المحسوس إلى المجرّد، وتقترب الرياضيّات من الفيزياء عن طريق تقديم مفاهيم التبديل والتحويل والتغيّر في الوقت. هذا المثال في الميكانيك الكلاسيكيّ الذي يظهر بوضوح الربط بين الرياضيّات والفيزياء مؤسّسة تاريخيّا.

إنّ مفهوم المشتقّ قد أدخل لتلبية رغبة المختصّين في صياغة مسائل فيزيائيّة وهندسيّة بأدوات التحليل الرياضيّاتيّ وكذا بأدوات الهندسة التحليليّة التي كانت ذات شأن منتصف القرن السابع عشر. فمن المعلوم أنّ هذه الهندسة كان من ورائها الفرنسيّ ديكارت والانجليزيّ نيوتن والألمانيّ ليبنيتز. وقد كان ظهورها يضاهي ظهور نظرية المجموعات في العصر الحديث وبروز الهندسة الإقليديّة عند الإغريق (سعد الله ، 2012، 7).

إنّ المشتقّ وثيق الارتباط والصلة بالمماس (حازي، 2012، 9)، ويرجع تلازمهما إلى عهود سحيقة، ولاسيما العهود الإغريقيّة، التّي عرفت فيها الأعمال الهندسيّة ازدهارا هائلا. وبالطبع "عاش" المشتقّ في ظل المماس إلى غاية القرن السابع عشر حيث ازدادت أهميّة السيطرة على هذا الأخير بحكم بروز تطوّر في تطبيقاته وتعدّدها. يمكن القول بأنّ مفهوم المشتقّ خطا خطواته الأولى نحو النور مع كتابات ليبنتيز ونيوتن. وتجاذبته أعمال كبار علماء القرن الثامن عشر من غرب أوروبا بالخصوص. ومع استكمال التحكّم الدقيق في مفهوم النهاية في النصف الثاني من القرن التاسع عشر، مكّنت أعمال لاڤرانج وبولزانو وفيرشتراس من وضع التعريف الدقيق للمشتقّ كما هو متداول اليوم.

لا يكاد موطن من مواطن الفيزياء، فضلا عن الرياضيّات، يخلو من المشتق؛ فتطبيقاته متنوّعة ومتعدَدة. هكذا، نجده أساسيّا في الدراسة المحليّة لدالة ما من حيث تغيّراتا ورتابتها وتمتّعها بنقاط حديّة وتحدّب بيانها أو تقعّرها وقبول هذا البيان لمماس أو عدمه ... أمّا فيزيائيّا، فنجد أنّ علم الحركة يكاد يكون مبنيّا عليه. فمن خاض في السرعة والتسارع على وجه الخصوص سارع إلى المشتقّ ليفصّل حديثه ويبيّن.

6-2-جانب تاريخيّ لمفهوم المشتقّ:

كان للمشتقّ وجود منذ العصور القديمة غير أنّ هذا الوجود كان بصفة ثانويّة ومخفيّة (قعدان، 2013، صفحة 83). فقد كان الإغريق مهتمّين بمشكلتين هما: طريقة إنشاء المماس عند نقطة، وكيفيّة تحديد المساحة الواقعة بين المنحنى وقاطع من قواطعه. اقترح أرخميدس إنشاء المماس عند نقطة لشكل حلزونيّ، وكذلك طريقة تربيع قطعة من قطع مكافئ. أدى ذلك إلى ظهور الكميات اللامتناهيّة الصغر في حساب التفاضل والتكامل.

برز مفهوم المشتقّ في القرن السابع عشر على يد الرياضيّاتيّ نيوتن، وقد دعت الحاجة إلى حساب ما يسمى بالسرعة اللحظيّة للجسم حيث لم تكن معروفة لديهم سوى السرعة المتوسطة، التي تعرّف بأنّها نسبة التغيّر في المسافة على التغيّر في الزمن. لا أحد كان قادرا على معرفة سرعة الجسم في لحظة معيّنة وليس في مجال زمني، لذلك فكّر نيوتن بإنهاء التغيّر في الزمن إلى الصفر. فكرته لاقت في بادئ الأمر معارضة شديدة حيث من المعلوم أنّ القسمة على الصفر غير معرّفة. لكنّه رغم ذلك، أثبت أنّ هذه النهاية يمكن حسابها ممّا أوصله أخيرا إلى مفهوم وقاعدة المشتقَ الأوّل.

ظهور مفهوم المشتقّ كان في أعمال ليبنيتز، وكذلك في أعمال كارنو عند تحسينه لنظرية ليبنيتز. كما شارك كل من باسكال ولوبيطال في تطوير مفهوم المشتقّ من خلال الدراسات التّي قام بها الأوّل حول المماس، والثّاني في توسيعه لنظرية نيوتن. هذه الجهود أدت بدلامبير إلى تقديم تعريف لمفهوم العدد المشتقّ اعتمادا على مفهوم النّهاية. في منتصف القرن التّاسع عشر أصبح مفهوم المشتقّ مبيّنا من خلال أعمال فيرشستراس. يعود الفضل إلى لاقرانج في إعطاء الترميز $f'(x)$.

6-3- جانب بيداغوجيّ تعليميّ لمفهوم المشتق:

لمّا كان تاريخ مفهوم المشتقّ معقدا (Bedat, 2006, 9)، فإنّ معالجته بصفة واضحة تتطلب مقارنته ببرامج التعليم الثانوي في مختلف الأنظمة التربويّة. فالمشتق عند عدد حقيقي، معرّف انطلاقا من مفهوم النهاية. إنّه مفهوم محليّ لا يتبع إلاّ شروط الدالة في مجال العدد الحقيقيّ المفروض. عند وجود العدد المشتقّ، فإنه يفسّر بعدّة أشكال: فهو مرتبط بالتقريب التآلفي من الوجهة العدديّة، وبالمماس من الوجهة الهندسيّة، وبالسرعة اللحظيّة من وجهة علم الحركة، وبالكلفة الهامشيّة في الجانب الاقتصاديّ. لكن في مرحلة ثانيّة، يتمّ الانتقال من المحليّ إلى الإجماليّ ليتمّ تعريف المشتق في مجال. نهتم هنا بتغيّرات الدوال ومشاكل الأمثلة حيث يتمّ تطوير حساب المشتق باستعمال خوارزميات تساعد على إنجاح برمجيات الحساب الشكليّ.

لاحظنا فيما سبق وجود اختلافات واتفاقات بين الجانب البيداغوجيّ التعليميّ والجانب التاريخيّ لمفهوم المشتقّ. قبل الاهتمام بالاختلافات بين الجانبين، نبحث عن النقاط المشتركة بينهما وما هي المساعدة التي يقدّمها تاريخ الرياضيّات لتطوير تفكيرنا التعليميّ.

6-4- أوجه الاتفاق والاختلاف بين الجانبين البيداغوجيّ التعليميّ والتاريخيّ لمفهوم المشتقّ:

أوجه الاتفاق:

يمكن أن نسجل أربعة أوجه اتفاقية بين الجانبين.

- من الوجهة التاريخيّة والتعليميّة، لا يمكن تأسيس حساب التفاضل والتكامل دون امتلاك مفهوم الدالة. قد يكون هذا هو السبب في إعطاء مثل هذه الأهمية لمفهوم الدالة ابتداء من السنة الأولى من التعليم الثانويّ. لكن تاريخيّا، نسجل ظهور هذا المفهوم بشكل متزامن مع حساب التفاضل والتكامل بأشكال مختلفة (منحنيات، صيغ

جبريّة، قوانين الحركة). إلاّ أنّ المفهوم الجديد للدالة هو أكثر تجريدًا وأكثر تعميمًا رغم أنّ التمثيلات القديمة أثبتت قوّتها وسعة خيال العقل فيها.

- يظهر الجانب التعليميّ لمفهوم المشتقّ والتطوّر التاريخيّ له، الأهميّة التي أعطيت لعلم الحركة: بفضله يمكن تكوين حدس للعدد المشتقّ (مثل السرعة اللحظيّة لمتحرّك يتنقل على محور). يمكن القول إنّ علم الحركة يبقى المصدر الأساسيّ لمفهوم المشتقّ.

- تتفقّ كذلك الوجهة التاريخيّة والتعليميّة في مشاكل الأمثلة. حيث لاحظ كيبلر في سنة 1615 أنّ تغيّر دالة يكون بالخصوص بطيئا في جوار النهاية العظمى. واهتمّ فيرما خصوصا، بهذا النوع من المشاكل حيث استعمل الطريقة الجبريّة في حلّها أكثر من الطريقة التحليليّة التي يمكن تفسيرها كحالة خاصة من المعادلة $f\left(x_0\right)=0$.

لقد طبّق طريقة المطابقة لتحديد المماس وإيجاد قوانين ديكارت الخاصة بانكسار الضوء عن طريق التقليل من مدة المسار (مبدأ فيرما). كما أعطى ليبنيتز أهمية كبيرة لمشاكل الأمثلة مما أدّى به إلى اعتبار العالم الذي نعيش فيه هو "أفضل عالم ممكن".

- يطغى في تاريخ التحليل كما في النظرة التعليميّة (ممثلة في معظم التمارين المقدّمة للتلاميذ) الجانب الإجماليّ على الجانب المحليّ. سمحت هذه النظرة الإجماليّة بتطوير كلّ الجوانب المتعلّقة بخوارزميات حساب المشتقّات، لكنّها أهملت الصعوبات التي قد تطرح عند النقاط "المعزولة". ويبقى حساب التفاضل والتكامل المنسوب إلى ليبنيتز أو نيوتن، بكلّ قوّته وبساطته، هو واحد من أهم الإنجازات الرياضيّاتيّة.

أوجه الاختلاف:

يمكن تسجيل ثلاثة اختلافات بين الوجهة التاريخية والوجهة التعليميّة.

- نلاحظ أوّلا أنّ فكرة التكامل سبقت تاريخيّا مفهوم المشتقّ على خلاف سيرورة التدريس. اعتمد التحليل في الأصل، على مشاكل مختلفة واجهت الرياضياتيّين، والتي كانت هندسيّة في البداية. إنّها فئة من المشاكل المتعلّقة بالمماس، تلك التي تؤدي إلى التكامل بالخصوص. لقد ظهرت في وقت أرخميدس: التربيعات (يعني حساب المساحة)، قياس طول منحنى، تحديد مركز الثقل. لكن يجب انتظار نيوتن لوضع مفهوم المشتقّ فى الواجهة كما هو الحال في تعليمنا.

- مفهوم النهاية له أهميّة قصوى في تعليمنا، لكنّه لا يحتلّ نفس المكانة في تاريخ الرياضيّات. استخدم معظم الرياضيّاتيّين، قبل القرن التاسع عشر، مفهوم عدم التجزئة أو لامنتاهيات في الصغر رغم أنّه لم يكن دقيقا كفاية. لكنّه شكّل مصدر إلهام كبير للرياضيّاتيّين المختصّين في التحليل مثل كفالياري (Cavalieri)، وباسكال، وليبنيتز وتلاميذه. لقد عرض دلامبير بوضوح مفهوم النهاية وكيفيّة استخلاص مفهوم العدد المشتقّ، لكن لم يتم وضع النهاية في الواجهة حتى القرن التاسع عشر؛ وبالتالي استبعاد فكرة لامتناهيات في الصغر. ومن هنا نسجل أنّ التحليل بقي طويلا يعتمد على الحدس أكثر من الدقة.

- يستثمر التشابه بين النقطيّ والمستمرّ في تعليمنا قليلا؛ لكن بالمقابل، يساهم بشكل هامّ في تطوّر تاريخ التحليل. لمّا كان من الصعب صياغة هذا التشابه حدسيّا، فإنّه بالمقابل، مصدر لاكتشافات كثيرة لباسكال. وقد سمح ذلك بنشأة الحساب التفاضليّ في أعمال ليبنيتز.

انطلاقا من الجانب التاريخي لمفهوم المشتق ارتيأت في هذا المقال استعمال الهندسة في تقديم وكيفية تعليم وتعلّم المشتق في مرحلة الطور الثانوي.

7- استعمال الجانب الهندسي في تقديم وتفسير العدد المشتق:

7-1- تقديم العدد المشتق عن طريق تكبيرات متتالية في جوار نقطة:

تهتّم الدراسة بإظهار المماس عن طريق الميل. كما تهتم الأسئلة، المحفزة للتلاميذ، بالاهتمام بما يحدث في جوار نقطة، وكذلك إنجاز تكبيرات متتاليّة في جوارها. يتجسّد ذلك وفق مرحلتين (Crouzier, 2009, p. 3):

المرحلة الأولى:

تتعلّق هذه المرحلة، بالتذكير حول التوابع التآلفيّة. للتّلاميذ مكتسبات عن معامل توجيه مستقيم: إذا كان موجبا (سالبا، معدوما) فإنّه في حالة تزايد (تناقص، ثبات). يتمّ حساب هذا المعامل بالصيغة: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

وهذا يبيّن العلاقة الوثيقة بين مستقيم والتابع التآلفي الممثل له مما يجعلنا نذكر بالاختلاف بين الجانب البيانيّ (مستقيم، تزايد، تناقص، معامل التوجيه أو الميل) والجانب التحليليّ (تابع، تساوي معامل التوجيه: إذا كان موجبا (سالبا) فالتابع متزايد (متناقص)).

تمكن الإشارة إلى أنّه إذا كان f_1 و f_2 تابعين تآلفين نسبة تغيّرهما a_1 و a_2 على الترتيب، مع $0 \prec a_1 \prec a_2$، فإنّهما متزايدان. لكن نسبة تغيّر التابع الثاني أسرع من نسبة تغيّر التابع الأول.

بعد التذكير بالمكتسبات السابقة، تمّ طرح السؤال التالي على التلاميذ: هل يمكن تحديد، من أجل منحنى ممثّل لتابع كيفيّ، شيء يشبه معامل توجيه المستقيم الممثّل للتابع التآلفي؟ كان جوابهم سريعا: "إنّه لا يمكن أن يكون معامل التوجيه، لأنّه يتغيّر في كلّ وقت" وعليه، استنادا لرؤية التلاميذ، فإنّنا نقترح دراسة حول ما يحدث في جوار نقطة. الهدف من ذلك، هو حساب العدد المشتقّ، والكيفيّة التي تكون فيها رتابة التابع في جوار هذه النقطة. للتدقيق في ما سيحدث عند هذه النقطة، نقترح على التلاميذ تكبيرا في جزء من المنحنى بجوار هذه النقطة، مما يسمح بتحديد جزء من مستقيم يبدو معامل توجيه هو كأنّه العدد المطلوب.

من خلال هذا ربط المكتسبات السابقة للتلميذ بين معامل توجيه المستقيم بميل المماس وإشارته باتجاه تغير تابع.
وهنا استعمال الهندسة في تعيين معامل توجيه المماس وإشارة العدد المشتق لدراسة رتابة التابع(الدالة).

المرحلة الثانية:

تتعلّق هذه المرحلة بطريقة تدريس مفهوم العدد المشتقّ عن طريق الاستكشاف. تتم الدراسة في جوار نقطة. يمثل البيان الموالي المنحنى الممثّل للتابع f المعرّف على ℝ بـ: $f(x)=-x^3+4x^2-4x+3$.

(يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو مبرمج آخر).

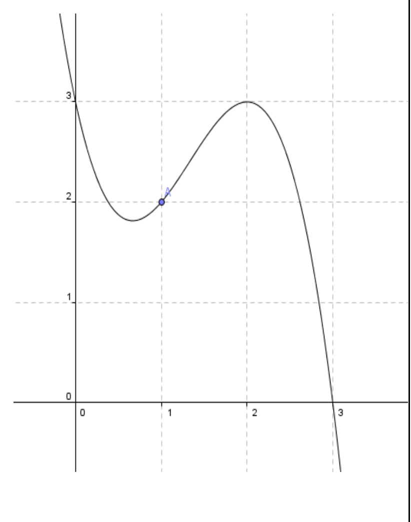
نستخدم الآلة الحاسبة، ونقوم بالتّكبير عند النقطة

A، بعد فترة من التّكبير، نرى مستقيما. إذن يمكننا حساب معامل توجيهه. هناك مشاكل تقنيّة في هذه العمليّة منها:

- تفقد النّقطة A، على الآلة الحاسبة، خاصيّة وحدانية الحلّ عند رسم المستقيم ذي المعادلة $y=2$.

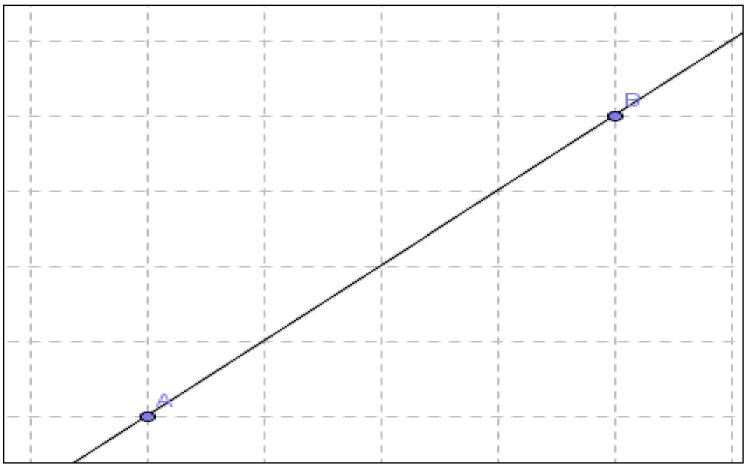
- عند حساب معامل التوجيه انطلاقا من نقطتين مختلفتين من المستقيم الظاهر على الشاشة، فإنّه يتمّ الحصول على معاملات توجيه مختلفة كثيرا. لذلك نطلب من التلاميذ حساب معامل التوجيه بين النقطة A وإحداثيات نقطة ناتجة من منحنى التابع المرسوم.

من خلال البيان الموالي، نقرأ معامل توجيه المستقيم المبيّن الذي هو 1.



نريد دراسة المنحنى بجوار النقطة A ذات الإحداثيات $\left(1, f\left(1\right)\right)$.
يمكن، بجوار هذه النّقطة، تحديد ما يشبه معامل توجيه المستقيم، وهذا يفسّر تغيّر f عند هذه النقطة.

شكل(1): التمثيل البياني للتابع f
Source: Crouzier, 2009, p4



شكل(2): تكبيرات نقطة
Source: Crouzier, 2009, p5

يعوّض هذا النشاط، إمكانية استخدام التلاميذ لأوراق مليمتريّة، التي هي وسيلة تقنيّة سريعة في حساب معامل التوجيه، لكن يفرض عليهم العودة إلى صيغة التعريف عند حساب نسبة تغيّر التابع بين 1 و x. مهما كانت المنهجيّة المستعملة، يتمّ الحصول على معادلة المستقيم الممثّل على الشاشة وهي: $y = x + 1$.

نلاحظ أنّ عند تعيين معادلة المستقيم المماسي في التعليم الثانوي نركز عليه حسابيا واتباع خوارزمية، وفي هذا المقال نستعمل الهندسة في تعيين معادلة المماس يكون أفضل لمفهوم العدد المشتق وتذليل الصعوبات لدى التلاميذ.

7-2- مقاربة المشتق هندسيا:

القصد من هذه الفقرة، هو توضيح العلاقة المألوفة بين مساحة دائرة ومحيطها وحجم الكرة ومساحة سطحها، المشتق عبارة عن عمليّة على التوابع معبرة بعلاقات بين متغيّرات مستقلّة وتابعة. إنّ العلاقة بين مساحة ومحيط دائرة غير مهمّة إذا نظرنا إليها كعمليّة مشتق لمساحة الدائرة المساوي لمحيطها. لكن الاهتمام بهذه العلاقة وإعطاء شرح مدعّم بتمثيل هندسيّ لها يكمن أساسا في استعمالها للتحسيس بمفهوم النهاية والمشتق.

نلاحظ خلال حصّة حول تطبيقات المشتق والتفاضل، تقترح مجموعة من التمارين للتلاميذ في مرحلة التعليم الثانوي يطلب منهم حساب مشتقات لدوال. ويكون الهدف هو تعزيز الحسابات التقنيّة مع العلم أنّ التلاميذ يتطرّقوا إلى النهايات، ولم تكن جزءا من منهاج هذه الوحدة. نلاحظ أثناء التعامل مع الكرة والدائرة، أنّ عبارة مشتقّ الحجم ينتج عنه عبارة مساحة سطح، ومشتقّ المساحة ينتج عنه عبارة المحيط، أي أنّ

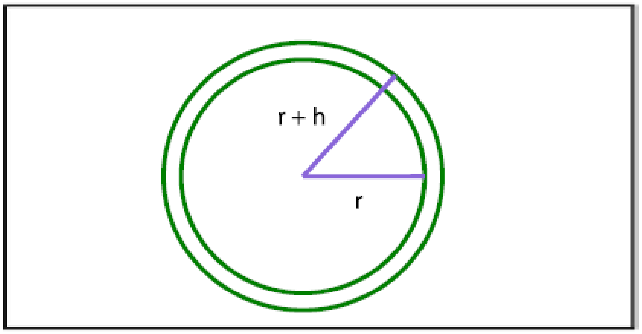
$\frac{dv}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=4\pi r^2$ و $\frac{dA}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\pi r^2\right)=2\pi r$، حيث تمثل A، v و r مساحة الدائرة وحجم الكرة ونصف قطر الدائرة أو الكرة. وكان الهدف ليس الحساب فقط بل يعرف التلاميذ التفسير الهندسيّ لمشتقة مساحة الدائرة، وواعيا بحجّة مشابهة لمشتقة حجم الكرة. كما يدرك أهميّة المخطّط المبيّن في الشكل رقم 3 أدناه، وبالتالي، الوصول إلى أنّ مشتقّ مساحة الدائرة يعطى بالشكل:

$$\lim\frac{\pi\left(r+h\right)^2-\pi r^2}{}=\lim\left(2\pi r+\pi h\right)=2\pi r$$

حيث $\pi\left(r+h\right)^2-\pi r^2$ يمثّل الفرق في المساحة بين الدائرة التي طول نصف قطرها $r+h$، والدائرة التي طول نصف قطرها r. وهي مساحة حلقة عرضها h حول دائرة نصف قطرها r. التغيّر في هذا الفرق يقترب إلى محيط الدائرة الداخليّة عندما h يؤول إلى الصفر. وهنا يكون ترسيخ مفهوم النهاية والمشتق هندسيا وهذا هو الهدف الرئيسي من بحثنا وإثبات مشتق المساحة هو المحيط ومشتق الحجم هو مساحة السطح هندسيا (Zazkis, 2012, 3).

وبشكل مشابه يعرّف مشتقّ حجم الكرة بالشكل:

$$\lim\frac{\frac{4}{3}\pi\left(r+h\right)^3-\frac{4}{3}\pi r^3}{}=\lim\left(4\pi r^2+4\pi rh+\frac{4}{3}\pi h^2\right)=4\pi r^2$$



شكل(3): التمثيل الهندسيّ لمشتقّ مساحة الدائرة

Source: Ami Mamolo,2012,p.3

8- الحقل المفهوماتي (Le champ conceptuel) في تعلّم الرياضيات:

لا يمتلك المفهوم الرياضيّاتي هيكلة معرفيّة إلا إذا انتظم في شبكة من العلاقات مع مفاهيم أخرى، تسمى هذه الشبكة بالحقل المفهوماتي، يرمي هذا الحقل إلى دراسة نمو المفهوم وفهم التسلسل والإنقطاعات بين المعارف.

يقول فيرنيو(Vergnaud) حول نظرية الحقل المفهوماتي " كل وضعية معقدة يمكن تحليلها إلى مزيج من المهمات البسيطة"(Vergnaut, 1989, p. 47) .

تعتبر المخططات أداة فعالة تربط المفاهيم الجديدة بالمفاهيم السابقة الموجودة في الحقل المفهوماتي الواحد، المخطط هو تنظيم ثابت لفئة من البيانات تخص وضعية تعليمية معطاة، وفي المخططات نجد المعارف السابقة المثبتة حول الموضوع أي عناصر المعرفة تسمح للمفهوم الجديد بأن يصبح عملي.

مثال ذلك يمكن تقديم المشتق عن طريق عدة إطارات مختلفة عن طريق التعاريف والمماس والسرعة اللحظية وتقديم المشتق باستعمال تمثيلات هندسية. ومفهوم المشتق مرتبط بالنهاية والمالانهاية والدالة والمماس وهنا انتظام في شبكة من العلاقات مع مفاهيم أخرى. ليس من الضروريّ تقديم تدريس مفهوم النهاية على مفهوم المشتقّ حتى يتلاءم ذلك مع تاريخ الرياضيّات، وبالتالي، يمكن أن يكون مفهوم المشتقّ تعليلا لدراسة مفهوم النهاية، وأصبح الآن في تقديم المشتق باستعمال النهاية وهنا ترمي نظرية الحقل إلى فهم التسلسل.

يدرس المشتق ضمن إطار معين باب التحليل وتدرس حساب المساحات والحجوم والسطوح في إطار هندسي، الاعتقاد هنا أن هناك انقطاع بين المعارف ويعد الانتقال من تعلم المفهوم كأداة إلى تعلمه كموضوع خطوة حاسمة في امتلاك أو تملُّك المفهوم من الناحية التعليمية ويلعب الخطاب اللغوي دورا محوريا في ذلك حسب فيرنيو.

وفي الأخير نظرية الحقول المفاهيمية تعتبر من بين أهم نظريات تعليمية الرياضيات، فهي حقلا خصبا لإثراء التعليمية بمزيد من الاختراقات الناجحة التي تذلل صعوبات تعلم الرياضيات وتسليط الأضواء على التفاعلات الموجودة بين قطبي المعرفة والمتعلم تعزف على الوتر الحساس للعملية التعليمية.

9-صعوبات في تعليم المشتق:

يواجه تعليم المشتق صعوبات حقيقية في تدريسه (LAMBO, 2014, p. 21). في الواقع أنّ مفهوم المشتقّ على علاقة بعدة مفاهيم رياضيّاتيّة مختلفة، تشكل هذه المفاهيم حواجز في تدريس المشتقّ؛ نذكر منها مفاهيم النهاية، والمماس.

يبدو مفهوم المشتقّ، لأول وهلة، بسيطا؛ لكنه في الواقع معقّد جدّا، إذ يتطلّب وعي المتعلم بتلك المفاهيم الرياضيّاتيّة المجرّدة المذكورة سابقا، خاصة من ناحية مصدرها وتطورها. فعلى سبيل المثال، التعريف الحالي للتابع تطلب وضعه حوالي 4000 سنة، كما أنّ التوابع غير المستمرة كلّفت الرياضيّاتيّين الكثير من الوقت للتحكم في خصائصها. قد يعتقد المرء أنّ مفهوم التابع يسبب لوحده الكثير من الصعوبات على التلاميذ، وكذا مفهوم النهاية والمالانهاية هي كلها مفاهيم مجرّدة وليست بديهيّة للمتعلمين وحدسهم المرتبط بهذه المفاهيم متجذّر، وهذا ما يمنعهم من الذهاب أبعد من ذلك.

لهذا من الضروري أن نعمل على تعميق مفهوم النهاية لدى المتعلمين وجعلهم يتجاوزون، بالخصوص، الصعوبات الرئيسيّة لمفهوم المالانهاية حيث ينصح الباحثون في ذلك بالمرور من المالانهاية الكامنة (l'infini potentiel) (مثلا عملية تنصيف قطعة مستقيمة والاستمرار دون توقف بالنسبة إلى الأنصاف هي المالانهاية المحتملة)، القريبة من فكرة المالانهاية الحدسيّة، إلى التعرف على المالانهاية الحاليّة المستعملة غالبا في التعاريف الرياضيّاتيّة. من الواضح أنّ رواسب الصعوبات المتعلّقة بهذه المفاهيم وهنا تقريب جانب هندسي إلى مفهوم مجرد.

لا تزال موجودة في دراسة المشتقّ. هنالك مفارقة تمثل صعوبة أخرى لدى المتعلمين في مفهوم المشتقّ مرتبطة بمفهوم المماس؛ إذ من جهة يرتكز على المستقيم المماسيّ للمنحنى في تفسير العدد المشتق، ومن جهة أخرى وجود هذا المماس رهين بوجود هذا العدد المشتق. يأتي التلاميذ إلى القسم بتصور لمفهوم المماس متعلّق بمماس الدائرة، ما يشكل حاجزا للمرور إلى مفهوم المماس بشكل عام، هذا الأخير الذي يرتبط بالمشتق. والجدير بالإشارة أنه لا يتم ربط مماس الدائرة بالمشتق في التدريس رغم أن هذا الربط يستخدم في أشكال أكثر تعقيدا، نخص بالذكر القطعين الزائد والناقص، وهذا قد يكون محل تساؤل مشروع لدى المتعلمين.

10-اقتراحات في تعليم وتعلّم مفهوم المشتق:

عادة ما يتم عرض مفهوم المشتقّ عن طريق النهاية والتي يكون التلاميذ غير متمكّنين فيها جيدًا ممّا يخلق صعوبة في تقبّلهم للمفهوم. زيادة على كون مفهوم النهاية يقدّم بعد مفهوم المشتقّ في البرامج الرسميّة الثانوية. إنّ تحليل البرامج التعليمية ومراجعة الكتب المدرسيّة يسمحان بتحديد الأفكار الرئيسيّة في تعليم وتعلم مفهوم المشتقّ، والاهتمام بالاستراتيجيات والمهارات المستخدمة في هذه الوثائق. إنّ هذا التحليل وهذه المراجعة والنظر فيما يحدث في القسم، كل ذلك يساهم في اكتشاف صعوبات جمّة تتعلق بمفهوم المشتقّ: بعضها يتعلّق بالمشتقّ نفسه، والبعض الآخر يتعلّق بمفاهيم النهاية والمماس، والبعض يتعلّق بالنمذجة.

أهمّ الجوانب التي نعتقد أنها قد يستفاد منها أثناء تعليم وتعلّم هذا المفهوم، ويخفّف بقدر الإمكان من ثقله هي:

- توظيف المدرسين (في المستوى الثانويّ بالخصوص) للجانب الابستمولوجي التاريخيّ في تقديم مفهوم المشتق.
- إتاحة الوقت للتلاميذ لفهم العدد المشتقّ، مهما كانت طريقة التقديم.
- تصميم أنشطة جيّدة لإعطاء معنى للعدد المشتقّ، على سبيل المثال السرعة والتفسير الهندسي.
- استعمال برمجيات كوسيلة لتقديم العدد المشتق عند نقطة.
- تحسين أداء التلاميذ في حساب المشتق، ودراسة إشارته وعلاقته بدراسة اتجاه تغيّر الدالة.
- اقتراح العديد من التطبيقات أثناء الدروس، والتنويع في أنماط التمارين والمشاكل.
- الاهتمام بالتدريس التجريبي لمفهوم المشتق.

11-خاتمة:

قادني بالخصوص إلى أن أسلك أزقّة المشتق، مستعرضا سيرورة هذا المفهوم الهام والوقوف كيفية تقديمه هندسيا باستعمال المماس والتمثيلات الهندسية، بالخصوص عند واحدة من تطبيقاته كأداة متمثّلة في الربط بين

المساحة والمحيط، وأيضا بين الحجم ومساحة السطح. الغريب هنا، هو أنّ هذه العلاقة رغم وضوحها وبساطتها تكاد تكون مغيبة في مسارات كثير من التلاميذ، وهذا الربط يبيّن ترسيخ مفهوم النهاية وتفسير العدد المشتق، إذ التطبيقات التقليدية لمفهوم المشتق التي دأبوا عليها لا تتضمّنها، إنّها مبعدة من مراسهم فأضحت بذلك مطموسة غير مألوفة، وأخيرا يكون الجانب الهندسي أفضل طريقة في إيصال الكثير من المفاهيم الرياضيّاتية وبالخصوص المشتق.

12- قائمة المراجع:

قائمة المراجع بالعربية:

أبو بكر، خالد سعد الله . (2012). *التحليل الرياضي ا: السنة الأولى، علوم دقيقة.* الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.

فريدريك هـ، بل، ترجمة: محمد أمين المفتي وممدوح محمد سليمان، مراجعة وليم تاوضروس عبيد. (1993). *طرق تدريس الرياضيات، الجزء الأول ،الطبعة الثالثة.* مصر: الدار العربية للنشر والتوزيع.

محمد، حازي. (2012). *القابلية للاشتقاق والنشور المحدودة لدى الدوال الحقيقيَة ذات متغيَر حقيقيَ: تقعيد نظريَ وتطبيقات.* ديوان المطبوعات الجامعية،الجزائر.

هبة، نصر قعدان. (2013). *الرياضيات.* عمّان: دار صفاء للنشر والتوزيع.

قائمة المراجع باللاتينية:

Bedat, J. &. (2006). *Aspect historique de quelques notions d'analyse.* France.: Équipe académique Mathématiques Bordeaux.

Bobin, M. (1997). *Vitesse et dérivée en 1er S* (Vol. n°79 Automne). Strasbourg,France: Les Cahiers Clairant.

Crouzier, A. (2009). *Introduire la dérivée en 1er S comme réponse à une question!.* France: IREM de Clermont-Ferrand.

Einstein, A. (1921). *"La Géométrie et l'Expérience" in Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité.* Paris.

Hairer,E, W. (2001). *L'analyse au fil de l'histoire.* Berlin, Allemagne: Springer.

LAMBO, L. d. (2014). *ENSEIGNER LA DÉRIVÉE.* Yaoundé, Cameroun.

Pape, S. &. (2001). *The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding, Theory into Practice, , Realizing Reform in School Mathematics* (Vol. 40, No. 2). Berlin ,Allemagne: Springer.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution* universitaire. *Le cas éclairant du thème des dérivées. thèse de doctorat.* Belgique: Université de Liège.

Rudolf Bkouche .(2006) .*La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques,Article publié dans Proceefing of 4th International Colloquim on the Didactics of Mathematics, V;II,édité par Kourkoulos et al* ..Université de Crète,Crète.

Vergnaut, G. (1989). *La théorie des champs conceptuels.* Paris, France: Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes.

Zazkis, A. M. (2012). *Stuck on convention: a story of derivative relationships* (Vol. 81,2). Berlin ,Allemagne: Springer Science+Business Media B.V.