
Soumis le : 07/12/2016

Forme révisée acceptée le : 21/06/2017

Auteur correspondant : samir.benyoucef@gmail.com

Nature & Technology

<http://www.univ-chlef.dz/revuenatec/>

Influence de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sur fondation élastique

Abdelkader MAHMOUDI^a, Rabbab BACHIR-BOUIADJRA^b, Samir BENYOUCEF^{*,a},
Abdelouahed TOUNSI^a, El Abbas ADDA-BEDIA^a

^a Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbès, 89 Cité Ben M'hidi 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie

^b Université Mustapha Stambouli de Mascara, 29000 Mascara, Algérie

Résumé

Dans ce travail, une solution analytique pour l'étude du comportement vibratoire des plaques en matériau fonctionnellement gradué (FGM) est présentée. Durant le processus de fabrication de ces plaques des défauts peuvent apparaître sous forme de porosité. Ces derniers peuvent remettre en cause et modifier le comportement global de telles plaques. Une méthode basée sur la théorie d'ordre élevé sera présentée pour étudier la vibration libre des plaques FGM reposant sur fondation élastique. Deux distributions de la porosité suivant l'épaisseur de la plaque seront retenues. Le module d'élasticité et la densité massique de ces plaques sont supposés variés suivant l'épaisseur de la plaque selon ces deux distributions. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe Hamilton et la solution du problème en termes de fréquences naturelles sera obtenue par le biais de la solution de Navier. Des résultats numériques de la présente méthode sont comparés avec ceux de la littérature, et une étude paramétrique sera détaillée pour souligner l'influence de la variation de la distribution de la porosité sur la réponse vibratoire des plaques FGM reposant sur fondation élastique.

Mots-clés : porosité ; vibration libre ; matériaux fonctionnellement gradués ; fondation élastique

Abstract

In this paper, an analytical solution is presented for vibration behaviour analysis of functionally graded materials plates (FGM). During manufacture of these plates, defects such as porosities can appear. Those can change the entire behaviour of these plates. A method based on a higher shear deformation theory will be presented to study the free vibration of FGM plates resting on elastic foundation. Two different porosity distributions through thickness direction of plate will be retained. The elasticity moduli and mass density of these plates are assumed to be graded in the thickness direction according two distribution patterns. The governing equations are obtained through the Hamilton's principal and the closed form solutions in terms of natural frequencies are obtained by using Navier technique. The numerical results obtained through the present analysis are compared with the ones available in the literature, and a parametric study is carried out to investigate the influence of the varying porosity distributions on the vibration response of FGM plates resting on elastic foundation.

Keywords : porosity ; free vibration ; functionally graded materials ; elastic foundation

1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Materials, FGM) s'inscrivent dans une tendance relativement nouvelle de la science des matériaux. Ce sont des matériaux composites sophistiqués ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des

interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges

multicritères. Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique, l'aérospatial, le génie civil, les ouvrages de travaux publics et bien d'autres secteurs où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. De ce qui précède, Il est donc nécessaire de définir des lois de comportement adaptées à ces possibilités de fonctionnement des pièces ou éléments élaborés à partir de ces matériaux.

Dans la littérature on trouve plusieurs théories des plaques, les plus connues sont la théorie classique des plaques (CPT), la théorie des plaques du premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques d'ordre élevé (HSDT). Le modèle CPT est basé sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love qui stipule que les lignes droites restent droites et perpendiculaires au plan médian après déformation. Ces hypothèses impliquent l'annulation de la déformation normale et du cisaillement et, par conséquent, elles négligent les effets de cisaillement et de déformation normale.

Woo et al. [1] ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires issues de la CPT avec des hypothèses de Von-Karman ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode de série. Hu et Zhang [2] ont également adopté la CPT avec les hypothèses Von-Karman pour effectuer l'analyse de la vibration et de la stabilité des plaques FG sous excitation en plan. La vibration libre des plaques FG reposant sur fondation élastique avec diverses conditions aux limites a été étudiée par Chakraverty et Pradhan [3] en utilisant la CPT et la méthode de Rayleigh-Ritz. Chakraverty et Pradhan [4] ont amélioré leur travail antérieur (2014) en tenant compte de l'effet des ambiances thermiques. Ruan et Wang [5] ont investigué sur la vibration et la stabilité du déplacement des plaques obliques FG en utilisant la CPT et la DQM. La FSDT développée par Mindlin [6] représente l'effet de la déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur.

Chen [7] a étudié la vibration non linéaire des plaques FG soumises à une action combinée de la compression initiale dans le plan et les contraintes de flexion à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de Von-Karman. La fréquence non linéaire des plaques simplement appuyées a été

obtenue en utilisant la méthode de Galerkin en combinaison avec la procédure itérative de Runge-Kutta. La FSDT avec les hypothèses de Von-Karman a également été employée par Alijani et al. [8] pour étudier la vibration non linéaire des plaques FG simplement appuyées dans des environnements thermiques. La vibration libre des plaques FG reposant sur une fondation élastique a été étudiée par Fallah et al. [9] en utilisant la FSDT et une approche semi-analytique qui est basée sur une combinaison de la série de puissance infinie et la méthode de Kantorovich. Les solutions analytiques pour l'analyse de la vibration libre des plaques type Levy reposant sur une fondation élastique ont été données par Husseini-Hashemi et al. [10] en utilisant la FSDT et la solution Levy.

Les HSDTs représentent les variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou à la fois les déplacements dans le plan et les déplacements transversaux (théorie quasi-3D) à travers l'épaisseur, et par conséquent, la capture des effets de la déformation de cisaillement ou à la fois le cisaillement et les déformations normales. Les HSDTs peuvent être développées à l'aide des fonctions de forme polynômiale ou des fonctions de forme non-polynômiale.

Chen et al. [11] ont étudié la vibration libre et le flambement des plaques FG sous une combinaison de contrainte d'extension et d'une contrainte de flexion pure. Les équations régissant le mouvement basées sur le champ de déplacement de Lo et al. [12] sont analytiquement résolues pour la fréquence naturelle et la charge de flambement des plaques FG simplement appuyées. Les effets de divers paramètres et des contraintes initiales sur la fréquence propre et la charge de flambement des plaques FG ont été étudiés.

Jha et al. [13] ont étudié la flexion statique et la vibration libre des plaques FG en utilisant la théorie quasi-3D de Kant et Manjunatha [14] avec 12 inconnues. Des solutions analytiques ont été obtenues pour les plaques simplement appuyées en utilisant la solution de Navier. L'influence des termes d'ordre supérieur dans le champ de déplacement sur la fréquence naturelle des plaques FG a également été étudiée.

Hebali et al. [15] ont proposé une nouvelle solution quasi-3D basée sur une théorie de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de la flexion et de la vibration libre des plaques FGM. Hamidi et al. [16] ont présenté une théorie des plaques sinusoïdale avec cinq inconnus en tenant

compte de l'effet d'étirement (stretching effect) pour l'analyse de la flexion thermo-mécanique des plaques sandwichs.

Des études récentes sur le flambement, la flexion et la vibration des plaques/poutres FG et des plaques composites peuvent être trouvées dans les travaux de (Attia et al., Draiche et al., Khalfi et al., Nedri et al., Mahi et al.) [17-21]. Benachour et al. [22] ont développés un model pour la vibration libre des plaques FGM avec un coefficient arbitraire. Des solutions approchées sont obtenues en utilisant la solution de Navier, les fréquences fondamentales sont trouvées en résolvant un problème de valeurs propres.

Il est bien connu que les théories HSDTs et quasi-3D développées en élargissant les déplacements en série de puissances des coordonnées de l'épaisseur sont plus coûteuses, car chaque calcul de puissance supplémentaire des coordonnées de l'épaisseur va induire une inconnue supplémentaire à la théorie. Par conséquent, il est nécessaire de simplifier les HSDTs existantes et les théories quasi-3D ou de développer des théories simples avec moins d'inconnues. En utilisant des hypothèses similaires à celles de Shimpi [23], de nombreuses théories de déformation de cisaillement à quatre inconnus ont été développées en utilisant différentes fonctions de forme. Par exemple, Merdaci et al., Ameer et al. [24-25] ont développé une HSDT à quatre inconnus pour les plaques sandwich FG et les plaques FG en utilisant la fonction sinusoïdale. En se basant sur cette même théorie raffinée à quatre inconnus, Tounsi et al. [26] ont analysés la flexion thermoélastique des plaques sandwichs. Zidi et al. [27] ont étudiés la réponse en flexion des plaques FG sous un chargement thermomécanique. Dans la fabrication des pièces en FGM, des porosités peuvent apparaitre au sien de ces éléments durant le processus de frittage. Ce ceci est du à la large différence de la température de solidification [28]. Wattanasakulpong et al. [29] donnent une discussion sur les porosités se produisant à l'intérieur des FGM fabriqués par la technique d'infiltration séquentiel.

Magnucka-Blandzi [30] ont étudiés la stabilité dynamique pour les plaques circulaires poreuses afin de déterminer les températures critiques. L'influence des régions instables pour les équations de Mathieu ont été décrites. Biot [31] a proposé une théorie poro-élasticité par l'introduction des variables dynamiques et cinématiques. En se basant sur cette théorie, Detournay et Cheng [32] ont exprimé la relation contrainte-déformation pour les structures poreuses saturées qui a été utilisée par Jabbari

et Mojahedin [33] pour effectuer l'analyse du flambage des plaques minces circulaires en FGM poreuses et saturées. Récemment, Ait Yahia et al. [34] ont étudiés la propagation des ondes dans les plaques FG contenant des porosités en utilisant différentes théories d'ordre élevé. Mouaici et al. [35] ont proposés une solution analytique pour la vibration des plaques FGM avec des porosités. L'analyse se basait sur la théorie de déformation de cisaillement avec la prise en compte de la position exacte de la surface neutre.

L'objectif de ce travail est la présentation d'une théorie de déformation de cisaillement pour l'analyse de la vibration des plaques FGM poreuses reposant sur fondation élastique. Deux distributions de la porosité suivant l'épaisseur de la plaque seront retenues. Le module d'élasticité et la densité massique de ces plaques sont supposés variés suivant l'épaisseur de la plaque en fonction de ces deux distributions. Les résultats de la présente méthode sont comparés avec d'autres issus de la littérature. Une grande concordance a été trouvée.

2. Formulation théorique

Considérons une plaque rectangulaire (FGM) d'épaisseur h , de longueur a et de largeur b tel que montrée par la figure (1). La plaque est supposée reposer sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak de rigidité de Winkler k_0 et de cisaillement k_1 . Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont supposées variées suivant une loi bien déterminée en fonction de la distribution de la porosité. Dans ce qui suit, deux distributions de la porosité dans la direction de l'épaisseur sont considérés [36] :

- 1^{er} distribution de la porosité :

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \\ G(z) &= G_1 [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \\ \rho(z) &= \rho_1 [1 - e_m \cos(\pi \zeta)] \end{aligned} \quad (1)$$

- 2^{eme} distribution de la porosité :

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ G(z) &= G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \rho(z) &= \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi}{2} \zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

où $\zeta = z/h$, le coefficient de la porosité $e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1} = 1 - \frac{G_0}{G_1}$, ($0 < e_0 < 1$), la valeur minimale et maximale du module de Young E_0 et E_1 relie les valeurs minimales et maximales des modules de cisaillement G_0 et G_1 par le biais de la relation $G_i = E_i/[2(1 + \nu)]$, ($i = 0, 1$). Il y a lieu de signaler que le coefficient de poisson noté ν est maintenu à une valeur constante le long de l'épaisseur de la plaque. Le coefficient de la porosité pour la densité massique est défini par $e_m = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$, ($0 < e_m < 1$), dans laquelle ρ_0 et ρ_1 sont les valeurs minimales et maximales de la densité massique respectivement.

La relation entre la densité et le module de Young pour une forme de métal à cellules ouvertes est donnée par [37-38] :

$$\frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \quad (3)$$

Cette dernière équation peut être utilisée pour trouver la relation entre e_0 et e_m est donnée par :

$$e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (4)$$

2.1. Equations constitutives

Pour un comportement linéaire élastique des plaques (FGM), la relation contraintes déformations s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont respectivement les composants des tenseurs des contraintes et déformations. En utilisant les propriétés matérielles définies dans les équations (2) ou (3), les coefficients de rigidité (Q_{ij}) peuvent être exprimés de la manière suivante :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \quad (6a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2} \quad (6b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (6c)$$

En se basant sur la théorie des plaques épaisses qui tient compte l'effet de cisaillement, le champ des déplacements est donné par :

$$u = u_0(x, y) - z w_{,x} + f(z) \theta_x \quad (7a)$$

$$v = v_0(x, y) - z w_{,y} + f(z) \theta_y \quad (7b)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (7c)$$

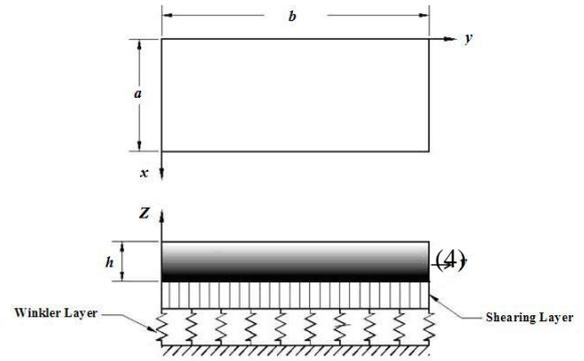


Figure 1 : Plaque FGM reposant sur une fondation élastique.

où (u, v, w) sont respectivement les déplacements suivant les directions (x, y, z) , (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements en niveau du plan moyen de la plaque à $z = 0$, θ_x et θ_y sont les rotations des normales au niveau du plan médian par rapport aux axes y et x et $f(z)$ est une fonction de gauchissement qui détermine la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transversale à travers l'épaisseur. Cette fonction est choisie afin de satisfaire les conditions de contraintes de cisaillement nulles aux bords de la plaque et maximal au centre. $(\)_{,x}$ et $(\)_{,y}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x et y . dans ce travail, la fonction de cisaillement $f(z)$ varie le long de l'épaisseur comme suit :

$$f(z) = z - \frac{h \sinh\left(\frac{10z}{h}\right)}{10 \cosh(5)} + \frac{h}{100} \quad (8)$$

En considérant les déformations linéaires, celles-ci peuvent s'écrire comme suit :

$$\varepsilon_x = u_{0,x} - zw_{,xx} + f(z)\theta_{x,x} \quad (9a)$$

$$\varepsilon_y = v_{0,y} - zw_{,yy} + f(z)\theta_{y,y} \quad (9b)$$

$$\gamma_{xy} = u_{0,y} + v_{0,x} - 2zw_{,xy} + f(z)(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \quad (9c)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\theta_x \quad (9d)$$

$$\gamma_{yz} = f'(z)\theta_y \quad (9e)$$

où

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (10)$$

2.2. Equation de mouvement

En utilisant le principe d'Hamilton, on peut obtenir l'équation de mouvement de la plaque (FGM) de la manière suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta U_F - \delta K - \delta W) dt = 0 \quad (11)$$

où U est l'énergie de déformation et K est l'énergie cinétique de la plaque (FGM), U_F est l'énergie de déformation de la fondation et W est le travail de forces extérieures. En utilisant le principe de l'énergie totale minimale, des équations de mouvement peuvent être

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_A \left\{ \delta u N_{x,x} + \delta v N_{y,y} + \delta u N_{xy,y} + \delta v N_{xy,x} - \delta w M_{x,xx} - \delta w M_{y,yy} - 2\delta w M_{xy,xy} \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta \theta_x P_{x,x} + \delta \theta_y P_{y,y} + \delta \theta_x P_{xy,y} + \delta \theta_y P_{xy,x} + \delta \theta_x (-R_x) + \delta \theta_y (-R_y) \right\} dA \right. \\ & \left. + \left\{ \delta u (I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{,x} + I_4 \ddot{\theta}_x) + \delta v (I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{,y} + I_4 \ddot{\theta}_y) + \delta w (I_2 \ddot{u}_{,x} + I_2 \ddot{v}_{,y} + I_1 \ddot{w} - I_3 (\ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy}) + I_5 (\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y})) \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta \theta_x (I_4 \ddot{u} - I_5 \ddot{w}_{,x} + I_6 \ddot{\theta}_x) + \delta \theta_y (I_4 \ddot{v} - I_5 \ddot{w}_{,y} + I_6 \ddot{\theta}_y) \right\} dA + \int_A f_e \delta w dA \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

où les efforts et les moments sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & C_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} \\ C_{ij} & E_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ k_\theta \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (15)$$

$$\{R\} = [F_{ij}] \{\theta\} \quad (i, j = 4, 5)$$

dans laquelle on a :

déterminées. En considérant la variation de l'équation précédente on aura :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \right. \right. \\ \left. \left. - \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV + \int_A (f_e \delta w) dA \right] dt = 0 \quad (12)$$

où (...) représente la dérivée seconde par rapport au temps et f_e est la densité de la force de réaction de la déformation. Pour le modèle de déformation de Pasternak on a :

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w \quad (13)$$

Si la fondation est modélisée en utilisant le modèle linéaire de Winkler, le coefficient k_1 dans l'équation (13) sera nul. En utilisant l'équation (9), l'équation (12) prend la forme suivante :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}, k = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$k_\theta = \begin{Bmatrix} k_1 A' \theta_{,xx} \\ k_2 B' \theta_{,yy} \\ [k_1 A' + k_2 B'] \theta_{,xy} \end{Bmatrix}, \theta = \begin{Bmatrix} k_1 A' \theta_{,x} \\ k_2 B' \theta_{,y} \end{Bmatrix}$$

et les composantes de rigidité et les moments d'inertie sont données par :

$$\begin{aligned} & \{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\} \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1, z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z)\} dz \quad (i, j=1,2,6) \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\{F_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} [f'(z)^2] dz \quad (i, j=1,2,6) \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} & (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \{1, z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z)\} dz \end{aligned} \quad (17c)$$

En rassemblant les coefficients des termes $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y$ dans l'équation (13), les équations de mouvement sont obtenues comme suit :

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = I_1 \ddot{u} - I_2 \ddot{w}_{,x} + I_4 \ddot{\theta}_x \quad (18a)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = I_1 \ddot{v} - I_2 \ddot{w}_{,y} + I_4 \ddot{\theta}_y \quad (18b)$$

$$\begin{aligned} M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + k_0 w - k_1 \nabla^2 w = I_1 \ddot{w} \\ + I_2 (\ddot{u}_{,x} + \ddot{v}_{,y}) - I_3 (\ddot{w}_{,xx} + \ddot{w}_{,yy}) + I_5 (\ddot{\theta}_{x,x} + \ddot{\theta}_{y,y}) \end{aligned} \quad (18c)$$

$$P_{x,xx} + P_{xy,xy} - R_x = I_4 \ddot{u} - I_5 \ddot{w}_{,x} + I_6 \ddot{\theta}_x \quad (18d)$$

$$P_{xy,xy} + P_{y,yy} - R_y = I_4 \ddot{v} - I_5 \ddot{w}_{,y} + I_6 \ddot{\theta}_y \quad (18e)$$

Les conditions aux limites pour une plaque simplement appuyée sont données comme suit :

<u>à x = bord constant</u>	<u>à y = bord constant</u>
• Soit u ou N_x	• Soit v ou N_{xy}
• Soit v ou N_{xy}	• Soit u ou N_{xy}
• Soit w ou $(M_{x,x} + 2M_{xy,x})$	• Soit w ou $(M_{y,y} + 2M_{xy,y})$
• Soit $w_{,x}$ ou M_x	• Soit $w_{,y}$ ou M_y
• Soit θ_x ou P_x	• Soit θ_x ou P_{xy}
• Soit θ_y ou P_{xy}	• Soit θ_y ou P_y

(19)

2.3. Solution de Navier pour des plaques rectangulaires simplement appuyées

Les conditions aux limites le long des côtes d'une plaque simplement appuyée peuvent être obtenues comme suit :

$$N_x = v_0 = w_0 = M_x = P_x = \theta_y = 0 \quad \text{à } x = 0, a \quad (20a)$$

$$N_y = u_0 = w_0 = M_y = P_y = \theta_x = 0 \quad \text{à } y = 0, b \quad (20b)$$

Pour la solution analytique des équations (18), la méthode de Navier est utilisée sous les conditions aux limites spécifiques. Les fonctions de déplacement qui satisfont les équations (20) des conditions aux limites sont exprimées en série de Fourier comme suit :

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (21a)$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (21b)$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (21c)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (21d)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (21e)$$

où $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer et ω est la fréquence avec le mode (m, n) .

2.4. Solution analytique

On substituant les équations (17) et (21) dans les équations de mouvement (18), on obtient le système d'équation pour chaque valeur fixée de m et n , pour un problème de vibration libre, on a :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \quad (22)$$

où

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -I_2\alpha & I_4 & 0 \\ 0 & I_1 & -I_2\beta & 0 & I_4 \\ -I_2\alpha & -I_2\beta & I_1 + I_3(\alpha^2 + \beta^2) & -I_5\alpha & -I_5\beta \\ I_4 & 0 & -I_5\alpha & I_6 & 0 \\ 0 & I_4 & -I_5\beta & 0 & I_6 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\
 a_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\
 a_{13} &= -B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 \\
 a_{14} &= C_{11}\alpha^2 + C_{66}\beta^2 \\
 a_{15} &= (C_{12} + C_{66})\alpha\beta \\
 a_{22} &= A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2 \\
 a_{23} &= -B_{22}\beta^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta \\
 a_{24} &= (C_{12} + C_{66})\alpha\beta \\
 a_{25} &= C_{22}\beta^2 + C_{66}\alpha^2 \\
 a_{33} &= D_{11}\alpha^4 + D_{22}\beta^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 \\
 &\quad + k_0 + k_1(\alpha^2 + \beta^2) \\
 a_{34} &= -E_{11}\alpha^3 - (E_{12} + 2E_{66})\alpha\beta^2 \\
 a_{35} &= -E_{22}\beta^3 - (E_{12} + 2E_{66})\alpha^2\beta \\
 a_{44} &= G_{11}\alpha^2 + G_{66}\beta^2 + F_{55} \\
 a_{45} &= (G_{12} + G_{66})\alpha\beta \\
 a_{55} &= F_{44} + G_{66}\alpha^2 + G_{22}\beta^2
 \end{aligned} \tag{24}$$

Avec $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$

Pour la solution non triviale de l'équation (22), le déterminant suivant doit être nul :

$$\|[K] - \omega^2[M]\| = \{0\} \tag{25}$$

L'équation (25) donne les fréquences naturelles d'une plaque fonctionnellement graduée (FGM) reposant sur une fondation élastique.

3. Résultats et discussion

Dans cette partie, l'analyse de la vibration libre des plaques FG reposant sur des fondations élastiques est examinée en utilisant la présente méthode de déformation de cisaillement. La solution de Navier est adoptée. Le coefficient de poisson est fixé à $\nu=0,3$.

En premier lieu une étude comparative en confrontant les résultats de la présente méthode avec ceux de la littérature. En deuxième lieu, une étude paramétrique sera présentée pour souligner les effets des différents facteurs, notamment la porosité, sur la réponse en termes de fréquence naturelle de la plaque FGM sur assise élastique. Pour cela, les propriétés matérielles utilisées dans cette étude sont :

- Métal (Aluminium, AL): $E_M = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,3$; $\rho_M = 2\,702 \text{ Kg/m}^3$.
- Céramique (Alumine, Al_2O_3): $E_C = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,3$; $\rho_C = 3\,800 \text{ Kg/m}^3$.
- Céramique (Zirconia, ZrO_2): $E_C = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,3$; $\rho_C = 5\,700 \text{ Kg/m}^3$.

Dans tout les exemples, les paramètres de fondation sont présentés sous forme adimensionnelle : $K_0 = k_0 a^4/D$ et $K_1 = k_1 a^2/D$ avec $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, D étant la rigidité flexionnelle de la plaque.

Pour faciliter les calculs, les fréquences adimensionnelles suivantes seront utilisées dans les exemples numériques suivant :

$$\hat{\beta} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_C}{E_C}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_C}{E_C}}, \quad \bar{\beta} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{26}$$

3.1. Validation des résultats

Afin de valider le présent modèle, une série de comparaison des résultats du présent modèle avec ceux de Mouaici et al. [35] est présentée dans ce qui suit :

- Dans le tableau 1, une comparaison des fréquences fondamentales d'une plaque carrée Al/ZrO₂ pour les deux distributions de la porosité. Les fréquences obtenues à partir de la deuxième distribution sont en parfait accord pour les deux cas $\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,2$ et ce quelque soit la valeur du rapport a/h . Il est rappelé que dans les travaux de Mouaici et al. [35], le cas de $\alpha = 0$ correspond à une plaque parfaite (sans porosité).
- Dans le tableau 2 une comparaison des fréquences fondamentales d'une plaque carrée Al/Al₂O₃ est présentée pour trois modes de vibration. Là aussi les résultats sont en grande concordance avec ceux de Mouaici et al. [35] notamment la deuxième distribution avec le cas où $\alpha = 0,2$.
- Dans le tableau 3, autre comparaison est exposée celle des fréquences fondamentales d'une plaque rectangulaire Al/Al₂O₃ ($b = 2a$). Le même constat est observé. C'est-à-dire, un excellent accord entre les résultats donnés par le présent modèle et ceux de la littérature est à constater.

Il est à signaler que, pour des raisons de validation, les résultats présentés dans les trois tableaux sont obtenus pour une plaque sans fondation élastique. Dans ce qui précède, et après les différentes comparaisons des résultats, nous pouvons dire que la présente méthode est fiable pour l'étude des plaques présentant des défauts de fabrication à savoir la porosité.

3.2. Etude paramétrique

Sur la figure 01, on représente la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur « a/h » pour les deux distributions de la porosité. On constate une rapide variation de la fréquence pour les faibles valeurs du rapport a/h (c'est-à-dire pour $a/h < 20$) là où la plaque est considérée comme épaisse. Dépassant ce rapport, les fréquences conservent une allure plus au moins constante et ce quelle que soit la distribution retenue. En plus, il est à remarquer que la distribution (1) de porosité donne des valeurs supérieures relativement à la deuxième.

Dans la figure 02 on étudie variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique a/b pour les deux distributions de la porosité. L'augmentation du dit rapport fait accroître la fréquence adimensionnelle. La variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique « a/b » pour différentes valeurs du paramètre de Winkler pour les deux distributions est représentée sur la figure 03. En plus du constat mentionné ci-dessus qui stipule que l'augmentation du rapport « a/b » fait augmenter la fréquence adimensionnelle, on remarque que le paramètre de Winkler a peu d'influence sur la variation de la fréquence. Aussi ; à partir du rapport $a/b = 2,5$; ce paramètre n'a pratiquement aucun effet sur les fréquences et ce pour les deux distributions de la porosité. Sur la figure 04, on présente la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique « a/b » pour différentes valeurs du paramètre de Pasternak. Quelque soit la distribution retenue, l'accroissement des valeurs du rapport « a/b » fait accroître celles des fréquences. En plus, l'augmentation des valeurs du paramètre de Pasternak fait augmenter les fréquences.

Tableau 1

Comparaison des fréquences fondamentales $\bar{\beta}$ d'une plaque carrée Al/ZrO₂ avec de Mouiaici et al. [35]

Théorie	Porosité	$P=1$		
		$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=20$
Mouaici et al.	$\alpha = 0$	0,2276	0,0618	0,0158
	$\alpha = 0,1$	0,2258	0,0612	0,0156
	$\alpha = 0,2$	0,2231	0,0604	0,0154
Présente méthode	Distribution 1	0,2531	0,0710	0,0184
	Distribution 2	0,2259	0,0615	0,0157

Tableau 2
 Comparaison des fréquences naturelles $\hat{\beta}$ d'une plaque carrée Al/Al₂O₃ avec de Mouiaici et al. [35]

Mode (m,n)	Théorie	porosité	P=1		
			a/h=5	a/h=10	a/h=20
(1,1)	Mouaici et al.	$\alpha = 0$	0,1631	0,0441	0,0113
		$\alpha = 0,1$	0,1599	0,0432	0,0110
		$\alpha = 0,2$	0,1552	0,0418	0,0106
	Présente méthode	Distribution 1	0,1842	0,0525	0,0136
		Distribution 2	0,1494	0,0405	0,0103
	(1,2)	Mouaici et al.	$\alpha = 0$	0,3606	0,1059
$\alpha = 0,1$			0,3544	0,1037	0,0273
$\alpha = 0,2$			0,3453	0,1006	0,0264
Présente méthode		Distribution 1	0,3839	0,1223	0,0334
		Distribution 2	0,3298	0,0970	0,0256
(2,2)		Mouaici et al.	$\alpha = 0$	0,5253	0,1631
	$\alpha = 0,1$		0,5171	0,1599	0,0432
	$\alpha = 0,2$		0,5050	0,1552	0,0418
	Présente méthode	Distribution 1	0,5396	0,1842	0,0525
		Distribution 2	0,4801	0,1494	0,0405

Tableau 3
 Comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque rectangulaire Al/Al₂O₃ avec de Mouiaici et al. [35]

Mode (m,n)	Théorie	porosité	P=1	
			a/h=5	a/h=10
(1,1)	Mouaici et al.	$\alpha = 0$	2,6476	2,7937
		$\alpha = 0,1$	2,5934	2,7328
		$\alpha = 0,2$	2,5150	2,6452
	Présente méthode	Distribution 1	3,0593	3,3493
		Distribution 2	2,4264	2,5626
	(1,2)	Mouaici et al.	$\alpha = 0$	4,0782
$\alpha = 0,1$			3,9982	4,3243
$\alpha = 0,2$			3,8821	4,1875
Présente méthode		Distribution 1	4,6073	5,2539
		Distribution 2	3,7354	4,0529
(1,3)		Mouaici et al.	$\alpha = 0$	6,2664
	$\alpha = 0,1$		6,1508	6,9033
	$\alpha = 0,2$		5,9821	6,6891
	Présente méthode	Distribution 1	6,8756	8,2772
		Distribution 2	5,7355	6,4650
	(2,1)	Mouaici et al. (2016)	$\alpha = 0$	7,8762
$\alpha = 0,1$			7,7369	8,9035
$\alpha = 0,2$			7,5330	8,6331
Présente méthode		Distribution 1	8,4843	10,5758
		Distribution 2	7,2057	8,3351

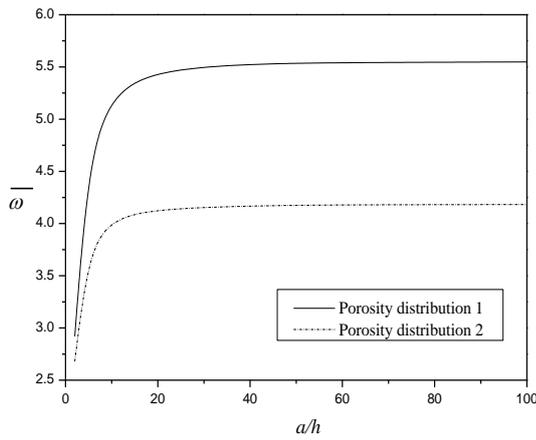


Figure 2 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur a/h pour les deux distributions de la porosité

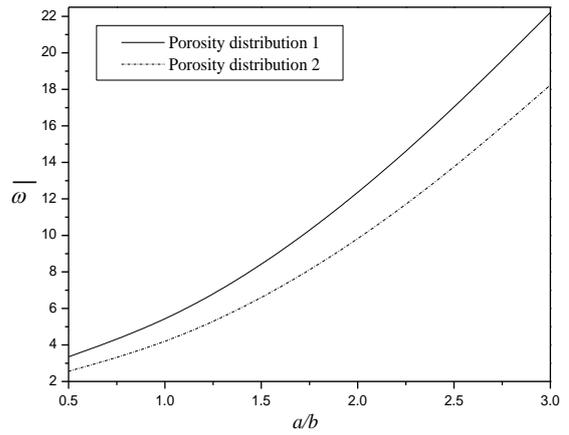


Figure 3 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique a/b pour les deux distributions de la porosité

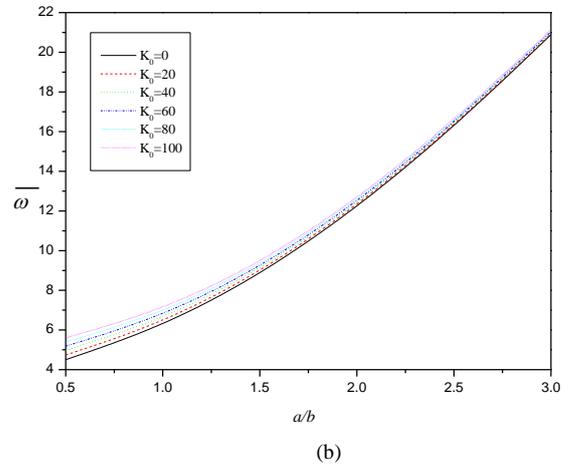
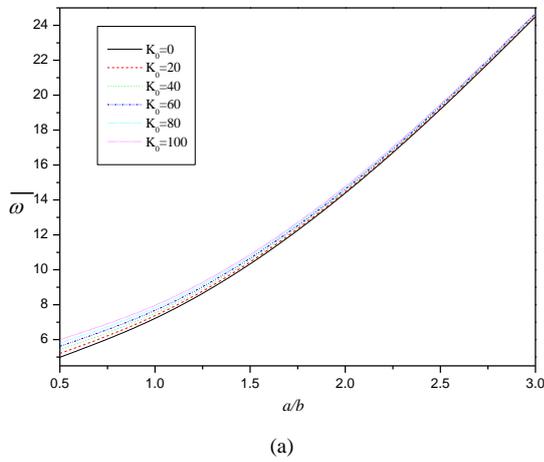


Figure 4 : Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique « a/b » pour différentes valeurs du paramètre de Winkler ($K_1=10, a/h=10$), (a) distribution 1, (b) distribution 2.

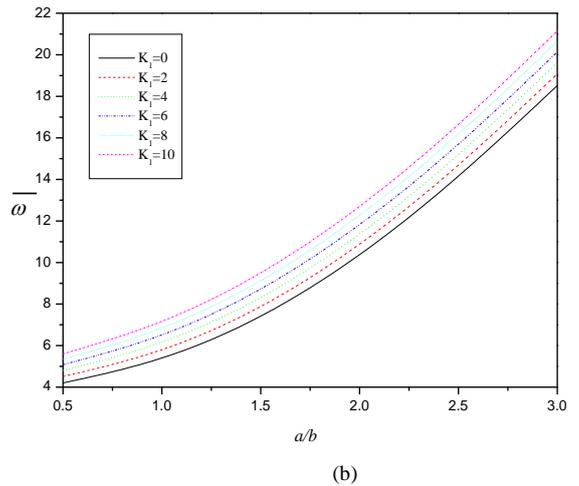
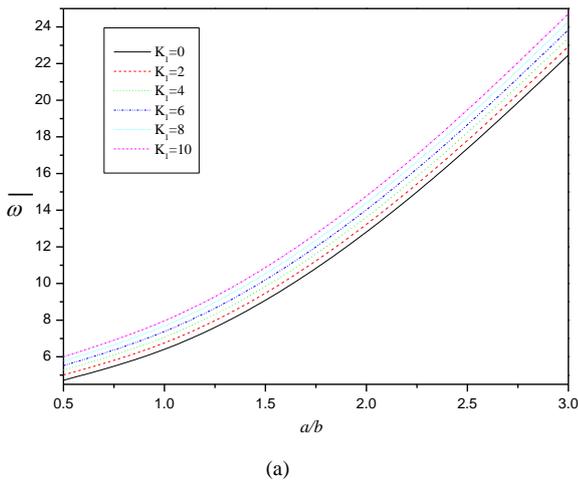


Figure 5. Variation de la fréquence adimensionnelle en fonction du rapport géométrique « a/b » pour différentes valeurs du paramètre de Pasternak ($K_0=100, a/h=10$), (a) distribution 1, (b) distribution 2.

4. Conclusion

Le présent travail a pour objectif de déterminer les caractéristiques dynamique des plaques poreuses en FGM à savoir les fréquences fondamentales compte tenu des effets de la déformation de cisaillement. Cet effet est pris en compte dans un modèle cinématique. Les caractéristiques mécaniques ont été formulées suivant une simple loi tenant compte des deux distributions de la porosité à travers l'épaisseur. L'introduction d'une fondation de type Pasternak a permis d'étudier son influence sur les fréquences des différents modes de vibrations des plaques. Il en résulte de cette étude que les paramètres k_0 et k_1 du modèle de Pasternak augmentent les fréquences fondamentales donnant lieu à un comportement plus rigide. Cette étude peut être considérée comme première étape pour l'étude des structures FGM présentant des défauts de fabrication à savoir la porosité.

Références

- [1] Woo J, Meguid SA, Ong LS, Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates, *J. Sound Vib.*, 289(3) (2006) 595–611.
- [2] Hu Y., Zhang X., Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate, *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 39(3) (2011) 367–77.
- [3] Chakraverty S., Pradhan K. K., Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions, *Aerosp. Sci. Techno.* 36 (2014) 132–56.
- [4] Chakraverty S., Pradhan K. K., Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz méthode, *Int. J. App. Mech.*, 6(4) (2014) 1450043.
- [5] Ruan M., Wang Z. M., Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material, *J. Vib. Control.* (2014): <http://dx.doi.org/10.1177/1077546314563967>.
- [6] Mindlin. R. D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 (1951) 31–38.
- [7] Chen C. S., Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate, *Compos. Struct.* 68(3) (2005) 295–302.
- [8] Alijani F., Bakhtiari-Nejad F., Amabili M., Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments, *Nonlinear Dyn.*, 66 (3) (2011) 251–70.
- [9] Fallah A., Aghdam M. M., Kargarnovin M. H., Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich méthode, *Arch. Appl. Mech.*, 83(2) (2013) 177–91.
- [10] Hosseini-Hashemi S., Fadaee M., Es'haghi M., A novel approach for in-plane/out-of-plane frequency analysis of functionally graded circular/annular plates, *Int. J. Mech. Sci.*, 52 (8) (2010) 1025–35.
- [11] Chen C.S., Hsu C. Y., Tzou G. J., Vibration and stability of functionally graded plates based on a higher-order deformation theory, *J. Reinf. Plast. Compos.*, 28 (10) (2009) 1215–34.
- [12] Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M., A Higher-Order Theory of Plate Deformation, Part 1: Homogeneous Plates, Part 2: Laminate plates, *ASME Journal of Applied Mechanics* 44 (1977) 663–676.
- [13] Jha D. K., Kant T., Singh R. K., A critical review of recent research on functionally graded plates, *Compos. Struct.* 96 (2013) 833–49.
- [14] Kant T. and Manjunatha B. S., An unsymmetric FRC laminate C0 finite element model with 12 degrees of freedom per node, *Engineering Computations* 5 (4) (1988) 300–308.
- [15] Hebali H., Tounsi A., Houari M. S. A., Bessaim A. and Adda Bedia E. A., New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *J. Eng. Mech., ASCE* 140 (2014) 374–383.
- [16] Hamidi A., Houari M. S. A., Mahmoud S. R. and Tounsi A., A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates, *Steel Compos. Struct.*, 18 (1) (2015) 235–253.
- [17] Attia A., Tounsi A., Adda Bedia E. A. and Mahmoud S. R., Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories, *Steel Compos. Struct.*, 18 (1) (2015) 187–212.
- [18] Khalfi Y., Houari M. S. A. and Tounsi A., A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation, *Int. J. Comput. Meth.* 11 (5) (2015) 135007.
- [19] Draiche, K., Tounsi, A. and Khalfi, Y., A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass, *Steel Compos. Struct.*, 17 (1) (2014) 69–81.
- [20] Nedri K., El Meiche N. and Tounsi A., Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory, *Mech. Compos. Mater.*, 49 (6) (2014) 641–650.
- [21] Mahi A., Adda Bedia E. A. and Tounsi A., A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates, *Appl. Math. Model.* 2015. (in Press)
- [22] Benachour A., Daouadji Tahar H., Ait Atmane H., Tounsi A. and Meftah S. A., A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient, *Compos. Part B*, 42 (2011) 1386–1394.
- [23] Shimpi R. P., Refined plate theory and its variants, *AIAA Journal* (2002) 137–146.
- [24] Merdaci S., Tounsi A., Houari M. S. A., Mechab I., Hebali H., Benyoucef S., Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates, *Arch Appl Mech*, 81 (11) (2011) 1507–1522
- [25] Ameer M., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E. A., A New Trigonometric Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates Resting on Elastic Foundations, *KSCCE Journal of Civil Engineering*, 15 (8) (2011) 1405–1414.
- [26] Tounsi A., Houari M. S. A., Benyoucef S., Adda Bedia E. A., A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aerosp. Sci. Technol.*, 24 (2013) 209–220.
- [27] Mohamed Z., Tounsi A., Houari M. S. A., Adda Bedia E. A., O. Anwar Bég, Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory” *Aerospace Science and Technology*, 34 (2014) 24–34.
- [28] Zhu J., Lai Z., Yin Z., Jeon J. And Lee S., Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy, *Mater. Chem. Phys.*, 68 (2001) 130–135.
- [29] Wattanasakulpong N. And Ungbhakorn V., Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerosp.Sci.Technol.*, 32(1) (2014) 111–120.
- [30] Magnucka-Blandzi E., Magnucki K., Effective design of a sandwich beam with a metal foam core, *Thin-Walled Struct.* 45 (4) (2007) 432–8.
- [31] Biot M., Theory of buckling of a porous slab and its thermoelastic analogy., *J. Appl. Mech.* 31(2) (1964) 194–8.
- [32] Detournay E, Cheng A. H. D., Fundamentals of poroelasticity, Chapter 5, *Comprehensive rock engineering: principles, practice and projects*, Vol. 2. Oxford (UK): Pergamon Press; 1993.
- [33] Jabbari M, Mojahedin A, Khorshidvand A, Eslami M., Buckling analysis of a functionally graded thin circular plate made of saturated porous materials, *J. Eng. Mech.*, 140 (2) (2014) 287–95.
- [34] Ait Yahia S., Ait Atmane H., Houari M. S. A. and Tounsi A., Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories, *Struct. Eng. Mech.*, 53(6) (2015) 1143–1165.
- [35] Mouaici F., Benyoucef S., Ait Atmane H., and Tounsi A., Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory, *Wind and Structures*, 22 (4) (2016) 429–454.

- [36] Chen D., Yang J., Kitipornchai S., Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded beam, *Compos. Struct.*, 133 (2015) 54-61
 - [37] Gibson L. J., Ashby M., The mechanics of three-dimensional cellular materials, *Proce. R. Soc. London A: Math Phys Eng. Sci.* 1982; 382 (1782) : 43–59.
 - [38] Choi J., Lakes R., Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio, *Int. J. Mech. Sci.* 37 (1) (1995) 51–9.
-