
Soumis le : 12 Novembre 2013

Forme révisée acceptée le : 15 Juillet 2014

Email de l'auteur correspondant :

daouadjitah@yahoo.fr

Nature & Technology

Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM

Rabia Benferhat^b, Tahar Hassaine Daouadji^{a, c}, Mohamed Said Mansour^b, Abdelaziz Hadj Henni^{a, c}

(a) Département de Génie Civil, Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, 14000 Tiaret, Algérie.

(b) Laboratoire de Géo matériaux, faculté de Génie Civil, Université Hassiba Benbouali Chlef, Algérie.

(c) Laboratoire des Matériaux & Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbès, Algérie.

E- mail address: daouadjitah@yahoo.fr , daouadjitahar@gmail.com Tel: 00 213 46 42 93 77 Fax: 00 213 46 42 87 38

Résumé:

Ce travail porte sur l'analyse du comportement mécanique à la flexion d'une plaque sandwich rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotés en matériaux à gradient de propriétés (FGM), soumise à un chargement statique transverse. La théorie d'ordre élevé est utilisée dans ce travail, Les modèles développés sont variationnellement cohérente, ont une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, ne nécessitent pas de correction au facteur de cisaillement, et donne lieu à des variations des contraintes de cisaillement transversales telles que le cisaillement transversal varie paraboliquement à travers l'épaisseur de cisaillement et satisfait les conditions de surface sans les contraintes. On suppose que les propriétés matérielles de la plaque FGM changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction volumique du matériau constitutif suivant une fonction de loi de puissance. Les équations d'équilibre sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels. Les expressions mathématiques de la flèche, les contraintes normales et tangentielles sont obtenues en utilisant l'approche de Navier pour résoudre le système des équations d'équilibre. L'influence de chargement mécanique et le changement du paramètre du matériau sur comportement mécanique de la plaque FGM est représenté, la validation de la présente théorie est étudiée par comparaison avec d'autres résultats issus des théories d'ordre élevé dans la littérature. Nous pouvons dire que la théorie proposée est précis et simple à résoudre le comportement statique des plaques sandwiches en FGM.

Mots-clés: Matériaux à gradient variable, Plaque sandwich, cisaillement et déformation, théories d'ordre élevé, solution de Navier.

Abstract:

This work focuses on the analysis of the mechanical behavior in bending of a rectangular sandwich plate simply supported on all four sides in gradient materials properties (FGM), subject to a transverse static loading. The high-order theory is used in this work, the developed patterns are consistent variationally, have a strong similarity to the classical theory of plates in many respects, require no shear correction factor, and gives rise to changes transverse shear stresses such that the transverse shear varies parabolically across the thickness shear and surface conditions satisfied without constraints. It is assumed that the material properties of the FGM plate change continuously across the thickness, according to the volume fraction of the material following a power law function. The equilibrium equations are obtained by applying the principle of virtual work. The mathematical expressions of the arrow, normal and tangential stresses are obtained using the approach for solving the Navier system of equilibrium equations. The influence of mechanical loading and changing the setting of the mechanical behavior of the material on the FGM plate is shown, the validation of this theory is studied in comparison with other results from the high-order theories in the literature. We can say that the proposed theory is accurate and simple to solve the static behavior of sandwich plates with FGM.

Keywords: Materials with variable gradient, sandwich plate, and shear deformation theories high-order solution of Navier.

1. Introduction:

Ces dernières années, les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials, FGM) ont attiré l'attention considérable dans des nombreuses les applications dans l'ingénierie. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM), un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes résiduelles thermiques [1]. Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Nino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [2]. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc ... [3]. Certains inconvénients des théories classiques des plaques composites multicouches, résultant du brusque changement de propriétés matériel aux interfaces entre les couches adjacentes ont été surmontés, tels que la concentration des contraintes résiduelles, délaminage, fissuration de la matrice. Par conséquent, cette catégorie des plaques FGM peuvent être plus stable que les théories classiques des plaques composites multicouches généralement appliquée avec succès dans diverses industries. Ainsi le développement de méthodologies théoriques et la modélisation numérique pour l'analyse de cette classe des plaques FGM a attiré une attention considérable des chercheurs [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Dans ce papier, une théorie raffinée de déformation de cisaillement impliquant seulement quatre variables,

contrairement aux théories du premier ordre [3] ou d'ordre élevé de cinq variables [6, 7, 8, 9] est présentée pour l'analyse des plaques sandwiches reposant simplement sur quatre appuis [10]. La nouveauté de cette théorie est qu'elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et elle satisfait la nullité des contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Elle a une grande similarité avec la théorie classique des plaques CPT dans certains aspects tels que les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

2. Théorie raffinée des plaques sandwiches FGM

2.1 Configuration géométrique

Considérons le cas d'une plaque sandwich rectangulaire en FGM, d'épaisseur uniforme composée de trois couches hétérogènes rapportée à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme montré en figure 1. Les faces supérieure et inférieure se situent à $z = \pm h/2$, et les cotés de la plaque sont parallèles aux axes x et y. La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, nommées, "Couche 1", "Couche 2", et "Couche 3" de la face inférieure à celle supérieure de la plaque. Les coordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et la face supérieure sont dénotés par $h_1 = -h/2$, h_2 , h_3 , $h_4 = h/2$, respectivement.

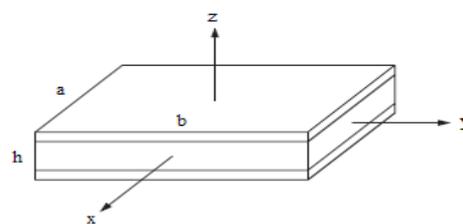


Figure 1 : Géométrie d'une plaque sandwich rectangulaire FGM en coordonnées cartésiennes.

Le rapport d'épaisseur dans chaque couche du bas en haut est dénoté brièvement par les combinaisons de trois

chiffres "1-0-1", "2-1-2" comme il est montré en figure 2, deux types (a) et (b) sont considérés dans cette présente étude :

Type (a): faces externes en FGM et cœur homogène

Type (b): faces externes homogènes et cœur en FGM

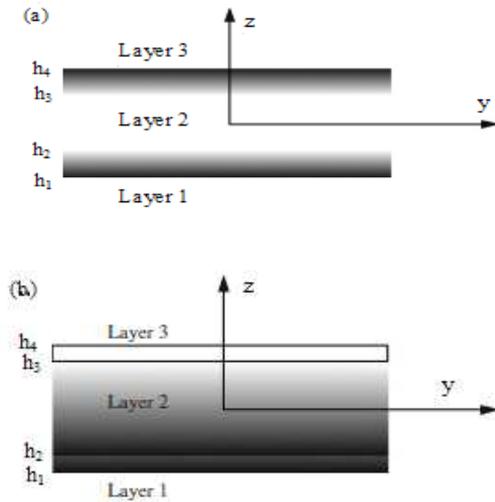


Figure 2: variation matérielle suivant l'épaisseur de la plaque sandwich: (a) peaux en FGM et cœur homogène (b) peaux homogène et cœur en FGM.

2.2. Propriétés matérielles:

Les propriétés du FGM varient continuellement en changeant la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur. Une fonction de loi de puissance est utilisée couramment pour décrire cette variation de propriétés matérielle. Les structures sandwiches FGM sont composées de deux types de lois de puissance mentionnés précédemment et qui sont discutés comme suit.

Type (a): structure sandwich à peaux P- FGM et à cœur homogène. La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (1a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (1b)$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (1c)$$

Type (b): structure sandwich à cœur P- FGM et à peaux homogènes. La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance suivant l'épaisseur :

$$V^{(1)} = 0, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (2a)$$

$$V^{(2)} = \left(\frac{z - h_2}{h_3 - h_2} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (2b)$$

$$V^{(3)} = 1, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (2c)$$

Où $V^{(n)}$, ($n=1,2,3$) dénote la fonction du fraction volumique de la couche n ; k est l'indice de la fraction volumique ($0 \leq k \leq +\infty$), qui indique la variation matérielle à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles effectives, tel que le module de Young E , et le coefficient de Poisson ν , peuvent être exprimés par la loi des mélanges [Marur 1999] [11] comme

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (3)$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective du FGM de la couche n . Pour le type (a), P_1 et P_2 sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et de même pour la couche 3 dépendant de la fraction volumique $V^{(n)}$, ($n=1,2,3$). Pour type B, P_1 et P_2 sont les propriétés des couches 3 et 1, respectivement.

Ces deux types de plaques sandwiches FGM seront discutés ci après dans les sections suivantes. Dans cette étude, on suppose que le coefficient de poisson est constant [Delale 1983] [12].

2.3. Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse W contient deux composantes de flexion w_b , et de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y .

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4)$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant les autres contraintes planes σ_x et σ_y .
- Les déplacements U dans la direction x et V dans la direction y sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s, \quad V = v + v_b + v_s \quad (5)$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées les mêmes déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être donné comme

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (6a)$$

À partir de l'état de déplacement de composantes u_s et v_s se dérivent les composantes de déformation γ_{xz} , γ_{yz} qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour u_s et v_s peuvent être donné comme:

$$u_s = \left[\frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x},$$

$$v_s = \left[\frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (6b)$$

2.4. Equations cinématique et constitutive

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations de 4 à 6 comme:

$$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (7)$$

$$V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y}$$

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'équation 7 soit

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \\ \epsilon_y &= \epsilon_y^0 + z k_y^b + f k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g \gamma_{xz}^s \\ \epsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Ou:

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad (9a)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad (9b)$$

$$\epsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \quad (9c)$$

$$k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (9d)$$

$$f = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{3}z\left(\frac{z}{h}\right)^2, \quad g = \frac{5}{4} - 5\left(\frac{z}{h}\right)^2 \quad (9e)$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10a)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (10b)$$

Ou $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. Utilisant les propriétés matérielles définies en équation 3, les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2},$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (11)$$

2.5. Equations gouvernantes

Les équations gouvernantes d'équilibre peuvent être exprimées en utilisant le principe des déplacements virtuels. le principe des travaux virtuels pour ce problème s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta W d\Omega = 0 \quad (12)$$

Ou Ω est la surface supérieure.

Substituant les équations 7, 8 et 10 dans l'équation 12 et par intégration à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation 12 peut être réécrite comme :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} q(\delta w_b + \delta w_s) d\Omega = 0 \quad (13)$$

Ou les efforts résultants N , M , et S sont définies par

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\ (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g dz \end{aligned} \quad (14)$$

Substituant l'équation 10 dans l'équation 14, les efforts résultants sont donnés comme

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad (15a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (15b)$$

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t,$$

$$M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (16a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\},$$

$$k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad (16b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad (16c)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (16d)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix},$$

$$D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (16d)$$

$$H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}$$

Ou A_{ij} , B_{ij} , etc., sont les rigidités de la plaque, définies par

$$\begin{aligned} \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\} Q_j dz, \quad (i, j=1,2,6) \\ B_{ij}^s &= \frac{1}{4} B_{ij} + \frac{5}{3h^2} E_{ij}, \quad (i, j=1,2,6) \\ D_{ij}^s &= \frac{1}{4} D_{ij} + \frac{5}{3h^2} F_{ij}, \quad (i, j=1,2,6) \\ H_{ij}^s &= \frac{1}{16} D_{ij} - \frac{5}{6h^2} F_{ij} + \frac{25}{9h^4} H_{ij}, \quad (i, j=1,2,6) \\ \{A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}\} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \{1, z^2, z^4\} Q_j dz, \quad (i, j=4,5) \\ A_{ij}^s &= \frac{25}{16} A_{ij} - \frac{25}{6h^2} D_{ij} + \frac{25}{h^4} F_{ij}, \quad (i, j=4,5) \end{aligned} \quad (17)$$

Les équations gouvernantes peuvent être dérivées à partir de l'équation 13 par intégration des gradients de déplacements par partie et mettant les coefficients δu , δv , δw_b , et δw_s égal à zéro séparément. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées avec la présente RPT pour la plaque sandwich FGM

$$\begin{aligned} \delta u: \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v: \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b: \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta w_s: \quad \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Substituant l'équation 15 dans l'équation 18, nous

$$[L]\{\delta\} = \{f\}, \quad (19)$$

Ou $\{\delta\} = \{u, v, w_b, w_s\}^t$, $\{f\} = \{0, 0, q, q\}^t$ est le vecteur des forces généralisées, et $[L]$ est la matrice symétrique d'opérateurs différentiels,

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} d_{11} + A_{66} d_{22}, \\ L_{12} &= (A_{12} + A_{66}) d_{12}, \\ L_{13} &= -B_{11} d_{111} - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122}, \\ L_{14} &= -B_{11}^s d_{111} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122}, \\ L_{22} &= A_{22} d_{22} + A_{66} d_{11}, \\ L_{23} &= -B_{22} d_{222} - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112}, \\ L_{24} &= -B_{22}^s d_{222} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112}, \\ L_{33} &= D_{11} d_{1111} + 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} + D_{22} d_{2222}, \\ L_{34} &= D_{11}^s d_{1111} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} + D_{22}^s d_{2222}, \\ L_{44} &= H_{11}^s d_{1111} + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} + H_{22}^s d_{2222} - A_{55}^s d_{11} - A_{44}^s d_{22}. \end{aligned} \quad (20)$$

Auquel d_{ij} , d_{ijl} , et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \\ d_{ijlm} &= \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \end{aligned} \quad (21)$$

2.6. Solutions analytiques pour plaques sandwiches FGM

Les plaques sandwiches sont généralement classées en accord avec le type de support utilisé. Ici nous

nous sommes intéressés aux solutions analytiques de l'équation 19 pour une plaque sandwich FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords de la plaque.

$$v(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \quad (22a)$$

$$v(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \quad (22b)$$

$$N_x(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \quad (22c)$$

$$u(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \quad (22d)$$

$$u(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \quad (22e)$$

$$N_y(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_y(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0 \quad (22f)$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté la force extérieure pour le cas d'une charge sinusoïdale comme :

$$q(x, y) = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad (23)$$

Ou $\lambda = \pi/a$ et $\mu = \pi/b$, et q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

En solution de Navier, nous assumons la forme de solution suivante pour (u, v, w_b, w_s) qui doivent satisfaire aux conditions imposées,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{U} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \bar{V} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ \bar{W}_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \bar{W}_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Ou \bar{U} , \bar{V} , \bar{W}_b , et \bar{W}_s sont des paramètres qui se déterminent à partir des conditions de l'équation 24 satisfaisantes à l'équation de base 19. D'où on obtient l'équation d'opérateur suivante:

$$[K][\Delta] = \{F\} \quad (25)$$

Ou $\{\Delta\}$ et $\{F\}$ sont des vectrices colonnes

$$\{\Delta\} = \{\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}_b, \bar{W}_s\} \\ \{F\}^T = \{0, 0, q_0, q_0\} \quad (26)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

Avec:

$$a_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2; \quad a_{12} = \lambda\mu(A_{12} + A_{66});$$

$$a_{13} = -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2]$$

$$a_{14} = -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2];$$

$$a_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2;$$

$$a_{23} = -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \quad (28)$$

$$a_{24} = -\mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2];$$

$$a_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4$$

$$a_{34} = D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4;$$

$$a_{44} = H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2$$

3. Résultats numériques et discussion

Dans cette étude, l'analyse statique des plaques FGM simplement appuyées par la théorie raffinée des plaques est effectuée pour discussion. Les solutions pour l'analyse des équations de Navier en flexion des plaques FGM sont présentées par la résolution de l'équation 25. L'analyse statique est réalisée pour deux combinaisons de métal et de céramique. La première série des matériaux choisis est

en aluminium et d'alumina. La deuxième combinaison de matériaux se composait d'aluminium et de zirconium. Les propriétés du matériau sont les suivantes:

- Céramique (P₁: Zircon, ZrO₂): $E_c = 151 \text{ GPa}$;
- Céramique (P₁: Alumina, Al₂O₃): $E_c = 380 \text{ GPa}$;
- Metal (P₂: Aluminium, Al): $E_m = 70 \text{ GPa}$;

Les résultats numériques sont présentés en termes de la déflexion et de contraintes non dimensionnelles. Les variations des paramètres non dimensionnels utilisés sont

$$\text{Déflexion central } \bar{W} : \bar{W} = \frac{10hE_0}{q_0a^2} W\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad (29)$$

$$\text{Contrainte axiale } \bar{\sigma}_x : \bar{\sigma}_x = \frac{10h}{q_0a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right), \quad (30)$$

$$\text{Contrainte de cisaillement } \bar{\tau}_{xz} : \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right) \quad (31)$$

$E_0 = 1 \text{ GPa}$. Il est suppose que la plaque soit constituée de l'aluminium – zircon FGM. Nous prenons aussi le facteur de correction de cisaillement $K = 5/6$ en FSDPT.

Afin de prouver la validité de la théorie actuelle, les résultats ont été obtenus pour les plaques pleinement FGM et comparés avec ceux déjà existants dans la littérature (Zenkour 2006 [13], Matsunaga 2009 [14]). Pour la vérification, les résultats obtenus pour les plaques sandwichs FGM utilisant la présente RPT sont comparés avec d'autres théories existantes dans la littérature tels que CPT, FSDPT, et les théories de déformation de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) tels que: TSDPT [15] et la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale SSDPT [13] comme indiqué dans le tableau 1.

Le tableau 2 présente les déflexions et les contraintes d'une plaque carrée FGM avec ($a/h=10$) pour différentes valeurs k de la loi de puissance. On peut voir que les résultats obtenus en utilisant la présente RPT sont identiques à ceux de Zenkour [Zenkour 2006]. Le tableau 3 présente la déflexion centrale et la contrainte transversale de cisaillement de la plaque carrée simplement appuyée FGM. Les résultats sont comparés

avec ceux de la théorie d'ordre supérieur de Matsunaga 2D [Matsunaga 2009]. On peut voir que les résultats concordent bien avec ceux rapportés par Matsunaga [14].

Les résultats numériques de la plaque carrée simplement appuyée en loi de puissance de type (a) sont présentés dans les tableaux 4, 5 et 6. Ces tableaux montrent le cas du cœur rigide homogène dans lequel les modules de Young de la couche 1 sont $E_c = 151 \text{ GPa}$ (P1, zircons) à la face supérieure et $E_m = 70 \text{ GPa}$ (P2, aluminium) à la face inférieure. Les résultats sont considérés pour $k=0, 1, 2, 5$ et 10 et pour différents types de plaques sandwichs. On peut voir que les résultats obtenus par TSDPT et la présente RPT sont identiques.

Le tableau 4 montre que l'effet de déformation de cisaillement porte une augmentation de la déflexion. La différence entre les théories de déformation de cisaillement est négligeable pour les plaques entièrement en céramique ($k=0$). Il est à noter que la contrainte axiale en CPT est identique avec celle en FSDPT et si le tableau 5 n'a pas de résultats de la CPT. La différence entre plusieurs types de plaques sandwichs est négligeable pour les plaques entièrement en céramique ($k=0$). La contrainte axiale est très sensible à la variation de k . Le tableau 6 indique que les contraintes de cisaillement transverse selon FSDPT peuvent être incomparables avec celles obtenues par les autres théories. La différence entre plusieurs types de plaques sandwichs est négligeable pour les plaques entièrement en céramique ($k=0$). Les valeurs des contraintes de cisaillement diminuent lorsque k diminue pour les plaques FGM avec cœur rigide et homogène.

En général, les plaques entièrement en céramique donnent la plus petite des flèches et des contraintes de cisaillement et la plus grande des contraintes axiales. Comme l'exposant de la fraction volumique augmente pour les plaques FGM, la déflexion, la contrainte axiale et la contrainte de cisaillement augmentent. Bien que ces résultats diminuent lorsque l'épaisseur du cœur, par

rapport à l'épaisseur totale de la plaque, augmente. En fait, la plaque FGM non –symétrique (2-2-1) possède la plus petite des contraintes axiales.

Les comparaisons des déflexions maximales sont données dans le tableau 7 pour plaque sandwich FGM avec cœur rigide et homogène et avec divers indices de la fraction volumique. On peut observer que les résultats obtenus par la présente RPT sont identiques à ceux de TSDPT. En outre, la déflexion sera diminuée lorsque le rapport (a/b) augmente.

Les déflexions centrales dues à la flexion (\bar{w}_b) et de cisaillement (\bar{w}_s) ont été calculées, puis additionnées

pour obtenir les déflexions totales (\bar{W}). Ces résultats sont présentés dans le Tableau 8 pour les plaques carrés FGM en loi de puissance de type (a) avec homogénéité du cœur souple dans lequel le module de Young de la couche 1 est $E_m = 70$ GPa (P_1 , aluminium) à la face supérieure et $E_c = 151$ GPa (P_2 , zircon) à la face inférieure. Le niveau d'erreur augmente avec la diminution du rapport a/h . Ainsi, l'effet de cisaillement est plus prononcé pour les faibles rapports a/h. Les résultats soulignent également la grande influence jouée par les indices de la fraction volumique k sur les déflexions analysées.

Tableau 1 : Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques

Theories	Hypothèses de déplacements tri dimensionnels
CPT	$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x},$ $V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y},$ $W(x, y, z) = w(x, y).$ (32)
FSDPT	$U(x, y, z) = u(x, y) + z \phi_x(x, y),$ $V(x, y, z) = v(x, y) + z \phi_y(x, y),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$ (33)
TSDPT	$U(x, y, z) = u(x, y) + z \phi_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$ $V(x, y, z) = v(x, y) + z \phi_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$ (34)
SSDPT	$U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_x(x, y),$ $V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_y(x, y),$ $W(x, y, z) = w(x, y).$ (35)

Tableau 2 : Comparaison des déflexions et les contraintes non dimensionnels dans les plaques FGM (Al/ Al₂O₃) soumises à une charge sinusoïdale.

k	\bar{W}		$\bar{\sigma}_x$		$\bar{\tau}_{xz}$	
	SSDPT[13]	Présente Théorie	SSDPT [13]	Présente Théorie	SSDPT [13]	Présente Théorie
Céramique	0.2960	0.2961	1.9955	1.9943	0.2462	0.2386

1	0.5889	0.5890	3.0870	3.0850	0.2462	0.2386
2	0.7573	0.7573	3.6094	3.6067	0.2265	0.2186
3	0.8377	0.8375	3.8742	3.8709	0.2107	0.2024
4	0.8819	0.8816	4.0693	4.0655	0.2029	0.1944
5	0.9118	0.9112	4.2488	4.2447	0.2017	0.1930
6	0.9356	0.9352	4.4244	4.4201	0.2041	0.1954
7	0.9562	0.9557	4.5971	4.5928	0.2081	0.1994
8	0.9750	0.9743	4.7661	4.7619	0.2124	0.2037
9	0.9925	0.9922	4.9303	4.9261	0.2164	0.2078
10	1.0089	1.0085	5.0890	5.0849	0.2198	0.2114
Metal	1.6070	1.6074	1.9955	1.9943	0.2462	0.2386

Tableau 3 : Comparaison des déflexions et les contraintes de cisaillement transverse non dimensionnel dans les plaques FGM (Al/ Al₂O₃) soumises à une charge sinusoïdale.

a/h	k	\bar{W}		$\bar{\tau}_{xz}$	
		Matsunaga [14]	Présente Théorie	Matsunaga [14]	Présente Théorie
5	0	0.2098	0.2146	0.1186	0.1190
	0.5	0.3179	0.3235	0.1209	0.1217
	1	0.4139	0.4180	0.1184	0.1190
	4	0.6511	0.6506	0.1076	0.0969
	10	0.7624	0.7672	0.1078	0.1053
10	0	0.2943	0.2961	0.2383	0.2385
	0.5	0.4504	0.4537	0.2431	0.2439
	1	0.5875	0.5890	0.2383	0.2385
	4	0.8823	0.8816	0.2175	0.1943
	10	0.1007	1.0085	0.2167	0.2113

Tableau 4 : Comparaisons de la déflexion non dimensionnelle \bar{W} des plaques sandwichs carrées FGM en loi de puissance simplement appuyées avec d'autres théories ($a/h=10$).

k	Théories	\bar{W}				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606
	SSDPT	0.19605	0.19605	0.19605	0.19605	0.19605
	TSDPT	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606	0.19606
	FSDPT	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607	0.19607
	CPT	0.18560	0.18560	0.18560	0.18560	0.18560
1	Présente	0.32358	0.30631	0.29199	0.28085	0.27094
	SSDPT	0.32349	0.30624	0.29194	0.28082	0.27093
	TSDPT	0.32358	0.30632	0.29199	0.28085	0.27094
	FSDPT	0.32484	0.30750	0.29301	0.28168	0.27167
	CPT	0.31054	0.29417	0.28026	0.26920	0.25958
2	Présente	0.37334	0.35231	0.33288	0.31616	0.30263
	SSDPT	0.37319	0.35218	0.33280	0.31611	0.30260
	TSDPT	0.37335	0.35231	0.33289	0.31617	0.30263
	FSDPT	0.37514	0.35408	0.33441	0.31738	0.30370

Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM

	CPT	0.35885	0.33942	0.32067	0.30405	0.29095
5	Présente	0.40927	0.39182	0.37144	0.34960	0.33480
	SSDPT	0.40905	0.39160	0.37128	0.34950	0.33474
	TSDPT	0.40927	0.39183	0.37145	0.34960	0.33480
	FSDPT	0.41120	0.39418	0.37356	0.35123	0.33631
	CPT	0.39227	0.37789	0.35865	0.33693	0.32283
10	Présente	0.41772	0.40407	0.38551	0.36212	0.34823
	SSDPT	0.41750	0.40376	0.38490	0.34916	0.34119
	TSDPT	0.41772	0.40407	0.38551	0.36215	0.34824
	FSDPT	0.41919	0.40657	0.38787	0.36395	0.34996
	CPT	0.39876	0.38941	0.37236	0.34915	0.33612

Tableau 5 : Comparaisons de la contrainte axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ des plaques sandwichs carrées FGM en loi de puissance simplement appuyées avec d'autres théories ($a/h=5$).

k	Theories	$\bar{\sigma}_x$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente	2.04985	2.04985	2.04985	2.04985	2.04985
	SSDPT	2.05452	2.05452	2.05452	2.05452	2.05452
	TSDPT	2.04985	2.04985	2.04985	2.04985	2.04985
	FSDPT	1.97576	1.97576	1.97576	1.97576	1.97576
1	Présente	1.57923	1.49587	1.42617	1.32062	1.32309
	SSDPT	1.58204	1.49859	1.42892	1.32342	1.32590
	TSDPT	1.57923	1.49587	1.42617	1.32062	1.32309
	FSDPT	1.53245	1.45167	1.38303	1.27749	1.28096
2	Présente	1.82167	1.72144	1.62748	1.47095	1.47988
	SSDPT	1.82450	1.72412	1.63025	1.47387	1.48283
	TSDPT	1.82167	1.72144	1.62748	1.47095	1.47988
	FSDPT	1.77085	1.67496	1.58242	1.42528	1.43580
5	Présente	1.99272	1.91302	1.81580	1.61181	1.63814
	SSDPT	1.99567	1.91547	1.81838	1.61477	1.64106
	TSDPT	1.99272	1.91302	1.81580	1.61181	1.63814
	FSDPT	1.93576	1.86479	1.76988	1.56401	1.59309
10	Présente	2.03036	1.97126	1.88377	1.66480	1.70383
	SSDPT	2.03360	1.97313	1.88147	1.61979	1.64851
	TSDPT	2.03036	1.97126	1.88376	1.66660	1.70417
	FSDPT	1.96780	1.92165	1.83754	1.61645	1.65844

Tableau 6 : Comparaisons de la contrainte de cisaillement transverse non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ des plaques sandwichs carrées FGM en loi de puissance simplement appuyées avec d'autres théories ($a/h=5$).

k	Theories	$\bar{\tau}_{xz}$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	Présente	0.23857	0.23857	0.23857	0.23857	0.23857
	SSDPT	0.24618	0.24618	0.24618	0.24618	0.24618
	TSDPT	0.23857	0.23857	0.23857	0.23857	0.23857
	FSDPT	0.19099	0.19099	0.19099	0.19099	0.19099
	Présente	0.29202	0.27104	0.26116	0.25950	0.25258
	SSDPT	0.29907	0.27774	0.26809	0.26680	0.26004

1	TSDPT	0.29203	0.27104	0.26117	0.25951	0.25258
	FSDPT	0.26099	0.24316	0.23257	0.22762	0.22057
2	Présente	0.32622	0.28838	0.27187	0.26939	0.25833
	SSDPT	0.33285	0.29422	0.27807	0.27627	0.26543
	TSDPT	0.32622	0.28838	0.27188	0.26939	0.25834
	FSDPT	0.29731	0.26752	0.25077	0.24316	0.23257
5	Présente	0.38634	0.31454	0.28642	0.28265	0.26512
	SSDPT	0.39370	0.31930	0.29150	0.28895	0.27153
	TSDPT	0.38634	0.31454	0.28643	0.28265	0.26512
	FSDPT	0.34538	0.29731	0.27206	0.26099	0.24596
10	Présente	0.43206	0.33242	0.29566	0.29083	0.26894
	SSDPT	0.44147	0.33644	0.29529	0.29671	0.27676
	TSDPT	0.43206	0.33242	0.29566	0.29080	0.26895
	FSDPT	0.37277	0.31316	0.28299	0.26998	0.25257

Tableau 7: Effet du rapport (a/b) sur la déflexion non dimensionnelle des plaques sandwiches FGM ($a/h=10$ et $k = 2$).

Schéma	Theories	\bar{W}				
		$a/b=1/3$	$a/b=0.5$	$a/b=1$	$a/b=1.5$	$a/b=2$
1-0-1	Présente	1.18877	0.94185	0.37335	0.14481	0.06321
	SSDPT	1.18849	0.94160	0.37319	0.14472	0.06315
	TSDPT	1.18877	0.94186	0.37335	0.14481	0.06321
	FSDPT	1.19200	0.94473	0.37514	0.14592	0.06393
	CPT	1.16267	0.91865	0.35885	0.13590	0.05742
2-1-2	Présente	1.12293	0.88954	0.35231	0.13647	0.05946
	SSDPT	1.12269	0.88933	0.35218	0.13639	0.05941
	TSDPT	1.12293	0.88955	0.35231	0.13647	0.05946
	FSDPT	1.12611	0.89237	0.35408	0.13756	0.06017
	CPT	1.09971	0.86891	0.33942	0.12854	0.05431
1-1-1	Présente	1.06096	0.84046	0.33288	0.12895	0.05619
	SSDPT	1.06080	0.84032	0.33280	0.12890	0.05615
	TSDPT	1.06096	0.84046	0.33289	0.12895	0.05619
	FSDPT	1.06369	0.84289	0.33441	0.12989	0.05680
	CPT	1.03895	0.82090	0.32067	0.12144	0.05131
2-2-1	Présente	1.00694	0.79776	0.31617	0.12260	0.05349
	SSDPT	1.00683	0.79767	0.31611	0.12256	0.05347
	TSDPT	1.00694	0.79776	0.31617	0.12260	0.05349
	FSDPT	1.00911	0.79969	0.31738	0.12334	0.05398
	CPT	0.98512	0.77837	0.30405	0.11514	0.04865
1-2-1	Présente	0.96371	0.76353	0.30263	0.11737	0.05122
	SSDPT	0.96366	0.76348	0.30260	0.11735	0.05121
	TSDPT	0.96371	0.76353	0.30263	0.11737	0.05122
	FSDPT	0.96563	0.76524	0.30370	0.10803	0.05165
	CPT	0.94269	0.74484	0.29095	0.11018	0.04655

Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM

Tableau 8: déflexion non dimensionnelle des plaques sandwiches carrées FGM avec effet de cisaillement

a/h	k	2-1-2			erreurs%
		\bar{w}_s	\bar{w}_b	\bar{W}	
2	0	0.02220	0.01601	0.03821	58.10
	2	0.01632	0.00790	0.02422	67.38
	5	0.01462	0.00755	0.02217	65.94
5	0	0.02251	0.10009	0.12261	18.36
	2	0.01663	0.05042	0.06705	24.80
	5	0.01488	0.04764	0.06252	23.80
10	0	0.02256	0.40037	0.42293	5.33
	2	0.02022	0.16675	0.18697	10.81
	5	0.01493	0.19078	0.20571	7.26
100	0	0.02258	40.03733	40.05991	0.0564
	2	0.01669	20.24568	20.26237	0.0824
	5	0.01494	19.08683	19.10177	0.0782

Les chiffres de 3 à 8 présentent quelques résultats numériques des plaques carrées FGM simplement appuyées en loi de puissance de type (a) en utilisant la présente RPT. Les figures 3 à 5 Considèrent le cas du cœur rigide et homogène dans lequel le module de Young de la couche 1 est $E_c = 151$ GPa (P_1 , zircon) à la face supérieure et $E_m = 70$ GPa (P_2 , aluminium) à la face inférieure. Les figures 6 et 8 examinent le cas du cœur souple et homogène dans lequel le module de Young de la couche 1 est $E_m = 70$ GPa (P_1 , aluminium) à la face supérieure et $E_c = 151$ GPa (P_2 , zircone) à la face inférieure.

La figure 3 montre la variation de la déflexion centrale en fonction des rapports a/h pour différents types de plaques symétriques FGM à cœur rigide et homogène. La déflexion de la plaque métallique est plus grande que celle de la plaque en céramique de la plus petite grandeur. Les déflexions des plaques sandwiches FGM augmentent quand $a/h \geq 5$. Toutes les plaques avec des propriétés intermédiaires subissent des valeurs intermédiaires correspondantes de la déflexion au centre. Ceci est prévu parce que la plaque métallique est moins rigide que celle en céramique.

La figure 4 contient les courbes de variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur de la plaque avec cœur rigide et homogène et pour $k= 0, 1$ et 2 . Sous l'application de la charge sinusoïdale, les contraintes sont de traction à la surface supérieure et de compression à la surface inférieure. Pour la plaque en céramique homogène ($k= 0$) on obtient le maximum de compression (traction) de contraintes à la surface inférieure (supérieure). Ce sont les surfaces riches en métaux pour les plaques FGM ($k= 1$ et 2). Notez que pour les différents exposants de la fraction volumique choisis, la plaque correspondante à $k= 2$ donne le maximum de compression (traction) de contraintes à la face inférieure (supérieure) de la couche 2 (cœur) (Figure 4a et 4c). Ce sont les surfaces riches en céramique dans lesquelles l'expérience sur les plaques en céramique montre le minimum de contraintes de traction ou de compression. La contrainte axiale pour la plaque en matériau pur (céramique) varie linéairement dans l'épaisseur. Cependant, la variation de cette contrainte n'est pas linéaire pour plaque FGM.

Dans la figure 5 nous avons tracé la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque avec Cœur rigide et homogène et pour $k=0,1$ et 2 . la valeur maximale se produit à un point sur le plan médian de la plaque et son amplitude pour les plaques

FGM est plus grande que celle d'une plaque en céramique homogène ($k=0$).

La figure 6 montre la variation de la déflexion centrale en fonction des rapports a/h pour différents types de plaques symétriques FGM à cœur souple et homogène dans lequel le module de Young de la couche 1 est $E_m=70\text{GPa}$ (P1, aluminium) à la face supérieure et $E_c=151\text{GPa}$ (P2, zircon) à la face inférieure. Contrairement au cas du

cœur rigide et homogène, il peut être observé que pour les plaques FGM à cœur souple et homogène, la déflexion transversale diminue lorsque l'indice de loi de puissance est augmenté. Toutes les plaques avec des propriétés intermédiaires subissent des valeurs intermédiaires correspondantes de la déflexion centrale. Ceci est prévu parce que la plaque en céramique est plus rigide que celle métallique.

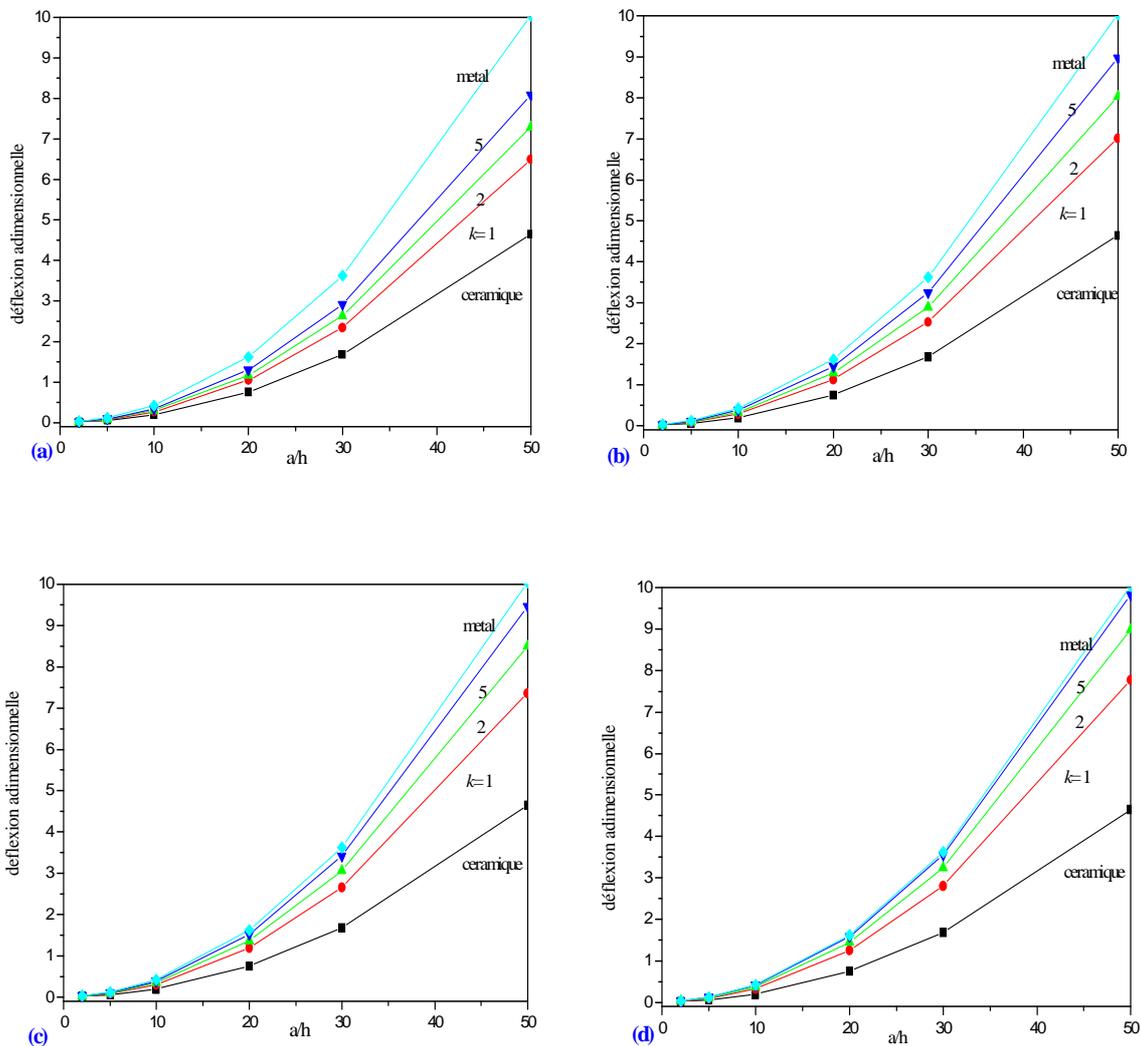


Figure 3 : déflexion centrale non dimensionnelle (\bar{W}) en fonction du rapport entre dimension et l'épaisseur (a/h) de la plaque sandwich FGM (type a) avec cœur rigide et homogène pour différents k et de types des plaques sandwiches FGM.

(a) (1-2-1). (b) (1-1-1). (c) (2-1-2). (d) (1-0-1).

Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM

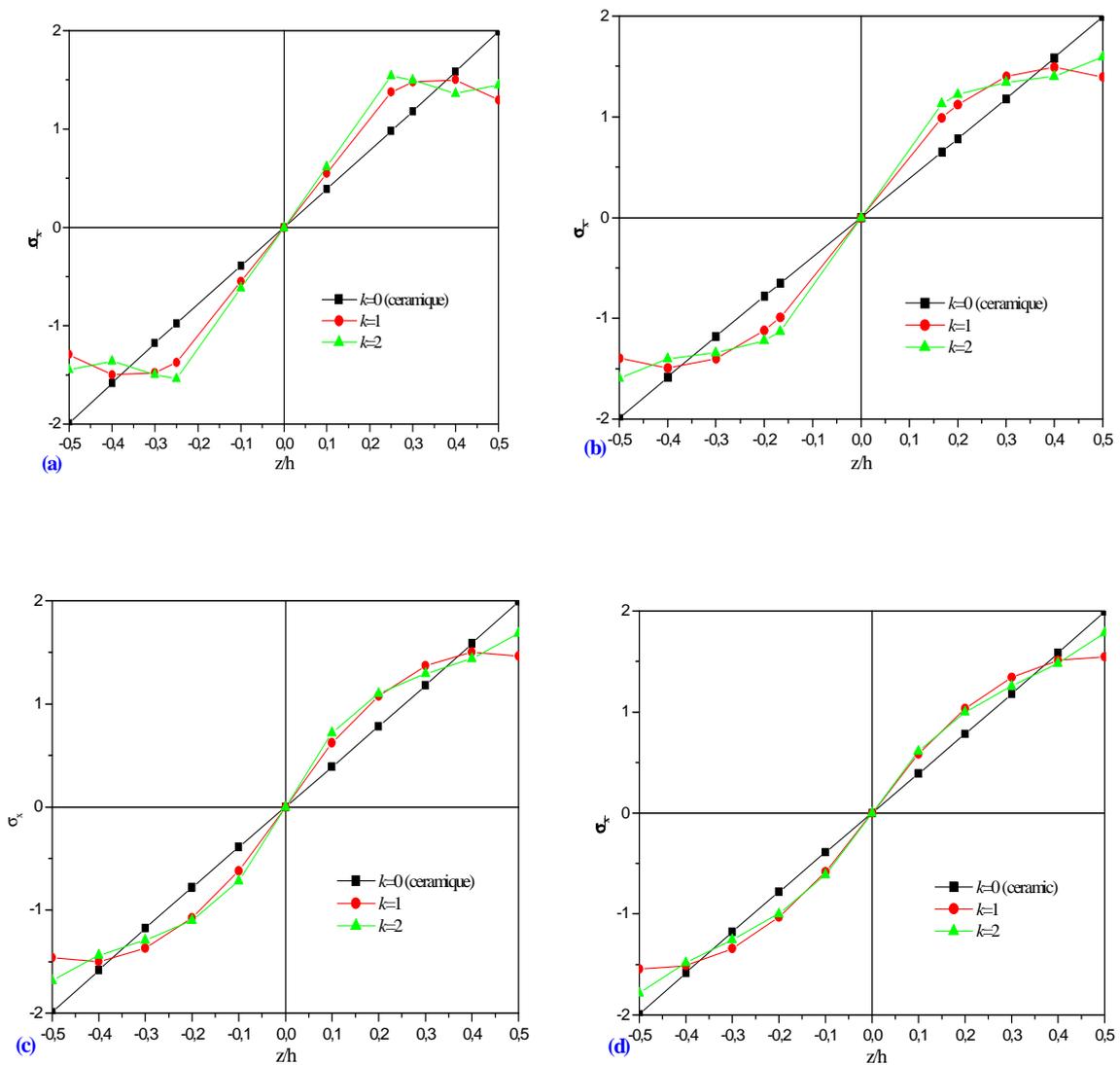


Figure 4 : Variation de la contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM (type a) avec Cœur rigide et homogène pour différents valeurs de k et types de plaques sandwiches FGM avec $(a/h=10)$. (a) (1-2-1). (b) (1-1-1). (c) (2-1-2). (d) (1-0-1)

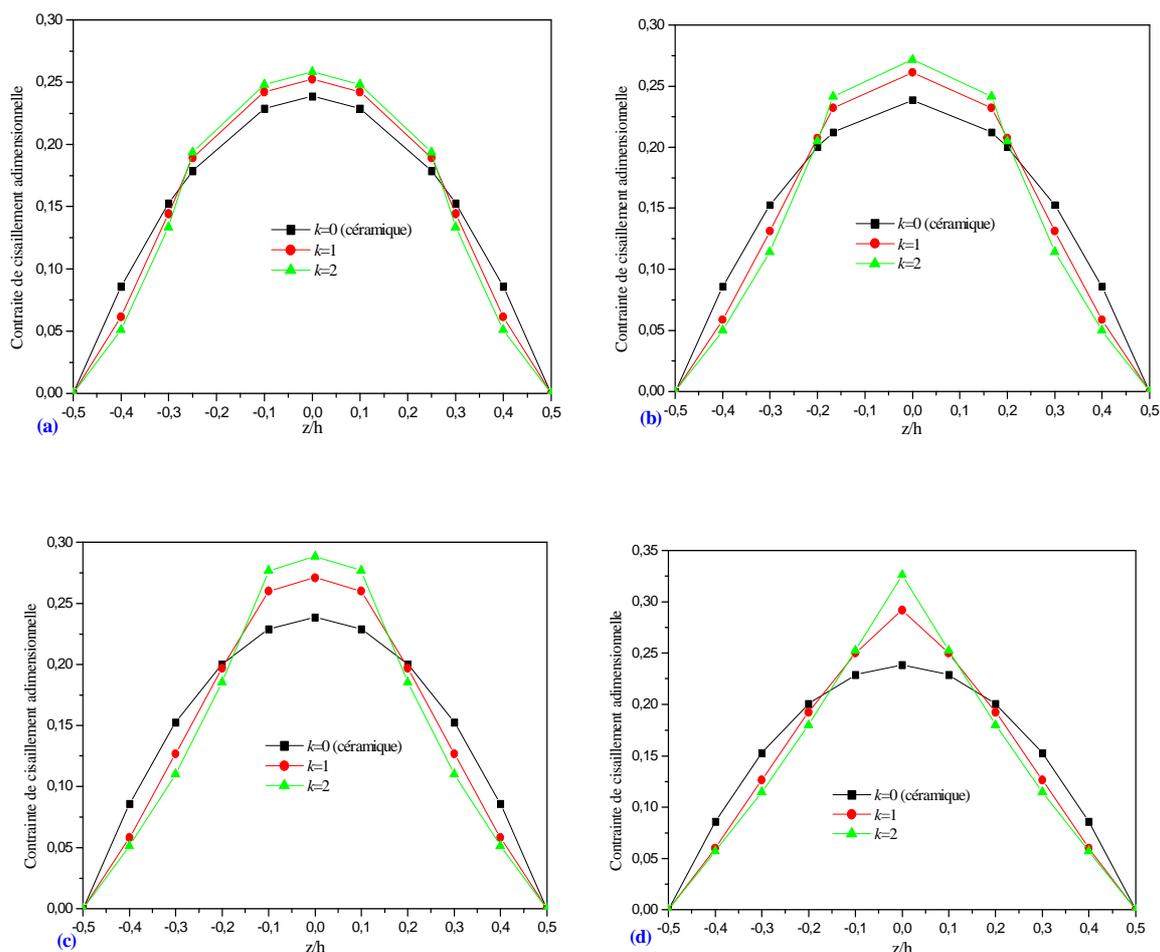


Figure 5 : Variation de la contrainte de cisaillement transverse ($\bar{\tau}_{xz}$) à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM (type a) avec homogénéité du cœur rigide pour différents valeurs de k et types des plaques sandwiches FGM avec ($a/h=10$). (a) (1-2-1). (b) (1-1-1). (c) (2-1-2). (d) (1-0-1).

La figure 7 montre les distributions de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur d'une plaque sandwich FGM à cœur souple et homogène et pour $k= 0, 1$, et 2 . Les contraintes sont de traction à la surface supérieure et de compression à la surface inférieure. La plaque métallique homogène ($k=0$) donne le maximum des contraintes de compression (traction) à la face inférieure (supérieure). La plaque métallique homogène ($k=0$) donne le minimum de contraintes de compression (traction) à la face inférieure (supérieure). La contrainte axiale pour la plaque en

matériau pur (métal) varie linéairement dans l'épaisseur. Cependant, la variation de cette contrainte n'est pas linéaire pour les plaques FGM.

Les tracés de la contrainte de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM à cœur souple et homogène sont présentés dans la figure 8. La valeur maximale se produit à un point sur le plan médian de la plaque et son amplitude pour la plaque métallique homogène ($k=0$) est plus grande que celle de la plaque FGM.

Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM

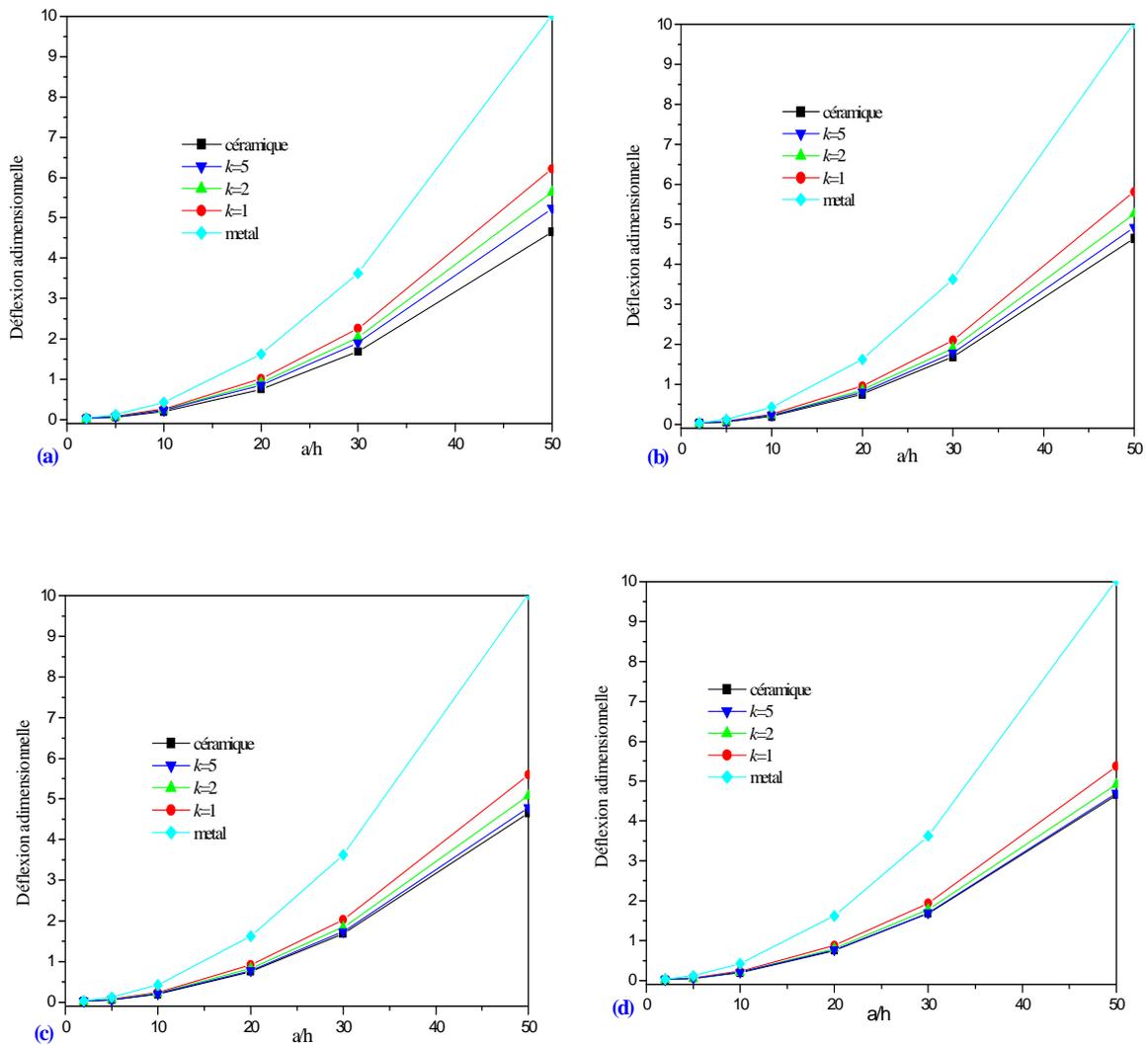


Figure 6: déflexion centrale non dimensionnelle (\bar{W}) en fonction du rapport entre dimension et l'épaisseur (a/h) de la plaque sandwich FGM (type a) avec Cœur souple et homogène pour différents valeurs de k et de types des plaques sandwiches FGM. (a) (1-2-1). (b) (1-1-1). (c) (2-1-2). (d) (1-0-1).

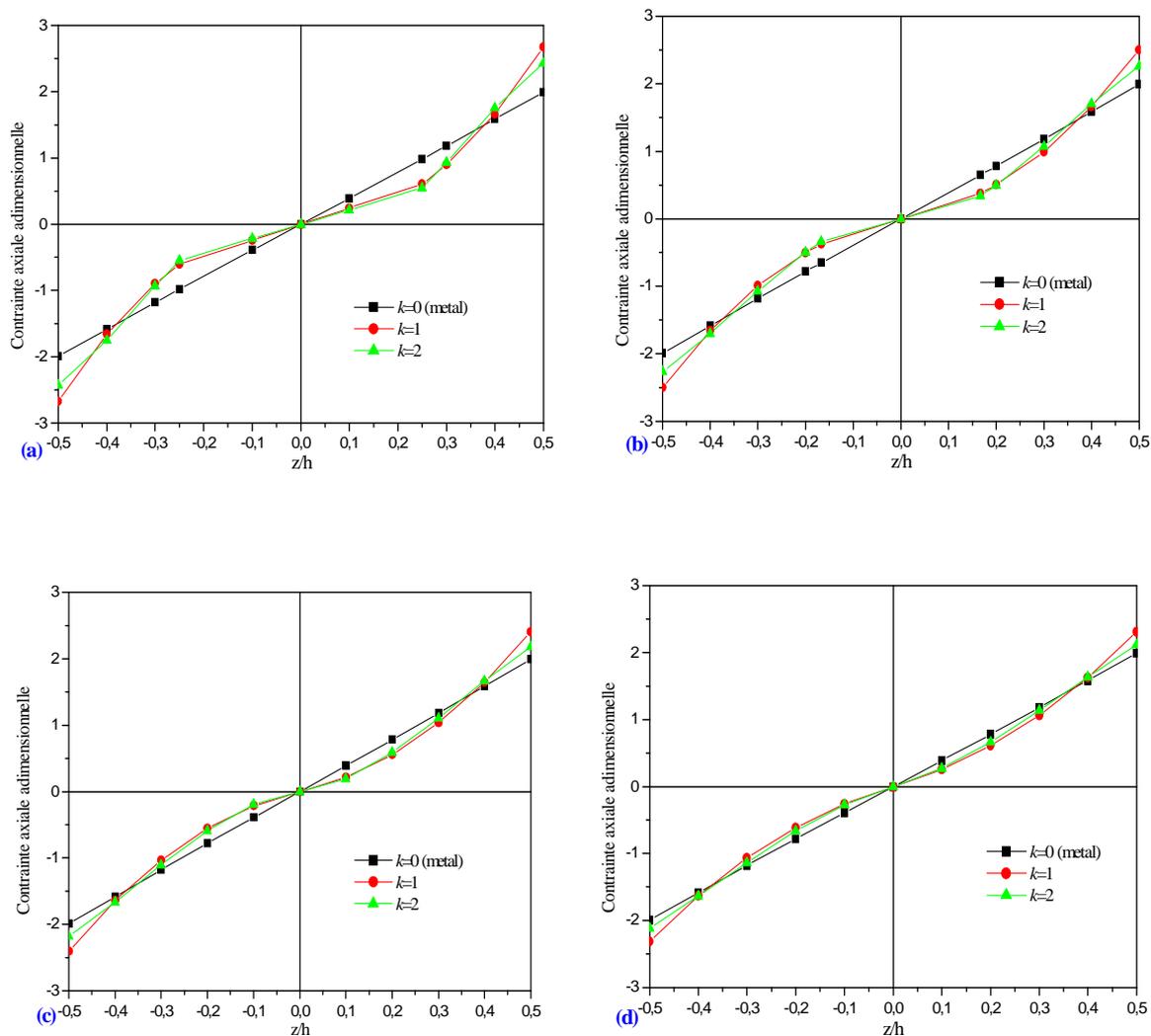


Figure 7 : Variation de la contrainte normale ($\bar{\sigma}_x$) à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM (type a) avec Cœur souple et homogène pour différents valeurs de k et types de plaques sandwiches FGM avec ($a/h=10$). (a) (1-2-1). (b) (1-1-1). (c) (2-1-2). (d) (1-0-1).

Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM

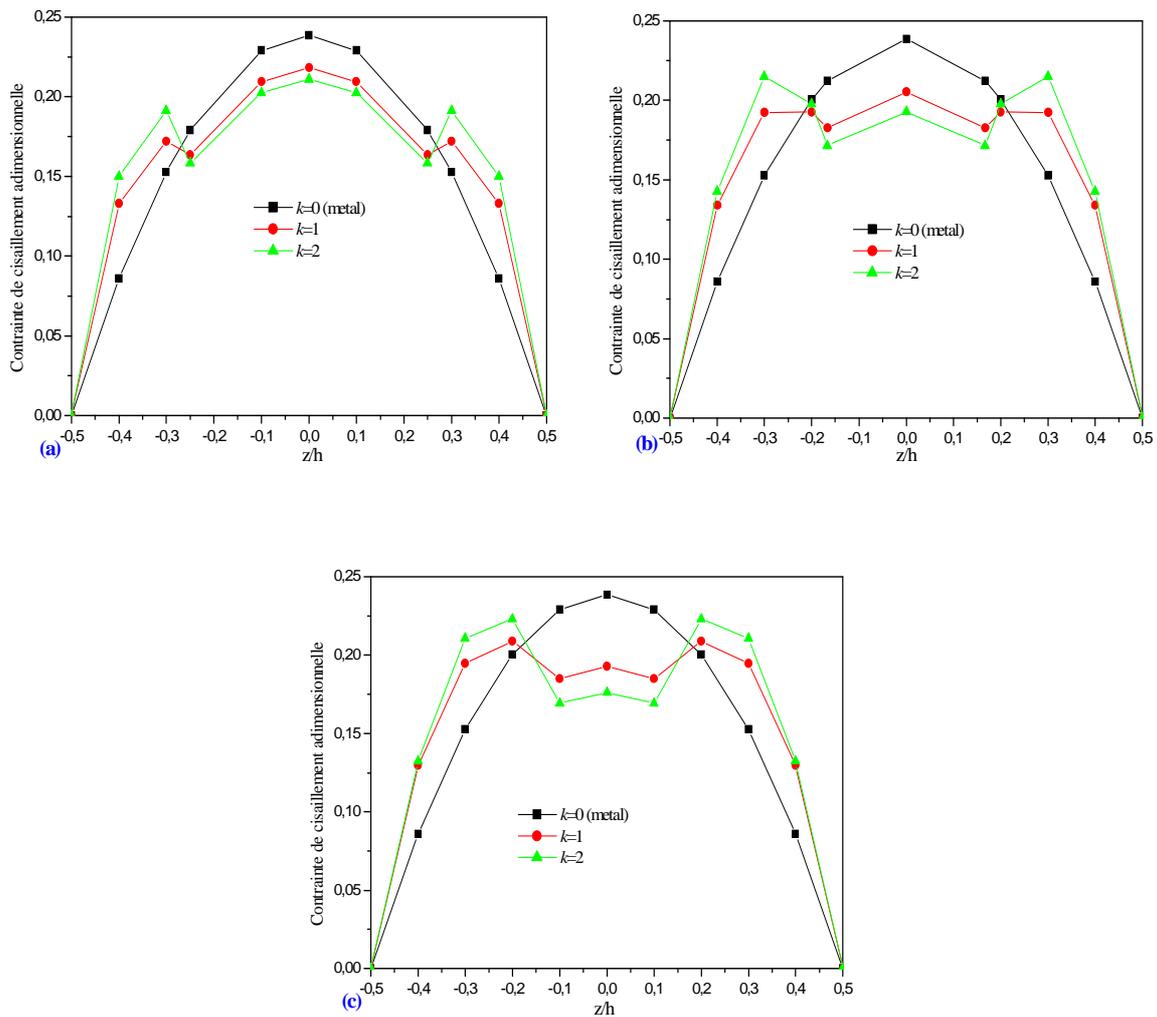


Figure 8 : Variation de la contrainte de cisaillement transverse ($\bar{\tau}_{xz}$) à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM (type a) avec homogénéité du cœur souple pour différents valeurs de k et types des plaques sandwiches FGM avec ($a/h=10$). (a) (1-2-1). (b) (1-1-1). (c) (2-1-2). (d) (1-0-1)

En utilisant la présente RPT que nous présentons dans les figures 9 à 11 la déflexion centrale \bar{W} , la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ et la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich (1-4-1) du type (b) (cœur en FGM) avec $k=1, 2, 5$. P_1 , P_2 sont affectées aux propriétés de l'aluminium et de la zirconie respectivement. Dans ce cas, le cœur en FGM est riche d'une part en métal à la face supérieure et de l'autre part en céramique à la face inférieure.

La figure 9 montre la variation de la déflexion centrale pour différents indices k en fonction des rapports a/h . Les déflexions de la plaque FGM est entre celles de la plaque en céramique et en métal.

Comme il est exposé dans la figure 10, les contraintes axiales, sont de compression à travers la plaque jusqu'à presque $\bar{z} = -0.06$ et puis ils deviennent de traction. La contrainte de compression (traction) maximale se produit à un point à la surface inférieure (supérieure) de la plaque FGM.

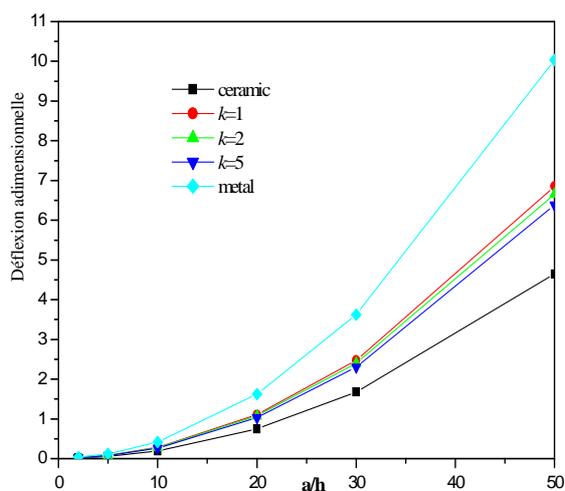


Figure 9: déflexions non dimensionnelles \bar{W} au centre de la plaque sandwich carrée (1-4-1) avec Cœur en FGM.

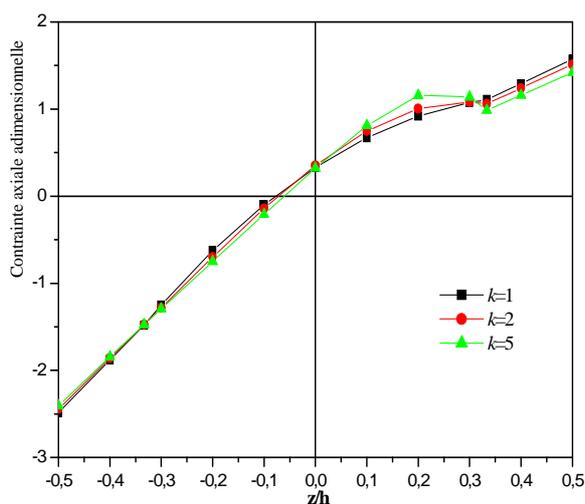


Figure 10: contraintes axiales non dimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ de la plaque sandwich carrée (1-4-1) avec cœur en FGM et (a/h=10).

La figure 11 représente les distributions des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la plaque sandwich FGM carrée. Contrairement à la plaque de type (a), la distribution de la contrainte de cisaillement n'est

pas symétrique dans le cas de la plaque sandwich de type (b) (cœur en FGM).

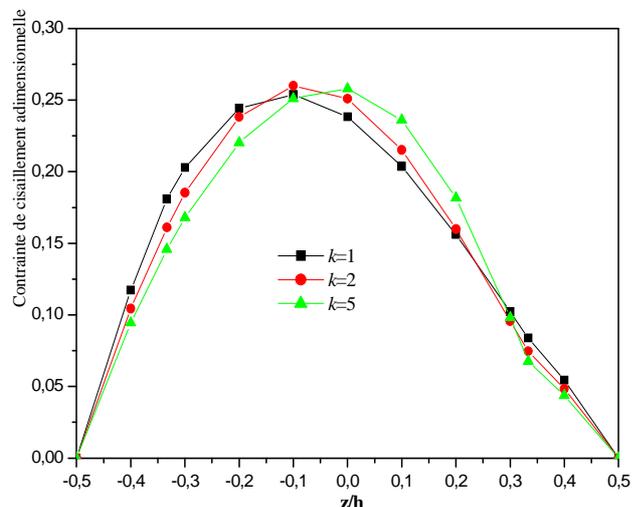


Figure 11: contraintes de cisaillement transverse non dimensionnelles $\bar{\tau}_{xz}$ de la plaque sandwich carrée (1-4-1) avec cœur en FGM et (a/h=10).

4. Conclusion

Une théorie raffinée à deux variables est étendue à la réponse statique de flexion de plaques rectangulaires en sandwich FGM. Le nombre de variables primaires dans cette théorie est encore inférieur à celles des théories de déformation de cisaillement des plaques du premier et d'ordre supérieur. Ainsi, contrairement à toute autres théorie, la théorie présentée donne lieu à seulement quatre équations régissant résultant de l'effort de calcul nettement inférieur par rapport aux autres théories d'ordre supérieur rapportées dans la littérature ayant plus de nombre d'équations gouvernantes. Dans cette théorie pour la distribution parabolique des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur des plaques, et satisfaite aux conditions de nullité de la contrainte de

traction sur les surfaces de la plaque, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées pour les comportements de flexion de plaques sandwiches FGM simplement appuyées. Les plaques sandwiches en loi de puissance avec peaux FGM et cœur homogène et les plaques sandwiches avec peaux homogènes et cœur FGM sont considérées comme fondamentales. La déflexion, la contrainte axiale et les contraintes de cisaillement prédites par la théorie actuelle (à quatre inconnues) et TSDPT (cinq inconnues) sont identiques. En conclusion, on peut dire que la théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour prédire les déflexions et les contraintes dans les plaques sandwiches en FGM.

Références bibliographiques

- [1] HASSAINE DAOUADJI T., Elasticity solution of a cantilever functionally graded beam, *Composites applied composite material* 2013.
- [2] Koizumi, M., Recent Progress of Functionally Gradient Materials in Japan, *Ceram. Eng. Sci. Proc.*, 1992, Vol. 13, N° 7-8, p.333-47.
- [3] Nguyen, TK., First-order shear deformation plate models for functionally graded materials, *Compos. Struct*, 2008, Vol 83, p.25-36.
- [4] Wu, C.P., Li, H.Y.: An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates. *Compos. Struct.* 92, 2591–2605 (2010).
- [5] Simsek, M.: Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nucl. Eng. Des.* 240, 697–705 (2010).
- [6] M. sid ahmed, A. Tounsi, O. anwar bég : Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory. *I. J. of mechanical sciences*, vol 76 novembre 2013 102-111.
- [7] Lü, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q.: Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 16, 576–584 (2009).
- [8] A. Tounsi, M. sid ahmed, E.A. Adda bedia: A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerospace science and technology*, vol 24 issue 1 January 2013 pages 209-220.
- [9] Wu, C.P., Huang, S.E.: Three-dimensional solutions of functionally graded piezothermo-elastic shells and plates using a modified Pagano method. *Comput. Mater. Continua* 12, 251–282 (2009).
- [10] Vel, S.S., Batra, R.C.: Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J. Sound Vib.* 272, 703–730 (2004).
- [11] Marur P.R. (1999). Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials, PhD Thesis, Auburn University, Alabama.
- [12] Delale F, Erdogan F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane, *Journal of Applied Mechanics*, 50: 609–614.
- [13] Zenkour A.M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling*, 30: 67–84.
- [14] Matsunaga, H. (2009). Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Compos Struct*, 87: 344 – 357.
- [15] Reddy, J.N.: A simple higher order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 51, 745–752 (1984).