
Soumis le : 16 Mars 2012

Forme révisée acceptée le : 06 Février 2013

Email de l'auteur correspondant :

bessaimaicha@yahoo.fr

Analyse statique de la flexion des poutres ZrO_2 / Ti-6Al-4V en P-FGM

Aicha BESSAIM*, Mohammed Sid Ahmed HOUARI*, Abdelkader MEGUENI*,
Abdelouahed TOUNSI*, BEDIA El Abbas ADDA*

**Laboratoire de Sidi Bel Abbès, Université de Sidi Bel Abbès, BP 89 Cité Ben M'hidi, 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie*

Résumé

Ce travail présente l'analyse du comportement mécanique d'une poutre rectangulaire simplement appuyée en matériau à gradient de propriété en loi de puissance (P-FGM) soumise à un chargement uniformément réparti. La poutre P-FGM est constituée de deux matériaux différents à travers son épaisseur, d'une céramique (ZrO_2) et d'un métal (Ti-6Al-4V). En utilisant les différentes théories de poutres à savoir: les théories d'ordre élevé (TSDBT), (SSDBT) et (ESDBT), la théorie de Timoshenko (FSDBT) et la théorie d'Euler-Bernoulli (CBT). Le coefficient de Poisson à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM est supposé être constant, mais leur module de Young change sans interruption dans toute la direction d'épaisseur selon la fraction de volume des constituants définis par fonction de la loi de puissance. La solution analytique des poutres rectangulaires en P-FGM soumises à la flexion est obtenue, en utilisant l'approche de Navier. Des évaluations qualitatives et quantitatives du champ de déplacement et de contraintes sont présentées et discutées.

Mots clés: Matériaux à gradient de propriétés, Poutre P-FGM (ZrO_2 / Ti-6Al-4V), Théorie d'ordre élevé, Solution de Navier.

Abstract

In this paper, an elastic, rectangular, and simply supported, power-law functionally graded material (P-FGM) beam of thick thickness subjected to uniformly distributed transverse loading has been investigated. The P-FGM system consists of ceramic (ZrO_2) and metal (Ti-6Al-4V) phases varying through the thickness of beam. Major classes of representative theories such as classical laminate beam theory (CLBT), first-order shear deformation theory (FSDBT) and high-order theories (TSDBT), (SSDBT) and (ESDBT). The Poisson's ratio of the thick P-FGM beam is assumed to be constant, but their Young's moduli vary continuously throughout the thickness direction according to the volume fraction of constituents defined by power-law function. The analytical solution of the rectangular beams in P-FGM subjected to the inflection is obtained, by using the approach of Navier. Qualitative and quantitative assessments of displacement and stress fields have been presented and discussed.

Key words: functionally graded materials, P-FGM Beam (ZrO_2 / Ti-6Al-4V), Higher-order theories, Solution of Navier.

1. Introduction

Depuis le début du vingtième siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé. Que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme et durée de vie prolongée. Mais l'inconvénient c'est l'existence de concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre. Pour

surmonter ces difficultés une équipe de chercheurs japonais (1980) a proposé de nouveaux matériaux dits matériau à gradient de propriété (FGM). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont des composites de pointe, dont la microstructure est hétérogène. Généralement ces matériaux sont fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et la céramique. Les FGM trouvent leur application dans divers domaines tels que les avions, les secteurs biomédicaux et les constructions civiles et industrielles [1].

Les FGM sont obtenus en changeant sans interruption les constituants des matériaux multi-phases dans une fraction prédéterminée de volume du matériau constitutif [2-4]. La fonction de loi de puissance [5-8], et la fonction exponentielle [9-14] sont employées pour décrire les variations des propriétés matérielles des matériaux FGM, avec l'apparition des concentrations des contraintes dans

les interfaces auxquelles le matériau est continu mais change graduellement. Par conséquent, Chung et Chi [15] ont proposé un FGM sigmoïde, qui se compose de deux fonctions de loi de puissance pour définir une nouvelle fraction de volume. Chi et Chung [16] indique que l'utilisation d'un sigmoïde de FGM réduit de manière significative les facteurs d'intensité des contraintes d'un corps fissuré. La détermination des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur de poutres et de plaques fléchées est la plus souvent effectuée à partir d'hypothèses sous forme du champ de déplacement dans l'épaisseur. Ces théories ne sont qu'une approximation d'une réalité à trois dimensions avec des précisions spécifiques à chacune d'elles. Plusieurs modèles seront utilisés avec ou sans prise en compte de l'influence du cisaillement transverse. On applique la théorie du premier ordre d'Euler-Bernoulli tout en négligeant l'effet de cisaillement transverse pour les poutres longues et les plaques minces par contre la théorie de Timochenko a prolongé la théorie d'Euler-Bernoulli en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre, ce qui oblige l'introduction d'un coefficient correcteur pour mieux prendre en compte l'effet de cisaillement transverse. Les théories d'ordre élevé sont plus réalistes puisqu'elles vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieures et inférieures de la structure et en utilisant une fonction de gauchissement cubique telle que celle employée par Reddy [17] ou la fonction sinus développée par Touratier [18] et la fonction Exponentielle par Afaq [19]. Ce qui n'est pas le cas des théories du premier ordre. Dans ce travail on présente une étude sur le comportement mécanique des poutres P-FGM rectangulaire simplement appuyée soumise à un chargement uniformément réparti. La poutre P-FGM se compose d'une céramique (ZrO_2) et d'un métal (Ti-6Al-4V). En utilisant les différentes théories de poutres à savoir : les théories d'ordre élevé (TSDBT), (SSDBT) et (ESDBT), la théorie de Timoshenko (FSDBT) et la théorie d'Euler-Bernoulli (CBT). Les équations d'équilibre sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels (PTV). Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant l'approche de Navier. Nous avons fait une comparaison entre les différents modèles de poutre. Après, nous avons étudié l'influence de changement du paramètre de matériau sur l'évolution de la flèche, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement. Enfin, une comparaison des résultats des différents types de poutres P-FGM, S-FGM et E-FGM a été faite.

2. Gradient de propriétés matérielles des poutres FGM

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) peuvent être produits en changeant sans interruption les constituants des matériaux FGM avec microstructure non-uniformes et des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être défini par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, des poutres FGM avec la fonction sigmoïde seront traitées dans cet article en détail. Considérons une poutre rectangulaire en FGM. Comme montré dans la Fig 1. Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit: $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Delale et Erdogan [10] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. A cet effet, on a pris une valeur constante du coefficient de Poisson en tout point de la poutre FGM. Par contre le module de Young change dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM suivant une fonction de la loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM) ou une fonction sigmoïde (S-FGM).

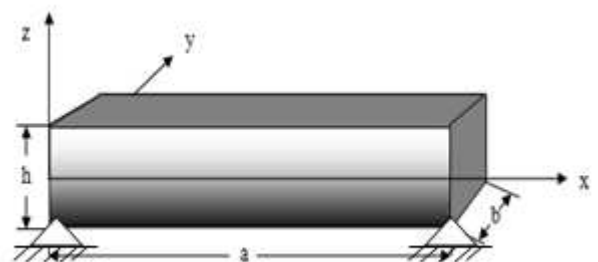


Fig. 1. Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient de propriété.

2.1. Les propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (1)$$

Où p est le paramètre du matériau qui reflète le type de distribution des propriétés matérielles à travers l'épaisseur

de la structure, c'est-à-dire définir les pourcentages des particules de chaque constituant (céramique et métal) en chaque couche de la structure et la variation (augmentation ou diminution selon le matériau) des ces pourcentage à travers l'épaisseur et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'un P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [20]

$$E(z) = V(z).E_1 + [1 - V(z)].E_2 \quad (2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la Fig. 2, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmentée rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

2.2. Les propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Dans le cas d'ajouter un matériau composite P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à un composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [20,21]. Par conséquent, Chung et chi [15] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une distribution harmonieuse des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (3a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (3b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (4a)$$

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (4b)$$

La Fig. 3, montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (3a) et (3b) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM)

2.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [10]

$$E(z) = E_2 \cdot e^{B(z+h/2)} \quad (5a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (5b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre est représentée dans la Fig.4.

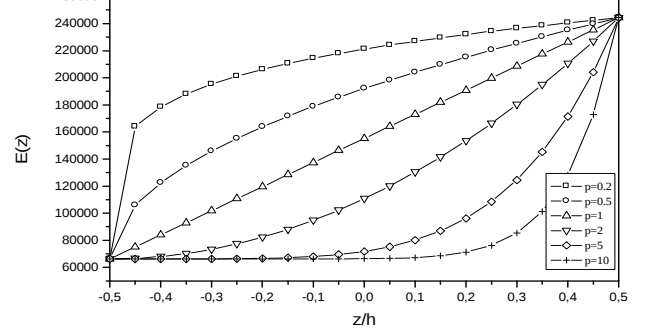


Fig.2. La variation du module de Young dans une poutre P-FGM

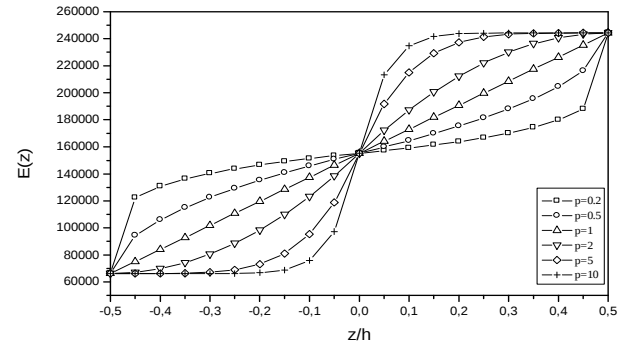


Fig.3. La variation du module de Young dans une poutre S-FGM

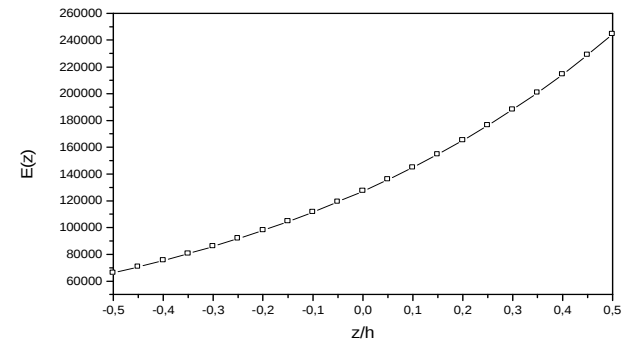


Fig.4. La variation du module de Young dans une poutre E-FGM

3. Formulation théorique

Le champ de déplacement de n'importe quel point situé à (x, z) de la poutre s'écrit comme suit

$$U(M) = \begin{cases} u_x(x, z) = u(x) - zw, x(x) + \Psi(z)\phi_x \\ u_z(x, z) = w(x) \end{cases} \quad (6)$$

Avec $u(x)$ et $w(x)$ représentent respectivement le déplacement dans le plan et le déplacement transverse, $w, \chi(x)$ est la rotation de la section, φ_x est la rotation suivant x et la fonction $\Psi(z)$ est la fonction de gauchissement.

La plupart des solutions sont basées sur les choix de la fonction $\Psi(z)$, plusieurs modèles disponibles pour les poutres à savoir : le modèle classique d'Euler-Bernoulli (CBT) qui néglige le cisaillement transversal, le modèle de premier ordre de Timoshenko (FSDBT), qui considère que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre, et oblige d'introduire la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte l'effet du cisaillement transverse, et les modèles d'ordre élevé qui vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieure et inférieure de la structure. Pour les modèles d'ordre élevé, on utilisera une fonction de gauchissement cubique telle que celle employée dans la théorie des plaques de Reddy (TSDBT), la fonction sinus développée par Touratier (SSDBT) et la fonction exponentielle (ESDBT) développée par Afaq.

La fonction de gauchissement utilisée pour chaque théorie est comme suit

- CBT: $\Psi(z) = 0$
- FSDBT: $\Psi(z) = z$
- TSDBT: $\Psi(z) = z(1 - 4z^2/3h^2)$
- SSDBT: $\Psi(z) = h \sin(\pi z/h)/\pi$
- ESDBT: $\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2}$

Dans l'hypothèse de petites perturbations, le tenseur des déformations s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \gamma_{xz}(x, z) = \Psi'(z) \cdot \varphi_x \end{cases} \quad (7)$$

On se limite à un comportement linéaire élastique du matériau P-FGM, l'expression des contraintes peut être déterminée comme

$$\begin{cases} \sigma_x = E(z) \cdot \varepsilon_x \\ \tau_{xz} = G(z) \cdot \gamma_{xz} \end{cases} \quad (8)$$

4. Equations d'équilibres et conditions aux limites

Nous pourrions établir les équations d'équilibres à partir du principe des travaux virtuels (P.T.V). L'équilibre statique peut être décrit par la somme du travail intérieur (δW_{int}) et du travail extérieur (δW_{ext}) développés par le champ du déplacement d'un point M. Le travail virtuel de tous les efforts (intérieurs et extérieurs) s'exerçant sur le système est nul (Eq. (9)).

$$\delta W_{ext}(\delta U) + \delta W_{int}(\delta U) = 0, \quad \forall \delta U \in C.A \quad (9)$$

Suivant les hypothèses de la théorie classique des poutres, le chargement appliqué est considéré comme une charge uniformément répartie le long de la poutre comme montré dans (Fig. 5)

Le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit

$$\delta W_{ext}(\delta U) = \int_0^L (q \delta w) dx \quad (10)$$

Le travail virtuel des efforts intérieurs s'écrit

$$\delta W_{int}(\delta U) = - \int_0^L \int_S [\sigma_x \delta \varepsilon_x(x) + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}(x)] dS dx \quad (11)$$

4.1. Champ virtuel

D'après (Eq. (6)), le champ de déplacement virtuel δU s'écrit dans la base (x, y, z)

$$\delta u_x = \delta u(x) - z \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi(z) \delta \varphi_x \quad (12)$$

$$\delta u_z = \delta w(x)$$

De façon identique, le tenseur des déformations virtuelles s'écrit

$$\delta \varepsilon_x(x) = \frac{\delta \partial u(x)}{\partial x} - z \frac{\delta \partial^2 w}{\partial x^2} + \Psi(z) \frac{\delta \partial \varphi_x}{\partial x} \quad (13)$$

$$\delta \gamma_{xz}(x) = \Psi'(z) \cdot \delta \varphi_x$$

On remplace l'expression (Eq. (11)) dans (Eq. (13)) on obtient le travail virtuel des efforts intérieurs

$$\begin{aligned} \delta W_{int}(\delta U) &= - \int_0^L \int_S [\sigma_x \cdot (\delta \varepsilon_x^0 + z \delta \kappa_x + \Psi(z) \delta \eta_x) dS \\ &\quad + \int_S \tau_{xz} \cdot (\Psi'(z) \cdot \delta \gamma_{xz}^0) dS] dx \\ &= - \int_0^L \left[N_x \cdot \frac{\delta u}{\partial x} + M_x \cdot \frac{\delta^2 w}{\partial x^2} + S_x \frac{\delta \varphi_x}{\partial x} + Q_{xz} \delta \varphi_x \right] dx \end{aligned} \quad (14)$$

N_x et M_x sont respectivement l'effort normal et le moment de flexion

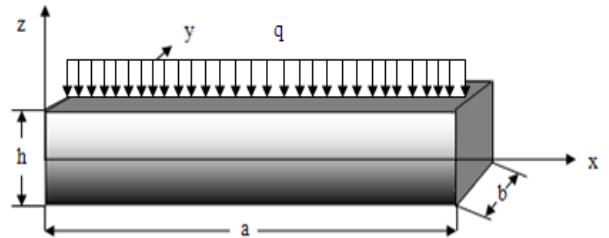


Fig. 5. Chargement appliqué à la poutre

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_S \sigma_x dS = \int_S \left(E(z) \frac{\partial u(x)}{\partial x} - E(z) z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E(z) \Psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) dS \\
&= A_{11} \frac{\partial u(x)}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{11}^a \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
M_x &= - \int_S z \sigma_x dS = - \int_S z \left(E(z) \frac{\partial u(x)}{\partial x} - E(z) z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E(z) \Psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) dS \\
&= -B_{11} \frac{\partial u(x)}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{11}^a \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}
\end{aligned} \quad (16)$$

Les résultats supplémentaires S_x (Eq. (17)) et Q_{xz} (Eq. (18)) sont dus à l'introduction de $\Psi(z)$ dans l'expression du champ de déplacement. S_x est le moment supplémentaire du aux cisaillements transverses et Q_{xz} est l'effort de cisaillement

$$\begin{aligned}
S_x &= \int_S \Psi(z) \sigma_x dS = \int_S \Psi(z) \left(E(z) \frac{\partial u(x)}{\partial x} - E(z) z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E(z) \Psi(z) \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) dS \\
&= B_{11}^a \frac{\partial u(x)}{\partial x} - D_{11}^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{11}^a \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
Q_{xz} &= \int_S \Psi'(z) \tau_{xz} dS = \int_S (\Psi'(z) G(z) \varphi_x) dS \\
&= A_{44}^a \varphi_x
\end{aligned} \quad (18)$$

Les coefficients de rigidité A_{11} et B_{11} , etc., sont définis en termes de coefficients de rigidité $E(z)$ et $G(z)$

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = b \int_{-h/2}^{h/2} E \{1, z, z^2\} dz \quad (19)$$

$$\{B_{11}^a, D_{11}^a, F_{11}^a\} = b \int_{-h/2}^{h/2} E \Psi(z) \{1, z, \Psi(z)\} dz \quad (20)$$

$$A_{44}^a = b \int_{-h/2}^{h/2} G \Psi'^2(z) dz \quad (21)$$

4.2. Equations d'équilibres

Par application du principe des travaux virtuels (Eq. (9)) sur les expressions des travaux virtuels (Eq. (10)) et (Eq. (14)), et en faisant l'intégration par partie du travail des efforts internes, tout en conservant alors le second terme sous forme intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a \left[- \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta w - \frac{\partial S_x}{\partial x} \delta \varphi_x + Q_{xz} \delta \varphi_x \right] dx \\
& + \left[- N_x \delta u - M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta w - S_x \delta \varphi_x \right]_0^a \\
& + \int_0^a (q \delta w) dx = 0 \quad C.A
\end{aligned} \quad (22)$$

L'équation (Eq. (22)) devant être vérifiée quels que soient les déplacements virtuels δu , δw et $\delta \varphi_x$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \\ - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q = 0 \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} - Q_{xz} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Et les conditions aux limites en $x=0$ et $x=a$ peuvent être exprimées soit en déplacement soit en force

$$\begin{cases} \delta u = 0 & \text{ou} & -N_x = 0 \\ \frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 & \text{ou} & -M_x = 0 \\ \delta w = 0 & \text{ou} & \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \\ \delta \varphi_x = 0 & \text{ou} & -S_x = 0 \end{cases} \quad (24)$$

On remplace les équations (Eqs. (15)-(18)) dans l'équation (Eq. (23)), on obtient l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned}
A_{11} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B_{11} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_{11}^a \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} &= 0 \\
B_{11} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - D_{11} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{11}^a \frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} &= -q \\
B_{11}^a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{11} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + F_{11}^a \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - A_{44}^a \varphi_x &= 0
\end{aligned} \quad (25)$$

5. La solution exacte de la poutre P-FGM

Considérant une poutre P-FGM de longueur a , de largeur b , et d'épaisseur uniforme h soumise à une charge $q_z(x)$. Suivant la procédure de la solution de Navier, les composantes du déplacement et la force extérieure pour les cas de charge uniformément répartie peut être exprimée en

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ \varphi_x(x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_s \cos(\lambda x) \\ W_s \sin(\lambda x) \\ X_s \cos(\lambda x) \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$q_z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin(\lambda x) \quad (27)$$

Où

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}$$

U_s , W_s et X_s sont des paramètres arbitraires.

En remplaçant les équations (Eqs. (26) et (27)), dans l'équation (Eq. (25))

$$[C] \cdot \{\Delta\} = \{f\} \quad (28)$$

Où $\{\Delta\}$ et $\{f\}$ désignent les colonnes

$$\begin{aligned} \{\Delta\}^T &= \{U_s, W_s, X_s\} \\ \{f\}^T &= \{0, -q_m, 0\} \end{aligned} \quad (29)$$

Les éléments $C_{ij} = C_{ji}$ de la matrice $[C]$ sont donnés

par :

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\lambda^2 \cdot A_{11} \\ C_{12} &= C_{21} = \lambda^3 \cdot B_{11} \\ C_{13} &= C_{31} = -\lambda^2 \cdot B_{11}^a \\ C_{22} &= -\lambda^4 \cdot D_{11} \\ C_{23} &= C_{32} = \lambda^3 \cdot D_{11}^a \\ C_{33} &= -\lambda^2 \cdot F_{11}^a - A_{44}^a \end{aligned}$$

D'ailleurs, substituons l'équation (Eq. (7)) dans l'équation (Eq. (8)) avec l'aide de l'équation (Eq. (26)), on peut obtenir les composantes des contraintes en termes de module de Young et les paramètres arbitraires U_s, W_s, X_s comme suit

$$\sigma_x = -E(z) \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda U_s - z W_s \lambda^2 + \Psi(z) X_s] \sin(\lambda x) \quad (30)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} [\Psi'(z) \cdot X_s] \cos(\lambda x)$$

6. Résultats numériques et discussions

Dans cette étude, le calcul numérique se base sur une poutre P-FGM simplement appuyée qui se compose de deux constituants $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ avec des propriétés matérielles, module de Young et coefficient de Poisson avec : 244,27 GPa et 0,3 pour l'oxyde de zirconium et 66,2 GPa et 0,3 pour l'alliage de titane, respectivement. Delale et Erdogan [10] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. A cet

effet, on a pris une valeur constante du coefficient de Poisson en tout point de la poutre P-FGM et est choisi 0,3. La poutre est simplement appuyée et soumise à un chargement uniformément réparti, qui sera fixé $q = -750 \text{ KN/m}$. Dans la géométrie de la poutre (Fig. 1) on a choisi que $h = 100 \text{ mm}$. Dans tous les cas, la surface supérieure de la poutre est supposée être en céramique (oxyde de zirconium) et la surface inférieure de la poutre est supposée être en métal (alliage de titane).

6.1. Comparaison entre les théories

L'évolution de la flèche totale de la poutre $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ P-FGM pour les cinq théories utilisées est représentée sur la Fig. 6. A partir de cette figure, on peut voir clairement que les courbes correspondantes aux cinq théories présentent la même allure. La flèche des modèles d'ordre élevé est plus grande que celle d'Euler-Bernoulli. Ceci est dû à la présence de l'effet de cisaillement transverse dans les théories Cubique, Sinus et Exponentielle. La théorie d'Euler-Bernoulli ne traite que de la flexion simple sans prendre en compte l'effet de cisaillement.

6.2. L'influence du paramètre du matériau, p , sur la flèche, contrainte normale et contrainte de cisaillement

La flèche totale est montrée dans la Fig. 7 pour divers paramètres de matériau, p . La flèche de la poutre P-FGM est composée de deux constituants la céramique (ZrO_2) et le métal ($Ti-6Al-4V$). On peut voir que, la flèche totale est plus importante pour les poutres entièrement métalliques que pour les poutres entièrement en céramique. Ceci est dû à l'influence du module de Young qui est élevé pour la céramique (ZrO_2 ; 244.27 GPa) par rapport à celui du métal ($Ti-6Al-4V$; 66.2 GPa). Ce qui est indiqué clairement dans la Fig. 3 indiquant la variation du module de Young avec un changement du paramètre du matériau pour $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ de la poutre P-FGM. Par conséquent pour la poutre P-FGM $ZrO_2/Ti-6Al-4V$, la flèche totale augmente pendant que le paramètre du matériau, p , augmente.

La Fig. 8 présente la distribution de la contrainte normale de la poutre P-FGM $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ en fonction des différents paramètres de matériau p , on constate que les contraintes de compression sont sur les surfaces supérieures (face en céramique) et les contraintes de traction sont sur les surfaces inférieures (face en métal). Ces distributions sont linéaires pour les poutres homogènes (poutres entièrement en céramique ou entièrement en métal). Cependant, la distribution de la contrainte normale n'est pas linéaire pour la poutre P-FGM avec des paramètres du matériau $p = 0.2, 0.5, 1, 2$ et 5, l'amplitude des contraintes de compression et de traction sont inégales en grandeur pour la poutre P-FGM

avec le paramètre du matériau p utilisé. De plus les contraintes de compression sont plus grandes en valeur absolue par rapport à la contrainte de traction.

L'évolution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM pour divers paramètres de matériau est illustrée dans la Fig. 9. On voit que l'influence du paramètre de matériau est limitée et son augmentation mène à une augmentation de la contrainte de cisaillement. Il doit être noté que la valeur maximale se produise à $z=0,1h$ mais pas au centre de la poutre P-FGM comme dans le cas d'une poutre homogène.

6.3. Comparaison entre les poutres P-, S- et E-FGM

Dans cette partie, les modules de Young de la poutre FGM obéissent à la loi exponentielle et une distribution

sigmoïde (les poutres E-FGM ou S-FGM) sont étudiés et comparées aux résultats des poutres P-FGM. On observe d'après les figures Figs. 2-4 que la rigidité de la poutre P-FGM (avec $p=0.5$) est plus forte que celle de la poutre S-FGM, qui elle même est plus forte que celle de la poutre E-FGM. La poutre P-FGM (avec $p=1.5$) a la plus basse rigidité.

Figs. 10-12 représentent la flèche, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement des poutres P-FGM, S-FGM et E-FGM. On observe que la poutre P-FGM (avec $p=0.5$) qui est plus rigide que les autres poutres FGM, elle possède une diminution de la flèche et de la contrainte normale pour les cinq types de poutres, mais la contrainte de cisaillement pour la poutre S-FGM (avec $p=1.5$) est plus grande que les autres poutres.

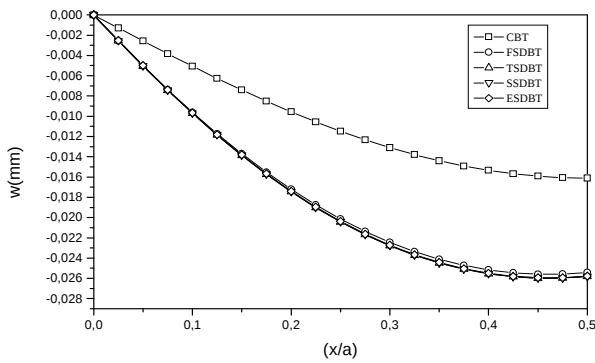


Fig. 6. L'évolution de la flèche totale de la poutre en fonction de différents modèles en ($a/h=2$), $p=2$.

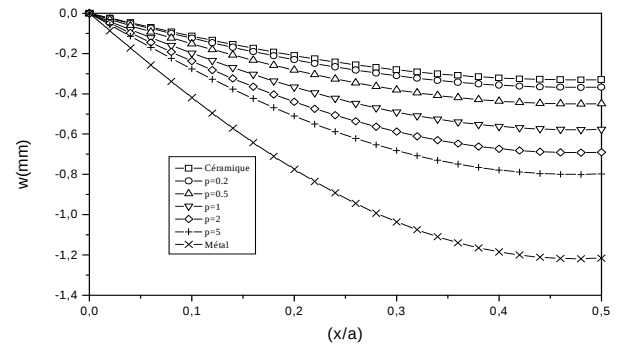


Fig.7. L'évolution de la flèche totale de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres de matériau en ($a/h=5$) par le modèle exponentiel

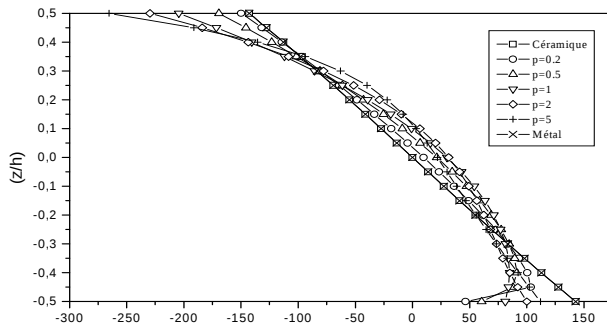


Fig.8. La variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres de matériau en ($a/h=5$) par le modèle exponentiel

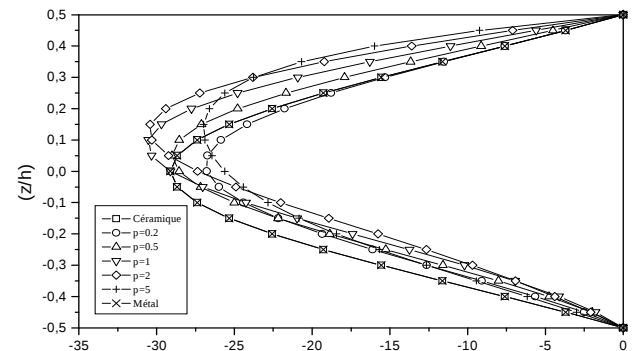


Fig.9. La variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre P-FGM en fonction des divers paramètres de matériau en ($a/h=5$) par le modèle exponentiel

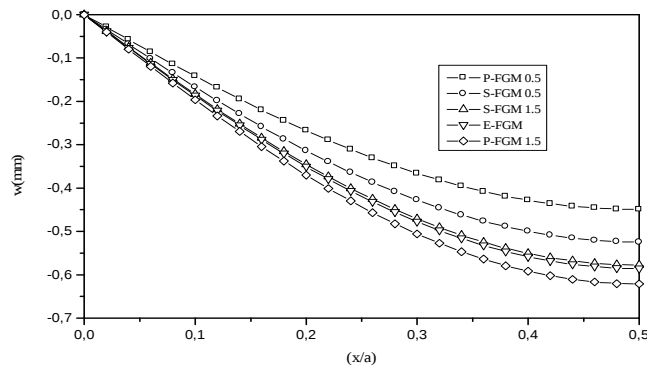


Fig.10. La comparaison de la flèche des poutres P-FGM_{0.5}, S-FGM_{0.5}, S-FGM_{1.5}, E-FGM et P-FGM_{1.5} pour (a/h=5) par le modèle exponentiel

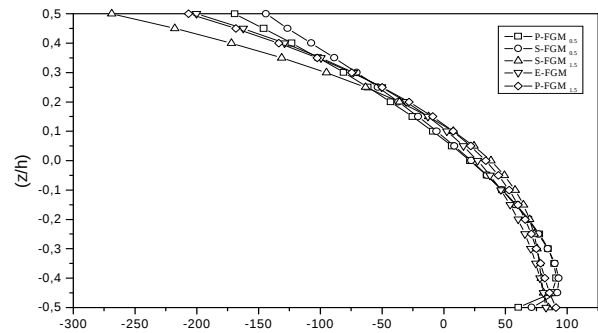


Fig.11. La comparaison de contrainte normale des poutres P-FGM_{0.5}, S-FGM_{0.5}, S-FGM_{1.5}, E-FGM et P-FGM_{1.5} pour (a/h=5) par le modèle exponentiel

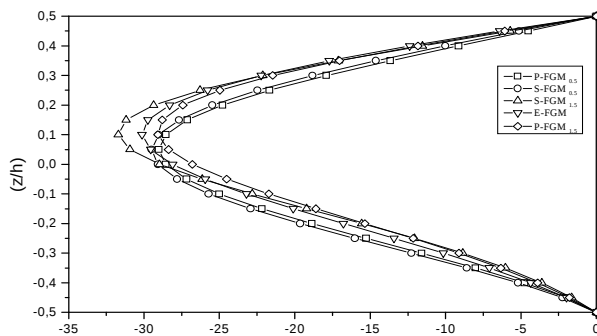


Fig.12. La comparaison de contrainte de cisaillement des poutres P-FGM_{0.5}, S-FGM_{0.5}, S-FGM_{1.5}, E-FGM et P-FGM_{1.5} pour (a/h=5) par le modèle exponentiel

7. Conclusion

La théorie des poutres d'ordre élevé a été effectivement utilisée pour étudier les composants statiques du champ de déplacement, contrainte normale et la distribution des contraintes de cisaillements dans les poutres P-FGM ZrO₂/Ti-6Al-4V. Il a été observé que la flèche totale est plus importante pour les poutres entièrement métalliques (Ti-6Al-4V) que pour les poutres entièrement en céramique (ZrO₂) et la flèche totale augmente pendant que le paramètre du matériau augmente. La distribution de la contrainte normale est linéaire pour les poutres homogènes. Cependant, la distribution de la contrainte normale n'est pas linéaire pour la poutre P-FGM avec des paramètres du matériau différents de la poutre homogène. La distribution de la contrainte de cisaillement dépend aussi de la combinaison métal-céramique. L'analyse statique de la poutre P-FGM montre que la flèche, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement sont très dépendants du paramètre du matériau. La flèche des modèles d'ordre élevé est plus

grande que celle d'Euler-Bernoulli. Ceci est dû à la présence de l'effet de cisaillement transverse dans les théories Cubique, Sinus et Exponentielle. La théorie d'Euler-Bernoulli ne traite que de la flexion simple sans prendre en compte l'effet de cisaillement. la poutre P-FGM (avec $p=0.5$) qui est plus rigide que les autres poutres FGM, elle possède une diminution de la flèche et de la contrainte normale pour les cinq types de poutres, mais la contrainte de cisaillement pour la poutre S-FGM (avec $p=1.5$) est plus grande que les autres poutres.

Références

- [1] K.Ichikawa (Ed.), Functionally Graded Materials in the 21st Century : A Workshop on Trends and Forecasts, Kluwer Academic Publishers, Japan, 2000.
- [2] K.A. Khor, Y.W. Gu, Z.L. Dong, in : T.S. Srivatsan et al. (Eds.), Composites and Functionally Graded Materials, vol. 80, 1997, pp. 89-105.
- [3] P. Kwon, M. Crimp, in : T.S. Srivatsan et al. (Eds.), Composites and Functionally Graded Materials, vol. 80, 1997, pp. 73-88.
- [4] F. Nogata, in : T.S. Srivatsan et al. (Eds.), Composites and Functionally Graded Materials, vol. 80, 1997, pp. 11-18.

- [5] Z.H. Jin, G.H. Paulino, International Journal of Fracture 107 (2001) 73–98.
- [6] Y.Y. Yung, D. Munz, in: T. Shiota, M.Y. Miyamoto (Eds.), Functionally Graded Material, 1996, pp. 41–46.
- [7] Zhang Da-Guang Zhou You-He, Computational Materials Science, in press, doi:10.1016/j.commatsci.2008.05.016.
- [8] S. Joshi, A. Mukherjee, S. Schmauder, Computational Materials Science 28 (2003) 548–555.
- [9] Z.H. Jin, R.C. Batra, Journal of Thermal Stresses 19 (1996) 317–339.
- [10] F. Delale, F. Erdogan, ASME Journal of Applied Mechanics 50 (1983) 609–614.
- [11] P. Gu, R.J. Asaro, International Journal of Solids and Structures 34 (1997) 3085–3098.
- [12] F. Erdogan, B.H. Wu, Journal of Thermal Stresses 19 (1996) 237–265.
- [13] Z.H. Jin, N. Noda, ASME Journal of Applied Mechanics 61 (1994) 738–740.
- [14] F. Erdogan, Y.F. Chen, in: K. Kokini (Ed.), Ceramic Coating, 1998, pp. 29–37.
- [15] Y.L. Chung, S.H. Chi, Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering 13 (2001) 1–9.
- [16] S.H. Chi, Y.L. Chung, Journal of Mechanics 18 (2002) 41–53.
- [17] J.N. Reddy, A simple higher order theory for laminated composite plates, ASME J. Appl. Mech. 51 (1984) 745–752.
- [18] M. Touratier, An efficient standard plate theory. Engng Sci 29 (1991) 901–916.
- [19] M. Karama, K.S. Afaq, S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Internat. J. Solids Structures 40 (6) (2003) 1525–1546.
- [20] G. Bao, L. Wang, International Journal of Solids and Structure 32 (1995) 2853–2871.
- [21] Y.D. Lee, F. Erdogan, International Journal of Fracture 69 (1995) 145–165.