
Soumis le : 28 Décembre 2011
 Forme révisée acceptée le : 16 Mai 2012
 Email de l'auteur correspondant :
 merdacis@yahoo.fr

L'effet des contraintes d'interfaces dans les poutres (FGM) renforcées par des plaques en acier

Slimane Merdaci^a, Samir Benyoucef^a, Abdelouahed Tounsi^{a,b}, El Abbas Adda Bedia^a.

^a Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbés, 89 Cité Ben M'hidi 22000 Sidi Bel Abbés, Algérie

^b Département de génie civil, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université Hassiba Benbouali de Chlef, Algérie

Résumé

Actuellement, l'utilisation des plaques en composites, pour le renforcement des structures et des poutres non homogènes, est une des méthodes récentes pour la réhabilitation des structures présentant un vieillissement, des défauts de forme ou de chargement. L'objectif principal est l'étude du comportement des structures composites de type « FGM » renforcées par des plaques en acier. Le problème majeur est le délaminage de la plaque de renfort dû à une forte concentration de contraintes provenant de l'effet de bord. L'objectif de ce travail est de présenter un modèle analytique pouvant calculer les contraintes d'interfaces des structures non homogènes type FGM renforcées par des plaques en acier. Une étude paramétrique s'en suivra pour la détermination des facteurs affectant l'évaluation de ces contraintes.

Mots clés : Structures composites, FGM, Renforcement, Contraintes d'interfaces.

Abstract

Currently, the use of the composites plates, purposely for non homogeneous beams and structures reinforcement, is one of the recent methods aimed to rehabilitate the defected structures or presents ageing signs malformation or load. The main objective is the study of the behaviour of the non homogeneous composite structure by the type « FGM » streng then by steel plates. As the main difficulty the debonded plate which under a strong concentration of compelled forces show this phenomenon. We indented through this work, to introduce an analytic model, that calculates the interface stresses of the non homogenous structures type FGM, strengthen by steel plates. A parametric study will be established in order to determine the overriding that leads to the evaluation of the stresses phenomenon.

Key words: Composite structures, FGM, strengthening, interfacial stresses.

1. Introduction

Les matériaux à gradients évalués FGM sont composés de deux ou plusieurs matériaux relatifs, à des fractions volumiques et microscopiques qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale variable.

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leur faculté à diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [1]. La variation continue des propriétés mécaniques donne au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologique, tel que : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-

conducteurs, et en Génie civil et trouvent également des applications biomédicales [2].

Le renforcement des structures ou d'éléments de structure telle que les poutres en FGM par collage des plaques en acier ou en matériaux composites est actuellement une technique reconnue et utilisée au monde entier. Cette technique permet d'augmenter la résistance des éléments renforcés et d'assurer la longévité. Néanmoins,

Le mode de rupture le plus fréquent à des telles structures est le délaminage de la plaque de renforcement de son support du à une forte concentration des contraintes aux bords.

L'objectif de cet article est de proposer une modélisation analytique pour la détermination des contraintes d'interfaces au niveau de la couche d'adhésif des poutres non homogènes (FGM) simplement appuyées

et chargées en flexion et renforcées par une plaque en acier.

2. Hypothèses de la méthode

Dans cet article nous étudions l'évolution des contraintes de cisaillement et les contraintes normales pour les structures de type poutres non homogènes (FGM) renforcées par des tôles en acier ou des plaques en matériaux composites (Fig.1).

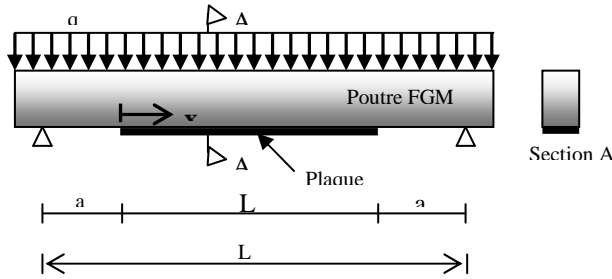


Fig.1 : Poutre en FGM simplement appuyée renforcée par des plaques en acier.

Les principales hypothèses utilisées dans cette étude sont les suivantes:

- Un matériau FGM est un composite hétérogène fabriqué d'un mélange de métal et céramique ou de l'acier –céramique ;
- Un matériau FGM peut être défini par la variation de la fraction volumique.
- La loi de variation de la fraction volumique retenue est de type puissance (power-law function) [7,10]. Ainsi, le module de Young de la poutre FGM

$$E(y) = E_L + (E_u - E_L) \left(\frac{2y + h}{2h} \right)^n \quad (01)$$

Où E_L : le module de Young à la base de la poutre FGM, E_u : le module de Young de la partie supérieure de la poutre FGM et n : constante matérielle.

*) Selon Jin et Batra [3], l'effet de la variation du coefficient de poisson sur les déformations est minime. Par conséquent, le coefficient de poisson de la poutre est supposé constant.

*) On considère, La variation du module de Young suivant l'épaisseur de la poutre type FGM est une fonction de type puissance (P-FGM) comme est illustré sur la Fig.2.

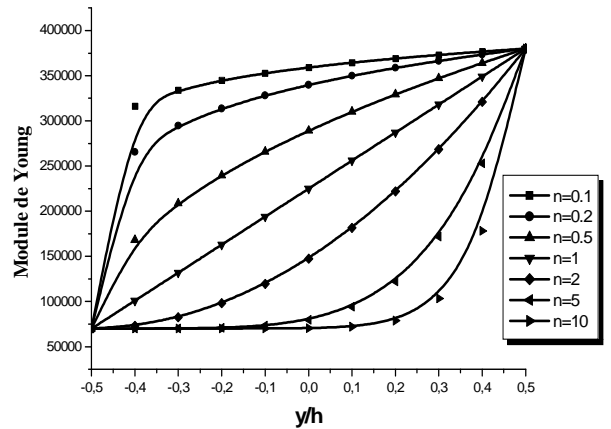


Fig. 2 : La variation du module de Young suivant l'épaisseur de la poutre

L'équation constitutive des composites exprimées en fonction des efforts de membrane N et des moments M [4], est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (02)$$

ε_0 : déformation du plan médium, K : les courbures du stratifié et A , B et D sont respectivement les matrices de membrane, de couplage et de flexion qui sont données par l'expression suivante :

$$A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y) dy \quad (03.a)$$

$$B = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y) y dy \quad (03.b)$$

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(y) y^2 dy \quad (03.c)$$

En utilisant l'équation (01), les expressions de A , B et D deviennent:

$$A = h \left(E_L + \frac{E_u - E_L}{n+1} \right) \quad (04.a)$$

$$B = \frac{h^2}{2} (E_u - E_L) \left[\frac{n}{(n+2)(n+1)} \right] \quad (04.b)$$

$$D = \frac{h^3}{12} \left[E_L + 3(E_u - E_L) \frac{(n^2 + n + 2)}{(n+3)(n+2)(n+1)} \right] \quad (04.c)$$

Pour un effort normal nul ($N=0$), la déformation et la contrainte peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= B^* M + y D^* M \\ \sigma(x) &= E(y) [B^* M + y D^* M] \end{aligned} \quad (05)$$

Au niveau de l'axe neutre, la contrainte est nulle ($\sigma_x = 0$), d'où :

$$\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow E(y); [B^* M + y_{AN} D^*] = 0 \quad (06)$$

$$([B^* + y_{AN} D^*]) = 0 \Rightarrow y_{AN} = -\frac{B^*}{D^*} \quad (07)$$

Donc la position de l'axe neutre est donnée par :

$$Y = \frac{h}{2} - \frac{B^*}{D^*} \quad (08)$$

3. Les contraintes de cisaillement d'interface pour les poutres non homogènes

La Fig.3 présente les contraintes de cisaillement et les contraintes normales d'interfaces pour une poutre non homogène (FGM), et indique aussi la convention du signe utilisée pour le moment de flexion, l'effort tranchant, l'effort normal et le chargement appliqué.

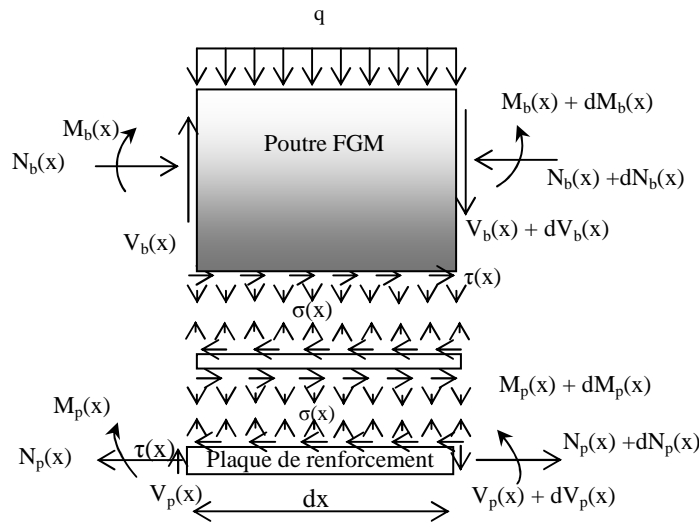


Fig.3 : Un segment différentiel de la poutre (FGM) renforcée par une plaque d'acier

La déformation de la poutre FGM est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= -\frac{I}{b_1} \left[A_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) B_{11}^* \right] N_1(x) \\ &+ \frac{I}{b_1} \left[B_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) D_{11}^* \right] M_1(x) \end{aligned} \quad (09)$$

La déformation au niveau de la plaque de renforcement en acier s'exprime par :

$$\varepsilon_2(x) = \frac{y_2}{E_2 I_2} M_2(x) - \frac{I}{E_2 I_2} N_2(x) \quad (10)$$

L'équilibre horizontal des forces de l'élément de la poutre renforcée permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(x)}{dx} &= \frac{dN_2(x)}{dx} = b_2 \tau(x) \\ N_1(x) &= N_2(x) = N(x) = b_2 \int_0^x \tau(x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

L'expression de la courbure K est donnée par :

$$\{K\} = [B^*] \{N\} + [D^*] \{M\} \quad (12)$$

En supposant que la poutre et la plaque en acier ont la même courbure, nous aurons :

$$K_x = B_{11}^* N_1(x) + D_{11}^* M_1(x) = \frac{M_2}{E_2 I_2} \quad (13)$$

Le moment d'équilibre de l'élément de la poutre renforcée Fig.3, est formulé comme suit :

$$\begin{aligned} M_T(x) &= M_1(x) + M_2(x) \\ &+ N(x) \left[\left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) + \left(\frac{t_2}{2} \right) + t_a \right] \end{aligned} \quad (14)$$

En supposant que la poutre et la plaque de renforcement ont la même courbure, la relation entre les moments dans les deux adhérents peut être exprimée comme suit :

Adhérent 1

$$M_1(x) = \frac{I}{D_{11}^*} \frac{M_2(x)}{E_2 I_2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} N_1(x) \quad (15.a)$$

Adhérent 2

$$M_2(x) = (D_{11}^* E_2 I_2) M_1 + (B_{11}^* E_2 I_2) N_1(x) \quad (15.b)$$

Le moment de flexion dans chaque adhérent, exprimé en fonction du moment total appliqué et de la contrainte de cisaillement est donné comme :

$$M_1(x) = \frac{I}{I + (D_{11}^* E_2 I_2)} \left[\begin{array}{l} M_T(x) - b_2 \int_0^x \tau(x) (B_{11}^* E_2 I_2) dx \\ - b_2 \int_0^x \tau(x) \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} + \frac{t_2}{2} + t_a \right) dx \end{array} \right] \quad (16)$$

$$M_2(x) = \frac{(D_{11}^* E_2 I_2)}{I + (D_{11}^* E_2 I_2)} \left[\begin{array}{l} M_T(x) - b_2 \int_0^x \tau(x) \left(\frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) dx \\ - b_2 \int_0^x \tau(x) \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} + \frac{t_2}{2} + t_a \right) dx \end{array} \right] \quad (17)$$

La première dérivée du moment de flexion dans chaque adhérent donne :

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = \frac{I}{I + (D_{11}^* E_2 I_2)} \left[\begin{array}{l} V_T(x) - b_2 (B_{11}^* E_2 I_2) \tau(x) \\ - b_2 \left[\left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) + \frac{t_2}{2} + t_a \right] \tau(x) \end{array} \right] \quad (18)$$

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = \frac{(D_{11}^* E_2 I_2)}{I + (D_{11}^* E_2 I_2)} \left[\begin{array}{l} V_T(x) - b_2 \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \tau(x) \\ - b_2 \left[\left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) + \frac{t_2}{2} + t_a \right] \tau(x) \end{array} \right] \quad (19)$$

En substituant les Equation (09) et Equation (10) dans l'équation de la contrainte de cisaillement et en dérivant l'équation obtenue, nous aurons :

$$\frac{d^2 \tau(x)}{dx^2} = \frac{G_a}{t_a} \left(\begin{array}{l} \frac{I}{E_2 I_2} \frac{dN_2(x)}{dx} - \frac{y_2}{E_2 I_2} \frac{dM_2(x)}{dx} \\ + \frac{I}{b_1} \left[A_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) B_{11}^* \right] \frac{dN_1(x)}{dx} \\ - \frac{I}{b_1} \left[B_{11} + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) D_{11}^* \right] \frac{dM_1(x)}{dx} \end{array} \right) \quad (20)$$

En remplaçant les expressions des efforts tranchants des deux adhérents Equation (18) et Equation (19) ainsi que ceux des efforts normaux Equation (11) dans Equation (20) nous aurons l'équation différentielle des contraintes de cisaillement :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \tau(x)}{dx^2} + \frac{G_a}{t_a} \frac{I}{\lambda^2 D_{11}^* E_2 I_2 + b_2} \left(y_2 D_{11}^* + \left[B_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) D_{11}^* \right] \right) \tau(x) - \frac{G_a}{t_a} \left[\frac{b_2}{E_2 A_2} \right] \\ & + \frac{G_a}{t_a} \left[\frac{y_2 D_{11}^* b_2}{D_{11}^* E_2 I_2 + b_2} * \left[\frac{t_2}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right] + \frac{G_a}{t_a} \left[A_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) B_{11}^* \right] \right] \\ & + \frac{G_a}{t_a} \left[\frac{b_2}{D_{11}^* E_2 I_2 + b_2} * \left[\frac{t_2}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) + \frac{E_2 I_2}{b_1} B_{11}^* \right] B_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) D_{11}^* \right] \tau(x) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

La solution de Equation (21) est donnée par :

$$\tau(x) = B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + m_1 V_T(x) \quad (22)$$

B1 et **B2** sont des constantes déterminées à partir des conditions aux limites adéquates :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{G_a}{t_a} \left[\frac{b_2}{E_2 A_2} \right] \\ & + \frac{G_a}{t_a} \left[\frac{y_2 D_{11}^* b_2}{D_{11}^* E_2 I_2 + b_2} * \left[\frac{t_2}{2} + t_a + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right] \right] \\ & + \frac{G_a}{t_a} \left[A_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) B_{11}^* \right] \\ & + \frac{G_a}{t_a} \left[\frac{b_2}{D_{11}^* E_2 I_2 + b_1} + \frac{E_2 I_2}{b_1} B_{11}^* \right] \left[B_{11}^* + \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) D_{11}^* \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$m_1 = \frac{G_a}{t_a} \frac{I}{\lambda^2 D_{11}^* E_2 I_2 + b_2} \left[y_2 D_{11}^* + \left(B_{11}^* + \left[\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right] D_{11}^* \right) \right] \quad (24)$$

4. Les contraintes normales d'interfaces

La contrainte normale au niveau de la couche adhésive peut être exprimée comme suit:

$$\sigma_n(x) = \frac{E_a}{t_a} [w_2(x) - w_1(x)] \quad (25)$$

Où $W_1(x)$ et $W_2(x)$ ce sont les déplacements verticaux de la poutre et de la plaque.

En dérivant l'équation. (25) deux fois nous aurons :

$$\frac{d^2 \sigma(x)}{dx^2} = K_n \left[\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} - \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right] \quad (26)$$

L'équilibre de l'élément différentiel est donné par :

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = - \frac{D_{11}^*}{b_2} M_1(x) \quad (27.a)$$

$$\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} = - \frac{I}{E_2 I_2} M_2(x) \quad (27.b)$$

L'équilibre de la poutre(1) et la plaque(2), conduit aux relations suivantes:

Adhérent 1

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = V_1(x) - b_2 \tau(x) \left[\left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) + \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right] \text{ et}$$

$$\frac{dV_1(x)}{dx} = -b_2 \sigma_n(x) - q \quad (28)$$

Adhérent 2

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = V_2(x) - b_2 \frac{t_2}{2} \tau(x) \text{ et } \frac{dV_2(x)}{dx} = \sigma_n(x) b_2 \quad (29)$$

A la base des équations d'équilibres, on a tiré les équations des déformations (déflexion) de la poutre et de la plaque de renforcement en termes des contraintes de cisaillement et des contraintes normales, tel que:

Adhérent 1

$$\frac{d^4 w_1(x)}{dx^2} = D_{11}^* \sigma_n(x) + \left[D_{11}^* \left(\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right) - B_{11}^* \right] \frac{d\tau(x)}{dx} + \frac{D_{11}^*}{b_2} q \quad (30)$$

Adhérent 2

$$\frac{d^4 w_2(x)}{dx^2} = -\frac{b_2}{E_2 I_2} \sigma_n(x) + \frac{b_2 t_2}{2 (E_2 I_2)} \frac{d\tau(x)}{dx} \quad (31)$$

La substitution des Equation (30) et Equation (31) dans la quatrième dérivée des contraintes normales obtenue à partir de Equation (25) permet de donner l'équation différentielle pour les contraintes normales :

$$\frac{d^4 \sigma_n(x)}{dx^4} + \frac{E_a}{t_a} \left(\frac{b_2}{E_2 I_2} + D_{11}^* \right) - \frac{E_a}{t_a} \left(\frac{b_2 t_2}{2 (E_2 I_2)} - D_{11}^* \left[\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right] + B_{11}^* \right) + \frac{E_a}{t_a} \left(\frac{D_{11}^*}{b_2} q \right) = 0 \quad (32)$$

La solution générale de cette équation différentielle de quatrième ordre est exprimée par :

$$\sigma_n(x) = e^{-\beta x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] + e^{\beta x} [C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)] - n_1 \frac{d\tau(x)}{dx} - n_2 q \quad (33)$$

Pour les grandes valeurs de x , on suppose que les contraintes normales deviennent nulles, et comme résultat $C_3 = C_4 = 0$. La solution générale devient :

$$\sigma_n(x) = e^{-\beta x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] - n_1 \frac{d\tau(x)}{dx} - n_2 q \quad (34)$$

C_1 et C_2 sont des coefficients à déterminer par des conditions aux limites.

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{E_a}{4 t_a} \left(\frac{b_2}{E_2 I_2} + D_{11}^* \right)}$$

$$n_1 = \frac{-\left(b_2 \frac{t_2}{2} \right) - \left(B_{11}^* E_2 I_2 \right) + \left(D_{11}^* E_2 I_2 \left[\frac{h}{2} - \frac{B_{11}^*}{D_{11}^*} \right] \right)}{D_{11}^* E_2 I_2 + b_2} \quad (35)$$

$$n_2 = \frac{D_{11}^* E_2 I_2}{\left(D_{11}^* E_2 I_2 + b_2 \right) b_2}$$

Les constantes C_1 et C_2 de l'équation (34) sont déterminées en utilisant des conditions aux limites adéquates. La première condition est que le moment de flexion aux bords de la plaque de renforcement est égal à zéro. En différentiant deux fois l'équation (25) et en remplaçant les équations (27a) et (27b) dans l'expression résultante, nous obtenons :

$$\left. \frac{d^2 \sigma(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a} \left(\frac{1}{b} B_{11}^* N_1(0) + \frac{1}{b} D_{11}^* M_1(0) - \frac{1}{E_2 I_2} M_2(0) \right) \quad (36)$$

Ea : le module de Young de la couche d'adhésive
Or : $M_2(0) = 0$, $N_2(0) = N_1(0) = 0$ et $M_1(0) = M_T(0)$ aux bords de la plaque, la relation ci-dessus devient :

$$\left. \frac{d^2 \sigma(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a} \frac{1}{b} D_{11}^* M_T(0) \quad (37)$$

En différentiant trois fois l'équation (25) et en remplaçant les équations (28) et (29) dans l'expression trouvée :

$$\left. \frac{d^3 \sigma(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a} \left(\frac{1}{b} D_{11}^* V_1(0) - \frac{1}{E_2 I_2} V_2(0) \right) \frac{E_a}{t_a} \left(D_{11}^* \left[\frac{h}{2} + y_{AN} \right] - \frac{b}{E_2 I_2} \frac{t_p}{2} - B_{11}^* \right) \tau(0) \quad (38)$$

Comme l'effort de cisaillement aux bords de la plaque de renforcement est égal à zéro ($\tau(0) = 0$), $V_1(0) = V_T(0)$, cette dernière expression peut être écrite sous la forme suivante :

$$\left. \frac{d^3 \sigma(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = \frac{E_a}{t_a} \frac{1}{b} D_{11}^* V_T(0) - n_3 \tau(0) \quad (39)$$

Ou :

$$n_3 = \frac{E_a}{t_a} \left(D_{11}^* \left[\frac{h}{2} + y_{AN} \right] - \frac{b}{E_2 I_2} \frac{t_p}{2} - B_{11}^* \right) \quad (40)$$

La différentiation de l'équation (34) conduit aux expressions suivantes de la deuxième et la troisième dérivée de la contrainte normale d'interface :

$$\left. \frac{d^2 \sigma(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = -2\beta^2 C_2 - n_1 \left. \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} \right|_{x=0} - n_2 \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (41)$$

Et :

$$\left. \frac{d^3 \sigma(x)}{dx^3} \right|_{x=0} = 2\beta^3 C_1 + 2\beta^3 C_2 - n_1 \left. \frac{d^4 \tau(x)}{dx^4} \right|_{x=0} - n_2 \frac{d^3 q}{dx^3} \quad (42)$$

$$C_2 = -\frac{E_a}{t_a} \frac{1}{2\beta^2} \frac{1}{b} D^* M_T(0) - \frac{n_1}{2\beta^2} \left. \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} \right|_{x=0} \quad (44)$$

Pour des ordres élevés, la dérivée du chargement q devient égale à zéro. Le remplacement des conditions aux limites dans les deux équations ci-dessus conduit à la détermination des deux constantes C_1 et C_2 qui sont données comme suit :

$$C_1 = \frac{E_a}{2\beta^3 t_a} \frac{1}{b} [V_T(0) - \beta M_T(0)] D^* - \frac{n_3}{2\beta^3} \tau(0) + \frac{n_1}{2\beta^3} \left[\left. \frac{d^4 \tau(x)}{dx^4} \right|_{x=0} + \beta \left. \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} \right|_{x=0} \right] \quad (43)$$

5. Vérification de la méthode

La présente méthode a été validée par la comparaison des résultats des contraintes d'interfaces avec ceux obtenus à partir de la méthode de Tounsi et al. (2007) [5, 6]. Pour cela, une poutre en béton simplement appuyée renforcée par des plaques en matériaux composites types CFRP est analysée. Les caractéristiques physiques et les propriétés mécaniques des matériaux utilisés sont rapportées aux tableaux suivants :

Tab. 01

Caractéristiques géométriques et propriétés des matériaux utilisés.

Matériaux	E_{11} (MPa)	E_{22} (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}	Largeur (mm)	Hauteur (mm)	(Epaisseur)
Béton	30000	30000		0.18	200	300	
L'adhésive	3000			0.35	200	4	
CFRP	140000	10000	5000	0.28	200	4	

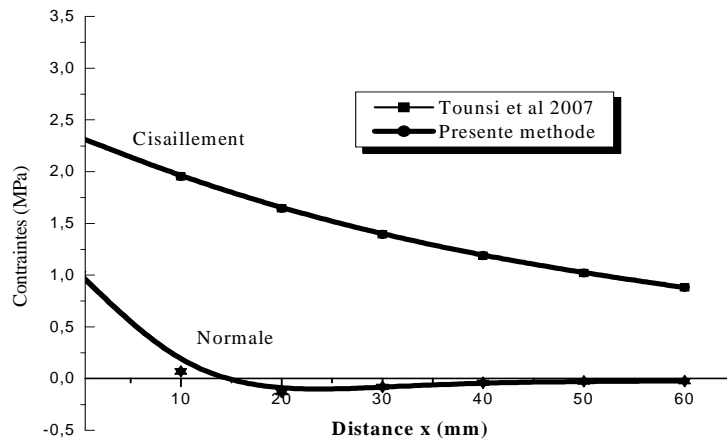


Fig. 4 : Comparaison des contraintes de cisaillement et les contraintes normales pour une poutre en béton renforcée par une plaque en fibres de carbone (CFRP) soumise à une charge uniformément répartie.

Tab.02

Comparaison entre les valeurs maximales des contraintes tangentielles et les contraintes normales pour le cas d'une charge uniformément répartie.

	STEEL		CFRP		GFRP	
	τ (MPa)	σ (MPa)	τ (MPa)	σ (MPa)	τ (MPa)	σ (MPa)
Tounsi et al.(2007)	2.7159	1.0823	2.3303	1.0069	1.4305	0.7775
La présente méthode	2.7159	1.0823	2.3303	1.0069	1.4305	0.7775

La Fig.4 présente la variation des contraintes de cisaillement et les contraintes normales pour une poutre en béton renforcée avec une plaque en fibres de carbone et soumise à une charge répartie [8, 9].

Comme il est illustré dans les figures 4, il existe une grande concordance entre les deux méthodes.

Les résultats obtenus à partir de la méthode de Tounsi et al. (2007) [5], coïncident avec ceux issus de la présente méthode comme il est présenté dans le Tableau 2.

6. Etude paramétrique

Dans ce paragraphe, nous présentons des résultats numériques de la présente méthode afin d'examiner l'effet des différents paramètres qui gouvernent la distribution des contraintes au niveau de l'interface poutre FGM – plaque de renforcement.

Ces paramètres consistent en: l'influence du nombre de variante « n », Influence du rapport (E_u/E_L), épaisseur de la couche d'adhésif « ta », épaisseur de la plaque de renforcement « tp » et longueur du bord de la plaque au support (l'appui) notée « a ». Pour cette étude, deux poutres FGM type Aluminium-Céramique et Acier-Céramique, sont

utilisées. Les caractéristiques de ces matériaux sont reportées dans le Tableau 03.

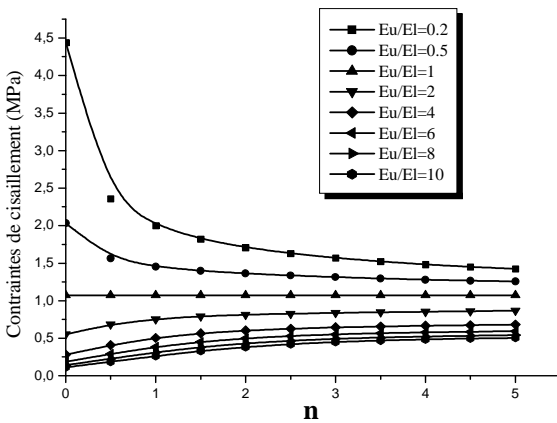
Tab.03

Caractéristiques de la poutre en FGM utilisée.

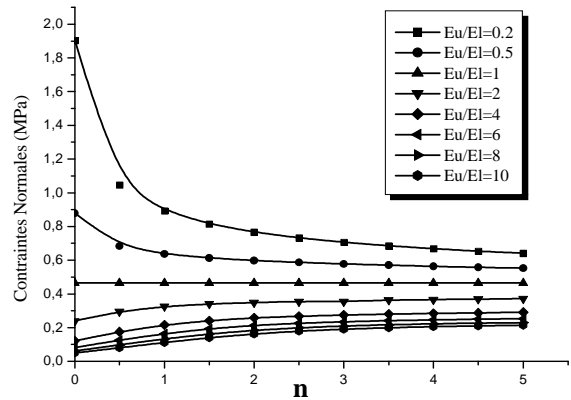
Matériaux	Module de Young « E »MPa
Aluminium (AL)	70000
Céramique (Al_2O_3)	380000
Acier (Ni)	214000

6.1. Influence de l'indice matériel

Dans la Fig.5 (a et b), on représente la variation des contraintes d'interface en fonction de l'indice « n » et ce pour différentes valeurs du rapport (E_u/E_L).



(a) contraintes de cisaillement



(b) Contraintes normales.

Fig. 5: Influence du nombre de variante de la poutre non homogène FGM renforcée par une plaque de fibre de carbone.

D'après les résultats trouvés (figure.5), on remarque que l'augmentation du rapport (E_u/E_L) provoque une réduction des contraintes de bords.

6.2. Influence de la constante matérielle « n » sur les contraintes d'interfaces de différent type de poutre « FGM »

Cas d'une poutre FGM type (Aluminium –Céramique)

: La variation des contraintes d'interface en fonction de la constante matérielle « n » pour une poutre composée de deux matériaux (E_L) Aluminium et (E_U) céramique) renforcée par une plaque en acier est représentée dans la Fig.6.

A partir de la figure 6, on constate que plus la constante matérielle « n » augmente plus les contraintes de cisaillement à l'interface augmentent rapidement, la même remarque est valable pour les contraintes normales mais ses valeurs tendent à se stabiliser.

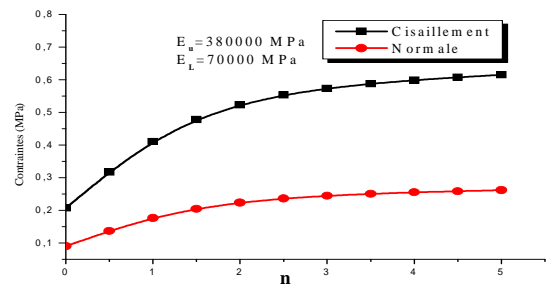


Fig. 6: Influence du nombre de variant d'une poutre non homogène (Aluminium –Céramique) FGM renforcée.

Cas d'une poutre FGM type (Acier–Céramique) : La figure.7 présente la variation de la constante matérielle « n » pour une poutre composée de deux matériaux (E_L) Acier et (E_U) céramique) renforcée par une plaque en acier.

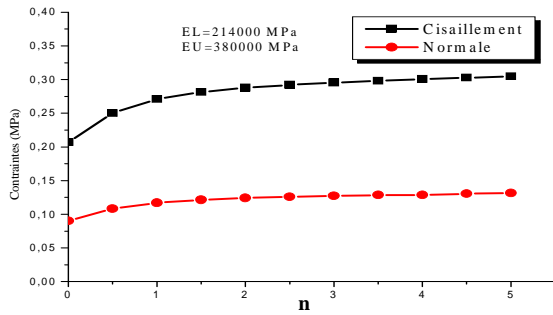


Fig.7: Influence du nombre de variante d'une poutre non homogène (Acier -céramique) FGM renforcée.

On constate aussi une augmentation des contraintes d'interfaces en fonction de l'augmentation de la valeur de la constante matérielle « n ».

Donc pour être dans le cas le plus défavorable, il est préférable de prendre des petites valeurs de la constante matérielle « n » de la poutre non homogène FGM pour avoir une faible contrainte.

6.3. Effet de l'épaisseur de la couche d'adhésif

La variation des contraintes d'interface en fonction de l'épaisseur de la couche d'adhésif est représentée dans la Fig.8.

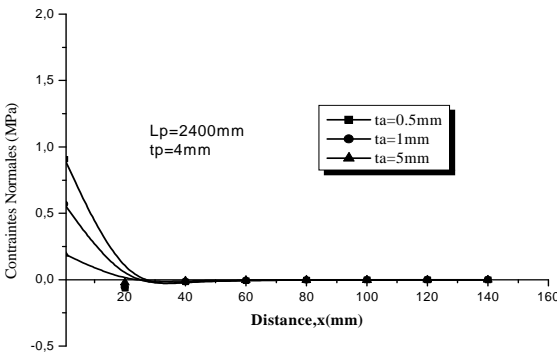
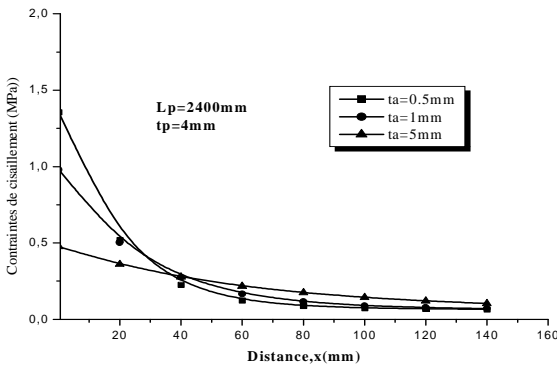


Fig. 8 : Effet de l'épaisseur de la couche d'adhésive sur les contraintes d'interface d'une poutre FGM

L'accroissement de l'épaisseur de la couche d'adhésif conduit à une réduction significative de la concentration des contraintes. C'est pourquoi, il est fortement recommandé d'utiliser une couche d'adhésif plus épaisse aux voisinages des bords.

6.4. Effet de l'épaisseur de la plaque de renforcement

L'épaisseur de la plaque est un facteur important dans le dimensionnement des structures renforcées, dans la Fig.9, nous présentons l'effet de l'épaisseur de la plaque sur les contraintes d'interfaces.

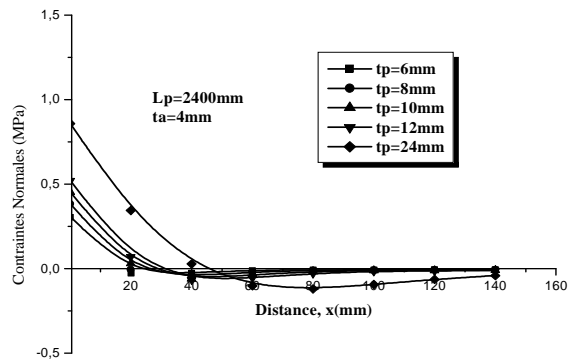
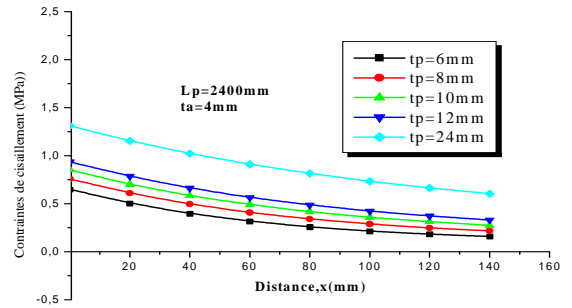


Fig.9 : Effet de l'épaisseur de la plaque d'acier renforcée sur les contraintes d'interface (Cas d'une poutre FGM)

Cette figure illustre la proportionnalité qui existe entre les deux paramètres précités.

On remarque que le maximum de la valeur des contraintes est à l'extrémité de la plaque de renforcement. C'est un phénomène appelé effet de bord, qui est le signe des premières défaillances de la structure.

6.5. Effet de module d'élasticité de la plaque de renforcement

Dans la Fig.10, on présente l'effet des types de renfort (plaque en acier, polymère renforcé de fibre de carbone, polymère renforcé de fibre de verre) sur la variation des contraintes d'interface pour le cas d'un chargement réparti d'une poutre FGM.

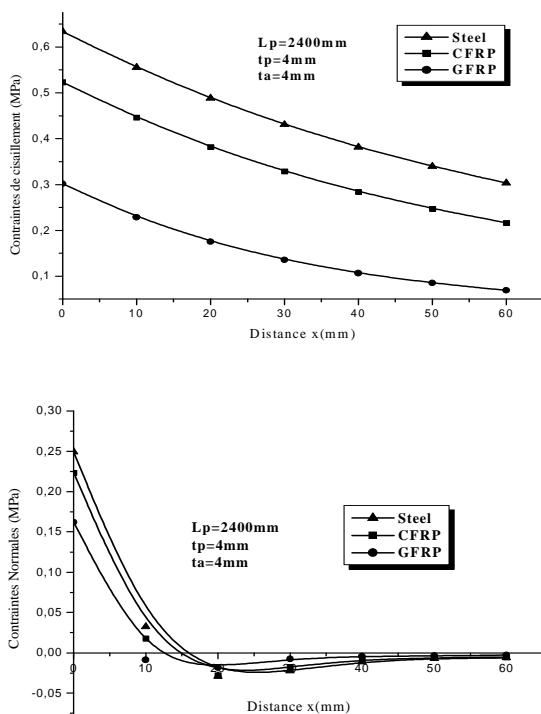


Fig. 10 : Effet des types de renfort sur la variation des contraintes d'interface d'une poutre FGM soumise à une charge répartie.

Ceci nous a permis de montrer que l'utilisation d'une plaque en acier engendre des contraintes plus élevées que celles obtenues par l'application des plaques en composites (polymère renforcé de fibre de carbone et polymère renforcé de fibre de verre).

7. Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'évolution des contraintes de cisaillement et les contraintes normales à l'interface des structures de type poutres non homogènes (FGM) avec une fraction volumique de type puissance, renforcées par des tôles en acier ou des plaques en matériaux composites. Les résultats trouvés ont été validés par le modèle de Tounsi et al. (2007) [5].

L'étude paramétrique nous a permis d'analyser l'influence du nombre de variant « n » (constants matériels) des poutres non homogènes FGM, sur l'épaisseur de la couche d'adhésif, de l'épaisseur de la plaque de renforcement et la longueur du bord de la plaque au support.

Au terme de ce travail, les conclusions suivantes peuvent être dégagées :

- Un effet de concentration des contraintes aux bords de la plaque est constaté,
- La valeur maximale de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale est à l'extrémité des adhérents. Cette concentration est

proportionnelle à l'épaisseur d'adhésive et inversement proportionnelle au module d'élasticité de la plaque et à l'épaisseur de la plaque composite,

- l'utilisation d'un rapport (E_u / E_L) élevé favorise la réduction des contraintes de bords,
- L'augmentation des contraintes d'interfaces en fonction de l'augmentation de la valeur de la constante matérielle « n », permet de réduire les contraintes aux bords, sur les poutres non homogènes FGM. Par conséquent, il est préférable de prendre des petites valeurs de constante matérielle « n ».

Référence

- [1] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites Science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- [2] C. Baron., S. Nalili, propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide, *compte rendu mécanique*; 336(9):722-730, 2008.
- [3] Jin .Z.H, Batra .R.C, *Journal of Thermal Stresses* 19 (1996) 317339.
- [4] Meradjah Mustapha, Benyoucef Samir, Tounsi Abdelouahed ,El Abbas Adda Bedia and Merdaci Slimane. Interfacial Stresses in Plated Beams with Exponentially-Varying Properties, *Journal of Adhesion Science and Technology* 0 (2010) 1-19.
- [5] Tounsi .A, Benyoucef .S. Interfacial stresses in externally FRP-plated concrete beams *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Volume 27, Issue 3, April 2007, Pages207-215.
- [6] Benyoucef.S, Tounsi.A , E.A. Adda Bedia, Meftah S.A. Creep and shrinkage effect on adhesive stresses in RC beams strengthened with composite laminates. *Composites Science and Technology*, Volume 67, Issue 6, May 2007, Pages 933-942.
- [7] Bao.G, Wang .L, *International Journal of Solids and Structure* 32 (1995) 2853- 2871.
- [8] Chen JF, Teng JG. Shear capacity of FRP-strengthened RC beams: FRP debonding. *Construct Build Mater* 2003;17:27-41.
- [9] Delale .F, Erdogan .F, *ASME Journal of Applied Mechanics* 50 (1983) 609-614.
- [10] Lee .Y.D, Erdogan .F, *International Journal of Fracture* 69 (1995) 145-165.