L'OPTIMISATION DE LA RETENTION DANS LA REASSURANCE CAS DE LA CAAR BRANCHE TRANSPORT MARITIME

Dr. Hizia ZAID

Maitre de conférences
Ecole nationale Supérieure
de Statistique et d'Economie
Appliquée (Koléa)

Mr. Nazim Derrarja

Master Finance Actuariat
Ecole nationale Supérieure
de Statistique et d'Economie
Appliquée (Koléa)

RESUME

Dans cette étude nous intéressons au calcul d'un seuil optimal de réassurance en Quote-part. L'objectif est de réduire au maximum le risque de faillite (probabilité de ruine), puis de déterminer un niveau qui minimisera les fluctuations du résultat par le modèle de « De Finetti », qui examinera, sous la contrainte du gain espéré, la possibilité de la minimisation de la volatilité (la variance) du résultat de la cédante après réassurance.

Mots clés : Réassurance, probabilité de ruine, modèle de Finnetti

1. INTRODUCTION

La réassurance constitue un vecteur efficace pour réduire les risques des assureurs vis à vis de leurs engagements ainsi que pour optimiser leurs exigences en fonds propres. Donc le rôle des réassureurs consiste donc à soulager les compagnies d'assurance pour les risques les plus importants en les répartissant sur le marché mondial de la réassurance.

Grace à la réassurance, les assureurs peuvent augmenter leur volume d'affaires et donc leur encaissement de primes. En effet, ils peuvent augmenter leur plein de souscription tout en maintenant un plein de conservation acceptable et raisonnable, autrement dit « la rétention », qu'on peut la définir comme étant la somme maximale qu'un assureur est prêt à débourser pour son propre compte. A Chaque branche d'assurance on associe un niveau de rétention. La détermination de l'ensemble de ces niveaux constitue le pilier de conception d'un programme de réassurance.

Le choix d'une rétention et d'un programme de réassurance adapté par une compagnie est une décision parmi les plus importantes à prendre pour l'avenir de celle-ci. En effet, le résultat de la compagnie est directement lié au niveau de la rétention.

La fixation du seuil de rétention de chaque compagnie d'assurance constitue une problématique autour laquelle plusieurs articles et études ont été élaborés.

La difficulté pour une compagnie d'assurance de choisir la meilleure structure de réassurance est connue, quel que soit la branche concernée. Ces structures de réassurance doivent être mesurées non seulement sur une trajectoire standard, mais également selon des scénarios de chocs, ce qui nécessite un professionnalisme de plus en plus poussé afin de pouvoir déterminer la rétention de niveau optimal (le plus favorable possible).

En effet, un niveau de rétention surévalué peut entrainer des fluctuations dépassant la marge de tolérance, dans le cas contraire la compagnie aura un recours massif à la réassurance pour plus de sécurité, donc une bonne partie de ses fonds propres restent inutilisés.

Ainsi, les méthodes permettant de déterminer la rétention se divisent en deux catégories : la méthode empirique et les méthodes actuarielles. Ces dernières permettent de mieux représenter le profil des risques et d'en déduire les structures de réassurance optimales.

2. PRESENTATION DU CAS D'ETUDE

La « CAAR » a mis à notre disposition une base de données de l'exercice de 2015 de la branche de transports : faculté maritime, cette dernière se subdivise en deux parties :

- La prime d'assurance ;

- Le montant de sinistre ;

Pour le besoin de notre étude, il a fallu avoir comme donné la prime de chaque assuré et les montants de sinistre pour chaque risque, mais on a trouvé plusieurs anomalies pour ce qui concerne ces donné, alors on a rétréci notre base de donnée a **« 258 »,** dont un échantillon de « **16 assuré** ».

Il est à noter que notre portefeuille est réassuré en un traité en « Quote-part » avec un niveau de rétention de « **30% »**. Ce qui signifie que le montant de sinistre pris en charge par la CAAR dans cette branche et de « **16 423 734.945 DZD »,** et le montant des prime conserver et de « **31 109 931.438 DZD ».**

Donc on n'a aussi eu comme donnée pour notre étude le gain espéré de la compagnie pour cette branche.et aussi le chargement du réassureur.

On a vu au prêt de la direction de réassurance de la CAAR que le gain espéré et calculer sur la base d' taux par rapport au primes encaissés, est ce taux est égale à : **30%**.

Et ce qui concernant le taux de chargement du réassureur il peut varier entre 10% et 20%, donc il reste à le définir.

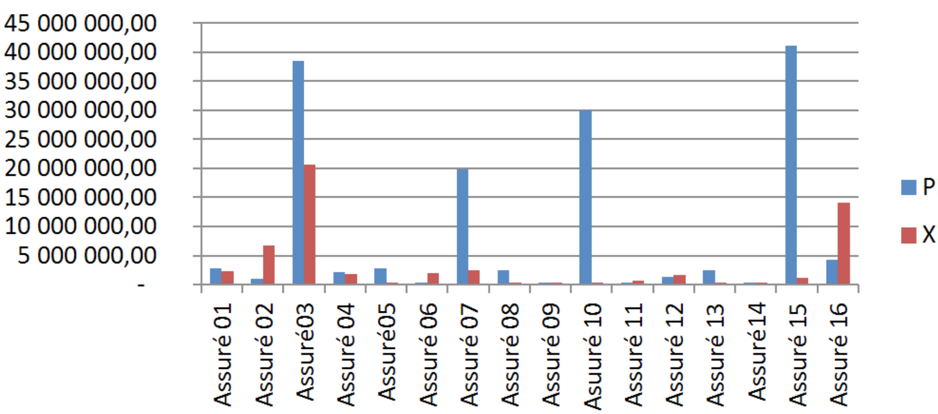
3. L'ANALYSE DE LA PRIME ET DE LA SINISTRALITE

Dans cette base de donnée on a constaté que les prime encaissé varie en fonction des sinistre, ce qui veut dire à chaque fois que la sinistralité est plus grande plus la prime est grande aussi, et cela est à cause de la politique de solvabilité de la compagnie.

Par exemple si la compagnie prend les primes d'un montant inférieur ou égal au montant de sinistre, cela va causer sa faillite ou des difficultés financière.

Donc pour la préservation du patrimoine de la compagnie, l'assureur doit toujours choisir les primes les plus rentables pour ces bilans.

Figure N°1 : Histogramme représentatif du rapport prime-sinistre



Source : Données de la CAAR

Sachant que les « **Pi** » c'est les primes nettes, et les « **Xi** » c'est la sinistralité ou les sinistres à payer durant l'exercice.

Tableau N° 1 : Tableau résumé des primes et des sinistres à payer

	Pi	Xi
Assuré 01	2 756 940,77	2 248 850,67
Assuré 02	1 019 877,97	6 786 729,51
Assuré03	38 545 950,19	20 682 634,03
Assuré 04	2 134 367,79	1 799 000,19

Assuré05	2 785 509,68	396 997,21
Assuré 06	100 794,38	2 042 891,70
Assuré 07	19 739 076,39	2 433 640,35
Assuré 08	2 472 340,03	245 286,21
Assuré 09	238 189,76	238 300,01
Assuré 10	30 037 456,99	239 819,97
Assuré 11	132 000,00	598 125,81
Assuré 12	1 251 017,51	1 688 326,03
Assuré 13	2 486 250,00	14 700,00
Assuré14	210 500,00	105 083,13
Assuré 15	41 129 939,36	1 178 116,46
Assuré 16	4 227 039,07	14 047 281,87

Source : base de données de la CAAR.

On remarque que la CAAR a un portefeuille homogène, car la majorité des primes encaissées varie de façon à préserver la continuité de la compagnie, dans la plupart elle réalise un profit, et dans certain elle encaisse une perte, mais le plus importent dans tout cela et de réaliser un chiffre d'affaire positif chaque année.

Pour cela la compagnie fait appelle à la réassurance pour d'une part maximiser le profit, et d'autre part minimiser la volatilité.

4. OPTIMISATION DE LA RETENTION

La détermination d'un seuil de rétention repose sur deux méthodes : empirique et actuarielles. Les méthodes actuarielles prennent en considération le caractère aléatoire de l'activité d'assurance et ce à travers la modélisation des différentes variables représentées par le montant et le nombre de sinistre d'où l'avantage qu'elles détiennent par rapport à la méthode empirique.

Pour ce qui concerne notre problématique, nous avons opté pour la méthode de **De Finetti** qui privilégie l'approche moyenne variance.

Mais en premier lieu on va passer par le calcul de **la probabilité de ruine** qui va nous servir à montrer l'utilité d'un programme de réassurance.

5. LA METHODE DE LA PROBABILITE DE RUINE

L'application de la probabilité de ruine pour les différents types de réassurance est difficile surtout pour les types de réassurances non proportionnelle, car elle demande plus de statistiques.

Pour simlifier l'étude, on s'intéressera seulement aux types de réassurance proportionnelle. C'est –à-dire, la détermination d'une rétention optimale pour les traites en Quote-part.

Cette étude, se base sur notre portefeuille « **transport faculté maritime** ».

On va calculer la probabilité de ruine dans deux cas, le premier cas où les réserves sont nulles, donc on prend en considération les primes reçues par la compagnie, dans le deuxième cas va montrer l'impact des réserves sur la probabilité de ruine.

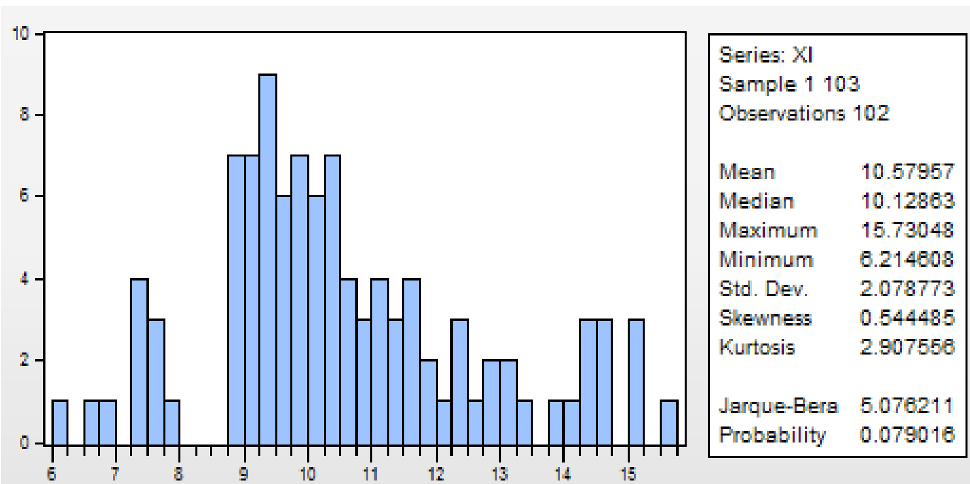
D'apert les actuaires de la CAAR on sait que :

- H1 : les sinistressont indipendants entres eux, identiquement distribués.

- H2 : les montants de sinistres X suivent une loi normale

On a voulues en être sûre, alors on fait un test de normalité à l'aide d'Eviews 8 :

Figure N° 2 : Test de Normalité



Source : Elaborer par nos soins en utilisant Eviews 8.

Nous remarquons que la valeur de la statistique de Jarque-Bera est **5.07< 5.99** (valeur de khi2 à 1 degré de liberté) au seuil 5%, d'autant que la probabilité est supérieure à 0.05, donc accepte l'hypothèse de normalité.

D'après ce résultat, nous constatons que la distribution des sinistres suit une loi normale.

Mais en premier lieu rappelons la fonction de la probabilité de ruine :

$P\ (\text{ruine}) = P(X > R+\Pi(X))$

Où $\Pi(X) = (1+\lambda)\ E(x)$ représente la prime technique, lorsque le chargement de la prime pure est proportionnelle à l'espérance mathématique.

X : le montant annuel cumulé des sinistres.

Π(x) : la prime technique.

R : le montant des réserves affectées au risque.

$$P(\text{ruine}) = P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)} > \frac{R+CT}{\sigma(X)}\right)$$

$$P(\text{ruine}) = P\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)} > \frac{R+E(X)}{\sigma(X)}\right)$$

P(ruine) = 1- F0((R+λ.E(X))/Б(X))

Nous avons comme donné :

E(X) = (∑Xi / n)=3 421 611,45 DZD

Б(X) = (∑((Xi – E(X))/n)=5 630 095.52 DZD

Avec un chargement de sécurité : λ = 10%

Donc La prime sera égale à :

Π(x) = (1+0.1) × 3 421 611,45

Π(x) =3763772,6

Dans le cas où les réserves sont nulles :

Cas 01 R=0 :

P(ruine) = 1- F0 (λE(X) / Б(X))

P(ruine) = 1- F0(0.1×3 421 611,45/5 630 095.52)

P(ruine)=1- F0(0.0607) où F0(0.0607) =0.5239

P(ruine)=1-0.5239

Nous aurons :

P(ruine)= 0,4761 (47,61%)

La probabilité de ruine est une fonction décroissante du taux de chargement λ . plus la prime pure est chargée, plus l'assureur est à l'abri des fluctuations du montant total de sinistres pour l'année en cours.

Cas 02 R≠0 :

Nous supposons que :

R= 1 000 000 DZD

Donc :

P(ruine) = 1- F0((R+λ.E(X))/Б(X))

P(ruine) = 1- F0(1 000 000+0.1×(3 421 611,45)/5 630 095.52)

P(ruine) = 1- F0(0.416) où - F0(0.238)= 0,5910

P(ruine) = 1-0,5910

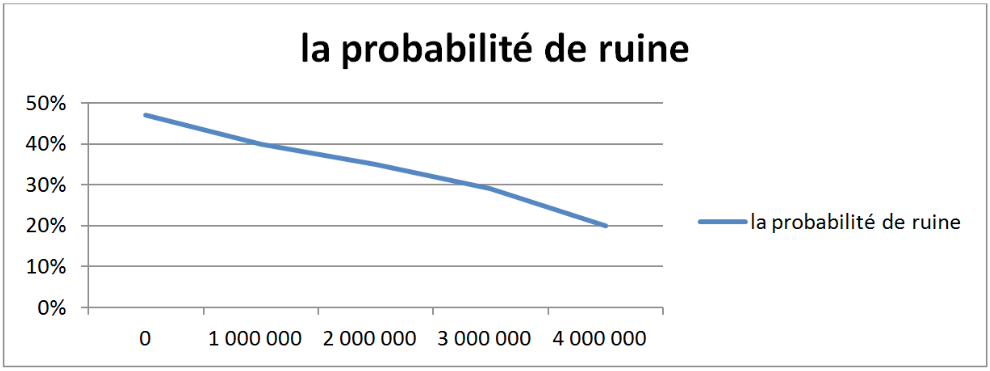
Alors nous avons :

P(ruine) = 0,409 (40,9%)

Grace à l'introduction d'une réserve affectée au risque, la probabilité de ruine passe de l'ordre **40 %** au lieu de **47%** en absence de réserve (c'est- -à dire lorsque R=0).

Par conséquent, l'utilisation d'une réserve affectée au risque améliore la sécurité de l'assureur.

Figure N° 3: courbe représentatif de l'impact des réserves sur la probabilité de ruine



Source : Elaborer par nos soins

Le calcul de coefficient de sécurité

Le coefficient de sécurité (**T**) est égale à :

T= (R + E(B)) / Б(B)

Avec :

E(B)= 3 421 611,45= E(X).

Б(B) =5 630 095.52=Б(X)

R= 2 000 000

Donc : T= (R + λ E(X)) / Б(X)

Nous avons :

T= (1 000 000+0.1 × (3 421 611,45)) /5 630 095.52)

T=0,238

En pratique un coefficient de sécurité au moins égale à 4 est jugé satisfaisant.

Nous avons **T= 0,238<0,4** , donc nous faisons appel à la réassurance.

6. Détermination de la rétention optimale

Nous calculerons la rétention d'une traité en Quote-Part de la branche « **Transport facultémaritime** » à partir du coefficient de sécurité, c'est-à-dire l'assureur cherche la plus grande valeur de vérifiant l'inégalité **TØ>4**

TØ = [(R+ØλE(X))/ ØБ(X)] ≥ 4

Donc:

Ø< R / (4Б(X) – λE(X))

Ø< 1 000 000/(4×(5 630 095.52)-0.1×(3 421 611,45))

Ø<0.045 (5%)

Donc pour que T soit au moins égale à 4, il faut que la rétention soit inférieur à 5%.

L'assureur conserve 5% de chaque risque, et cède au réassureur les 95 % qui restent.

7. L'éffet de la rétention sur la probabilité de ruine

P(ruine) = 1- F0((R+**Ø**λ.E(X))/ **Ø**Б(X))

P(ruine) =1-F0((1 000 000+ 0.05×(0.1)×(3 421 611,45))/0.05 × (5 630 095.52))

P(ruine) =1-F0(3,613)   où F0(3,613) =0.99985

Soit :

P(ruine) =0,00015

En absence de la réassurance, lorsque = 1, nous avons trouvé une probabilité de ruine qui est égale à **40,9%** par contre si l'on cède une partie de risque au réassureur nous arrivons arrive à une probabilité de ruine qui se rapproche de zéro, alors la réassurance améliore de façon considérable la sécurité de l'assureur.

8. La rétention par la méthode de « de Finetti(1940) »

Nous supposons que la branche d'assurance étudiée est caractérisée par les hypothèses suivantes:

- la sinistralité agrégée sur une période d'un an s'écrit : $X = \sum_{i=1}^{n} Xi$
- i=1….n, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées
- la prime pure servant à couvrir en moyenne la sinistralité vaut **P_{pure} = E(X)**
- L'assureur applique un chargementà la prime pure. Ce chargement est censé représenter le profit de l'assureur. Nous n'incluons pas dans ce pourcentage les frais de gestion et d'acquisition, ainsi que les taxes éventuelles.
- La prime technique utilisable pour payer les sinistres et d'éventuelles primes de réassurance vaut donc P = (1+ε_i^r) E[X]. Nous noterons G le profit de l'assureur. Clairement, sans réassurance, ce profit s'écrit sous la forme : G = P - X = (1+ε_i^r) E[X]- X. Ainsi, l'assureur peut s'attendre à générer un gain moyen annuel de E [Z] = ε_i^r E[X], ce qui est logique étant donné que la prime pure est sensée couvrir en moyenne les sinistres.
- Donc rappelons la fonction du gain de l'assureur selon « de Finetti » :

Avec : $$Z(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - (1 + \varepsilon_i^{re})\theta_i E(X_i) - (1 - \theta_i)X_i$$

Avec :

$\boldsymbol{\theta_i}$**:** Le taux de rétention.

$\boldsymbol{P_i}$: La prime nette.

$\varepsilon_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{re}}$: Le taux de chargement

$\boldsymbol{E(X_i)}$: La prime pure.

$\boldsymbol{X_i}$: Le montant du sinistre.

Donc on retrouve la somme des prime encaissées $(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P_i})$ moins la somme des primes cédées au réassureur ($(\boldsymbol{1} + \varepsilon_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{re}})\boldsymbol{\theta_i}\, \boldsymbol{E(X_i)}$) moins la sinistralité en rétention ($(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\theta_i})\boldsymbol{X_i}$).

La proposition de « de Finetti » s'écrit donc :

$$\underset{\theta_1,\dots,\theta_n}{Min\, Var}[Z(\theta_1,\dots,\theta_n)]$$

Sous contrainte que $E[Z(\theta_1,\dots,\theta_n)]=k$

Avec :

$\boldsymbol{E}[Z(\boldsymbol{\theta_1},\dots,\boldsymbol{\theta_n})]=k$est le gain espéré par l'assureur et « k » est une constante.

Comme on est dans un traité proportionnel en Quote-part donc :

$\boldsymbol{\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n}$

c'est –à-dire un seul taux pour toutes les polices ;alors la fonction du gain devin comme telle :

$$Z(\theta) = \sum_{i=1}^{n} (P_i - (1 + \varepsilon_i^{re})\theta E(X_i) - (1-\theta)X_i$$

Alors la fonction d'objectif est :

$$\underset{\theta=\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n}{Min\, Var}[Z(\theta)]$$

Sous contrainte que $E[Z(\theta)]=k$

La contrainte s'écrit comme suit :

$$E(Z(\boldsymbol{\theta}))=k \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{re} E(X_i)\theta = -k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Cette méthode nécessite comme input d'une part :

- le gain espéré ;

- le chargement de sécurité de l'assureur et celui du réassureur.

Et d'autre part, la modélisation de **la charge de sinistre annuelle S** dont le but est d'en

déduire l'espérance et la variance de la sinistralité.

Donc on a :

$$\varepsilon_i^{re} = \varepsilon_i^{assuré} = 15\%$$

Pour ce qui concerne le gain espéré il est et donné comme suit**500 000,00 DZD** ; **20 000 000,00DZD** ; **45 000 000,00DZD** ;**70 000 000,00 DZD** ; **100 000 000,00 DZD.**

Donc la fonction de la rétention est :

$$\theta = \frac{-k + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{re} E(X_i)}$$

Avec :

$$Min\ Var[Z(\theta)]$$

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$$

Sous contrainte que $E[Z(\theta)] = k$

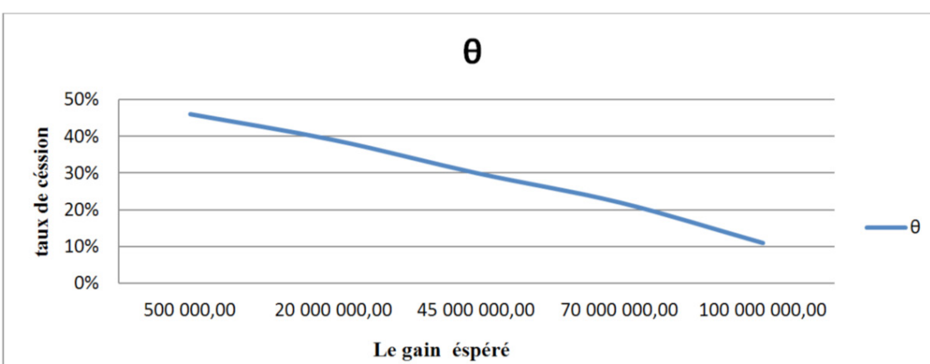
Donc à l'aide « solveur sur Excel » on a obtenus les résultats suivant :

Tableau N° (2) : résultat de l'application de la méthode de De Finetti

K	Θ	ε	**Min Б(X)**
500 000,00	46%	15,00%	1 203 390,11
20 000 000,00	39%	15,00%	1 022 918,14
45 000 000,00	30%	15,00%	791 543,83
70 000 000,00	22%	15,00%	560 169,51
100 000 000,00	11%	15,00%	282 520,33

Source : Elaborer par nos soins

Figure N° 4: courbe des résultats de l'application de la méthode de De Finetti



Source : Elaborer par nos soins

Donc on remarque que les taux de rétentions varient en fonction du gain éspéré ; à chaque fois que le gain éspéré augmente, l'assureur doit cédé un portion plus grande de la prime et du risque au réassureur, ou concervé une portion plus petite de la prime et du risque, alors il y'à une relation inverse entre le gain éspéré et la rétention,on remarque aussi que la volatilité diminue a chaque fois que le gain espéré augmente, et c'est logique car a chaque fois que l'assureur réalise des gains plus grandes il est moins vulnérable.

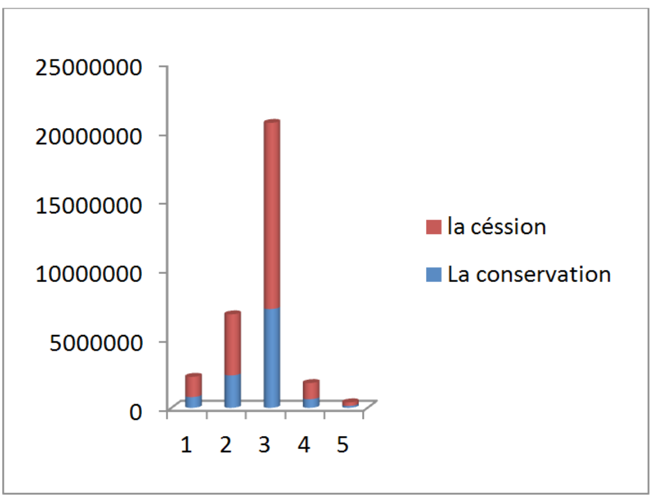
Ce pendant la CAAR éstime que le gain espéré représante 30% des prime espéré, donc le gain et de :

Tableau N° 3:Résultat de l'application de la méthode de **De Finetti avec un chargement de 15% et un gain espéré de 45 000 000DZD**

K	θ	ε	Min Б(X)
45 000 000,00	30%	15,00%	791 543,83

Source : Elaborer par nos soins

Figure N°5 : **Histogramme d'une rétention optimale obtenus par les résultats de De Finetti en Quote-part.**



Source : Elaborer par nos soins

Apprêt avoir déterminé la rétention optimale pour un chargement de 15%, on va chercher a déterminé un chargement qui va améliorer le gain de l'assuré, et cela va se faire en variant ce taux de chargement du réassureur.

Toujours en utilisant les même fonctions et à l'aide de « solveur sur Excel » on aura :

Cas ou Ɛ ire =10% :

Tableau N° (4) :Résultat **de l'application de la méthode de De Finetti avec un chargement de 10%**

K	θ	ε	Min Б(X)
500 000,00	69%	10%	1 800 585,16
20 000 000,00	59%	10%	1 534 377,22
45 000 000,00	46%	10%	1 187 315,73
70 000 000,00	32%	10%	840 254,26
100 000 000,00	16%	10%	423 780,49

Source : Elaborer par nos soins

Cas où ε_i^{re} = 20% :

Tableau N° (5) :Résultat **de l'application de la méthode de De Finetti avec un chargement de 20%**

K	θ	ε	Min Б(X)
500 000,00	35%	20%	902 542,58
20 000 000,00	29%	20%	767 188,60
45 000 000,00	23%	20%	593 657,87
70 000 000,00	16%	20%	420 127,13
100 000 000,00	8%	20%	211 890,24

Source : Elaborer par nos soins

On a remarqué que le meilleur chargement et le cas où il est égale à 10%, car la portion qui conservera l'assureur est la plus grande, mais si en vois du côté de l'écart type le cas où le chargement et égale à 20% il est le plus petit, donc le choix du chargement reste à la décision de l'assureur selon sa politique (si il est riscophobe ou pas).

Conclusion

A travers cette étude, nous avons déterminé une structure de réassurance optimale par une méthode actuarielle pour le portefeuille transport faculté maritime.

L'application de la méthode de la probabilité de ruine nous à aider a voire l'effet des resserves sur la solvabilité de la compagnie d'une part, et d'une autre part avons montré que la réassurance peut améliorer la solvabilité de la compagnie tout en réduisant cette probabilité en la faisant tendre vers zéro.

L'application de la méthode de « De Finetti » sur la base de données de la CAAR, a donné plusieurs résultats optimaux qui se varient en fonction du gain espéré et du taux de chargement du réassureur. Etant donné que la CAAR estime ses gains à 30%

des primes encaissées, alors nous avons déduit les gains qui s'élèvent à 45 000 000,00 DZD avec un taux de cession de 30% et un taux de chargement de 15%. . Mais cette décision reste une des décisions que peut prendre l'assureur, en fonction de sa propre politique et ses propres caractéristique (aversion ou non au risque).

Références

1. Christian Partrat ; Jacque Blondeau ; «la réassurance approche technique » ; Edition
2. Econmica ; France ; 2003.
3. François Couilbault, Constant Eliashberg ; « les grand principes de l'assurance » ;
4. Edition 8ème ; Paris.
5. Jean-François WALHIN ; « la réassurance » ; Edition Larcier ; France.
6. Griselda DEELSTRA, Guillame PLANTIN ; « THEORIR DU RISQUE ET DE
7. REASSURANCE » ; Edition Economica ; France ; 2006.
8. Véronique Parnin ; « initiation à la réassurance » ; Scor campus formation entreprise;
9. 2000.
10. Revue n°1 ; problème de réassurance dans les pays en voie de développement.
11. Revue Sigma « l'assurance dans le monde en 2006 : retour en force des primes vies », n°4 /2007, SWISS RE.
12. SwissRe « introduction à la réassurance » ;7ème édition ; suisse ; 2003 .
13. BOUREGHOUD Bilal ; « la réassurance technique et marchés » ; colloque international ;Faculté des sciences économiques, commerciales et science de gestion ; université de Bejaia ; 25-26 avril 2011.
14. Décret exécutif n° 11-422, du 08 décembre 2011
15. Rapport d'activité de la CAAR.
16. Rapport d'activité de la CCR.