Inégalités variationnelles multivoques mixtes et algorithmes de points fixes

Boualem Alleche, Samia Bouzidi & Djamila Hazedje

Laboratoire de Mécanique, Physique et Modélisation Mathématique

Université de Médéa. Algérie

alleche.boualem@univ-medea.dz

Résumé

Nous démontrons dans ce papier que, pour des multifonctions localement Lipschitziennes, les solutions des inégalités variationnelles multivoques mixtes peuvent être obtenues en utilisant le principe de contraction de Banach. Nous montrons également comment choisir un paramètre de régularisation pour pouvoir calculer ces solutions.

Expressions et mots clés : Inégalité variationnelle multivoque mixte,
convexité, sous-différentiabilité, monotonie, Lipschitzienne, point fixe.

Abstract

We prove in this paper that for locally Lipschitzian multivalued mappings, the solutions of multivalued mixed variational inequalities can be obtained by using the Banach contraction principle. Also, we show how to choose regularization parameters to compute these solutions.

Key words and phrases : Multivalued mixed variational inequality, convexity, sub-differentiability, monotony, Lipschitzian, fixed point.

Classification mathématique par sujets :

Primaire : 65K10, 90C25 ; Secondaire : 54C60, 54C65.

1 Introduction

Les inégalités variationnelles sont apparues comme une extention des principes variationnels et constituent une branche des mathématiques appliquées ayant de diverses applications.

En effet, et comme le montre de nombreux travaux, la théorie des inégalités variationnelles fournit un moyen simple et efficace et une méthode naturelle et commune pour l'étude des problèmes linéaires et non linéaires qui apparaissent en mécanique des fluides, en élasticité et en océanographie.

D'autre part, cette théorie offre aussi un puissant outil pour l'étude des problèmes d'équilibre que l'on rencontre en économie et réseaux de transport, optimisation, recherche opérationnelle, physique, et sciences de l'ingénieur ; voir, par exemple, [10, 11, 18, 19, 22, 23] et les références qui s'y trouvent.

Les méthodes basées sur la théorie du point fixe pour la résolution des inégalités variationnelles ont été largement utilisées par plusieurs auteurs (voir, par exemple, [5, 6, 7, 10, 13, 14, 16, 26, 27]) et plusieurs algorithmes ont été produits pour approcher les solutions.

Inspirés par plusieurs récents travaux, nous mettons en œ uvre, dans ce document, des techniques des inégalités variationnelles, utilisées notamment dans [5] et [7], pour étudier certains types d'inégalités variationnelles multivoques mixtes. Nous développons et adaptons quelques outils de la théorie du point fixe des multifonctions localement Lipschitziennes par rapport à la distance de Hausdorff pour construire des suites convergentes en utilisant le principe de contraction de Banach. Nous construisons des algorithmes convergeants pour approcher l'unique point fixe d'une certaine multifonction construite à cet effet et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution des inégalités variationnelles multivoques mixtes définies par des multifonctions localement Lipschitziennes et fortement monotones ou des fonctions sous-différentiables fortement convexes.

Et afin de rendre ce document plus accessible, nous faisons des rappels, en donnant des démonstrations courtes et directes, de plusieurs résultats d'analyse multivoque et d'analyse convexe extraits et adaptés au besoin de notre travail.

2 Notions et résultats préliminaires

Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction telle que $\mathrm{d}om(F)$ contienne C et $F(x)$ soit fermé, convexe et non vide, pour tout $x \in C$. On suppose que $\varphi: C \to \mathbb{R}$ est une fonction propre, convexe et sous-différentiable sur C.

On considère le problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte suivant : Trouver $x^* \in C$ tel que

$$\exists w^* \in F(x^*), \quad \langle w^*, y - x^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0 \quad \forall y \in C. \qquad (1)$$

Ce problème à déjà été considéré par plusieurs auteurs (voir [5, 6, 7, 10, 19, 25]). On appelle habituellement F l'opérateur de coût et C l'ensemble des contraintes.

Comme exemple, on considère le modèle d'*équilibre oligopolistique* où il y a n firmes en compétition pour la vente d'un bien sur un marché unique. On suppose que le prix p_i de chaque firme $i \in I = \{1, \cdots, n\}$ est une fonction de la quantité totale produite. Chaque firme i est caractérisée par un coût de production $c_i(x_i)$ qui dépend de sa propre production x_i. Supposons que le profit de chaque firme i est donné par

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i p_i \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - c_i(x_i) \quad \forall i = 1, \cdots, n.$$

On note par U_i l'ensemble stratégie de la firme i et on pose $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ l'ensemble stratégie du modèle. Un *équilibre de Cournot-Nash* est un vecteur $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ qui satisfait

$$f_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \cdots, x_n^*) \leq f_i(x^*) \quad \forall y_i \in U_i, \forall i = 1, \cdots, n.$$

A l'équilibre, aucune firme ne peut augmenter son profit, une fois fixées les quantités produites par les firmes concurrentes.

On peut consulter [19, 21, 22] pour voir que le problème de trouver le point d'équilibre de Cournot-Nash peut être, sous certaines conditions, formulé comme un problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1).

Pour l'étude du problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1), nous allons maintenant commencer par donner quelques notions et résultats d'analyse multivoque et d'analyse convexe qui sont fondamentaux pour la suite de ce document.

Tout au long de ce document, $\langle .,. \rangle$ désignera le produit scalaire Euclidien sur $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ sa norme associée.

Soit $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Rappelons que le domaine de φ est

$$\mathrm{d}om(\varphi) \overset{\mathrm{d}ef}{=} \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) < +\infty\}.$$

La fonction φ est dite *propre* si $\mathrm{d}om(\varphi) \neq \emptyset$.

Soit C une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1].$$

Remarque 2.1.

Si φ est définie sur C seulement, on prolonge alors, si nécessaire, la fonction φ à $\mathbb{R}^n$ en posant

$$\varphi(x) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash C.$$

Ce prolongement permet d'étendre toutes les notions d'analyse convexe qui vont suivre dans ce document à des fonctions définies sur C seulement.
On suppose désormais que $C \subseteq \mathrm{d}om(\varphi)$.

Définition 2.2.

La fonction φ est dite :

• *Convexe* sur C si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

Si l'inégalité ci-dessus est stricte dès que $x \neq y$, alors la fonction φ est dite *strictement convexe*.

• *Fortement convexe de module $\eta > 0$* ou simplement *η-fortement convexe* si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) - \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\eta \parallel x - y \parallel^2.$$

Il est clair que toute fonction η-fortement convexe est strictement convexe et que toute fonction strictement convexe est convexe. La réciproque est évidemment fausse en général.

Définition 2.3.

La fonction φ est dite :

• *Semi-continue inférieurement en un point $x \in C$* si pour toute suite $(x_n)_n$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Rightarrow \liminf_{n\to+\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x)$$

où $\liminf_{n\to+\infty}\varphi(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geq n}\varphi(x_k)$.

• *Semi-continue inférieurement sur C* si elle est semi-continue inférieurement en tout point de C.

Le résultat suivant, qui est fondamental pour la suite du document, est une adaptation d'un résultat classique d'optimisation (voir [2]).

Théorème 2.4.

Soit C un convexe, fermé et non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction de C dans $\mathbb{R}$. Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in C} f(x).$$

1. Si f est strictement convexe sur C, alors ce problème d'optimisation admet au plus une seule solution.
2. Si f est semi-continue inférieurement et η-fortement convexe sur C, alors le problème d'optimisation admet une unique solution.

Démonstration :

L'unicité : Supposons que l'on ait $x_0^* \neq x_1^*$ tels que

$$f(x_0^*) = f(x_1^*) = \min_{x \in C} f(x).$$

On a $y = \frac{1}{2} x_0^* + \frac{1}{2} x_1^* \in C$ et

$$f(y) = f\left(\frac{1}{2} x_0^* + \frac{1}{2} x_1^*\right) < \frac{1}{2} f(x_0^*) + \frac{1}{2} f(x_1^*) = \min_{x \in C} f(x).$$

Ceci est évidemment impossible. D'où $x_0^* = x_1^*$.

L'existence : Soit $(x_n)_n$ une suite dans C telle que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in C} f(x).$$

Cette suite existe toujours grâce à la propriété de la borne inférieure et est appelée suite minimisante.

En utilisant la η-forte convexité de f, on a

$$\frac{\eta}{8} \| x_n - x_m \|^2 \leq \frac{1}{2}\left(f(x_n) - \inf_{x \in C} f(x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x_m) - \inf_{x \in C} f(x)\right)$$

ce qui prouve que $(x_n)_n$ est de Cauchy et donc convergente vers x^*. Comme

$$\inf_{x \in C} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) \geq f(x^*)$$

et comme $x^* \in C$, alors $f(x^*) = \inf_{x \in C} f(x) = \min_{x \in C} f(x)$.

Nous allons maintenant faire un rappel de quelques notions d'analyse multivoque qui seront utilisées tout au long de ce document. Nous reviendrons vers d'autres notions d'analyse convexe, et notamment celle de la sous-différentiabilité, après avoir introduit la notion de multifonction.

Soit M une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $M \subseteq \mathrm{d}om(F) \overset{\mathrm{d}ef}{=} \{x \in \mathbb{R}^n | F(x) \neq \emptyset\}$.

Définition 2.5.

La multifonction F est dite :

• *Monotone* sur M si

$$\forall x_1, x_2 \in M, \forall w_1 \in F(x_1), \forall w_2 \in F(x_2)$$
$$\langle w_1 - w_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Si l'inégalité ci-dessus est stricte dès que $x_1 \neq x_2$, alors la multifonction F est dite *strictement monotone*.

• *Fortement monotone de module* $\beta > 0$ ou simplement β*-fortement monotone* sur M si

$$\forall x_1, x_2 \in M, \forall w_1 \in F(x_1), \forall w_2 \in F(x_2)$$
$$\langle w_1 - w_2, x_1 - x_2 \rangle \geq \beta \parallel x_1 - x_2 \parallel^2.$$

Il est clair que toute multifonction β-fortement monotone est strictement monotone et que toute multifonction strictement monotone est monotone. La réciproque est évidemment fausse en général.

Définition 2.6.

Soit $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe.

• On appelle *sous-gradient* de φ en $x_0 \in \mathrm{d}om(\varphi)$ l'ensemble

$$\partial\varphi(x_0) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \langle z, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

• La fonction φ est dite *sous-différentiable* en x_0 si $\partial\varphi(x_0) \neq \emptyset$.

Il est connu que l'opérateur sous-différentiel $x \mapsto \partial\varphi(x)$ d'une fonction convexe φ définit une multifonction monotone et que $\partial\varphi(x)$ est un fermé convexe, pour tout $x \in \mathrm{d}om(\varphi)$.

On peut consulter [24] pour voir qu'une fonction sous-différentiable φ est strictement convexe (*resp.*, β-fortement convexe) si et seulement si $\partial\varphi$ est strictement monotone (*resp.*, β-fortement monotone).

L'existence et l'unicité des solutions des inégalités variationnelles ont déjà été étudiées dans la littérature (voir [13, 22] et les références qui s'y trouvent). Le résultat suivant, qui est fondamental, concerne l'unicité de la solution de l'inégalité variationnelle multivoque mixte (1). L'existence sera traitée plus loin dans ce document.

Théorème 2.7.

Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1. La mutifonction F est strictement monotone sur C.
2. La multifonction F est monotone et φ est strictement convexe sur C

Alors le problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1) admet au plus une seule solution.

Démonstration :

Supposons que x_1^* et x_2^* soient deux solutions du problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1).

Soit $w_1 \in F(x_1^*)$ tel que

$$\langle w_1, x - x_1^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x_1^*) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Ce qui signifie que $-w_1 \in \partial\varphi(x_1^*)$; et en remplaçant x par x_2^*, on obtient

$$\langle w_1, x_2^* - x_1^* \rangle + \varphi(x_2^*) - \varphi(x_1^*) \geq 0.$$

Soit $w_2 \in F(x_2^*)$ tel que

$$\langle w_2, x - x_2^* \rangle + \varphi(x) - \varphi(x_2^*) \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

Ce qui signifie que $-w_2 \in \partial\varphi(x_2^*)$; et en remplaçant x par x_1^*, on obtient

$$\langle w_2, x_1^* - x_2^* \rangle + \varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*) \geq 0.$$

Après addition, on obtient

$$\langle w_1 - w_2, x_1^* - x_2^* \rangle \leq 0.$$

1. Supposons que F soit strictement monotone. Alors, si $x_1^* \neq x_2^*$, on obtient

$$\langle w_1 - w_2, x_1^* - x_2^* \rangle > 0.$$

Ceci est impossible compte tenu du fait que $\langle w_1 - w_2, x_1^* - x_2^* \rangle \leq 0$. D'où $x_1^* = x_2^*$.

2. Supposons maintenant que F soit monotone et que φ soit strictement convexe. Par la monotonie de F, on a

$$\langle w_1 - w_2, x_1^* - x_2^* \rangle \geq 0.$$

D'autre part, comme φ est strictement convexe, alors $\partial\varphi$ est strictement monotone et donc, si $x_1^* \neq x_2^*$, on obtient

$$\langle -w_1 + w_2, x_1^* - x_2^* \rangle > 0.$$

Ceci est contradictoire. D'où $x_1^* = x_2^*$.

Pour l'étude de l'existence des solutions du problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1), nous avons besoin d'introduire des notions relatives à la continuité des multifonctions.

Soient A et B deux parties fermés non vides de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que *la distance de Hausdorff* d_H entre A et B est donnée par

$$d_H(A,B) \stackrel{\mathrm{d}ef}{=} \max\{d(A,B), d(B,A)\}$$

où $d(A,B) \stackrel{\mathrm{d}ef}{=} \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} \| a - b \|$ et $d(B,A) \stackrel{\mathrm{d}ef}{=} \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} \| a - b \|$.

Cette distance peut évidemment prendre la valeur $+\infty$; voir [9] pour d'amples informations.

Soit M une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $M \subseteq \mathrm{d}om(F)$.

Définition 2.8.

La multifonction F est dite :

• *Fermée en x* si pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, on a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y, \\ y_n \in F(x_n), \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow y \in F(x).$$

• *Fermée sur M* si elle est fermée en tout point de M.

• *Semi-continue supérieurement en x* si pour tout ouvert G contenant $F(x)$, il existe un ouvert U contenant x tel que $F(x') \subseteq G$, pour tout $x' \in U$.

• *Semi-continue supérieurement sur M* si elle est semi-continue supérieurement en tout point de M.

• *Lipschitzienne de rapport $L > 0$* ou tout simplement *L-Lipschitzienne sur M* si

$$d_H\big(F(x), F(x')\big) \leq L \| x - x' \| \quad \forall x, x' \in M.$$

En particulier,

- F est dite *L-contraction sur M* si $L < 1$.
- F est dite *nonexpansive sur M* si $L = 1$.

Remarque 2.9.

• Une multifonction est semi-continue supérieurement en x si et seulement si F est continue de $\mathbb{R}^n$

vers l'ensemble des parties fermées de $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie supérieure de Vietoris (voir [3] et [4]).

• Si F est fermée en x, alors $F(x)$ est fermé.

• Si F est semi-continue supérieurement en x et si $F(x)$ est fermé, alors F est fermée en x.

• Si F est fermée et localement bornée en x, c'est-à-dire il existe un ouvert U contenant x tel que $F(x')$ soit borné, pour tout $x' \in U$, alors F est semi-
continue supérieurement en x.

3 Formulations et points fixe

Le théorème suivant va nous permettre de construire une multifonction qui va servir pour la résolution de l'inégalité variationnelle multivoque mixte (1).

Théorème 3.1.

Soit G une matrice carré d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, symétrique et définie positive. Soient x et w deux points tels que $x \in \mathrm{d}om(F)$ et $w \in F(x)$.

1. Le problème d'optimisation

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{1}{2} \langle y - x, G(y - x) \rangle + \langle w, y - x \rangle + \varphi(y) \right\} \tag{2}$$

admet une unique solution. On note cette solution par $h(x, w)$.

2. Un point $h \in C$ est une solution du problème (2) si et seulement s'il existe $z \in \partial\varphi(h)$ tel que h vérifie l'inégalité variationnelle multivoque

$$\langle w + G(h - x) + z, y - h \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{3}$$

Démonstration :

Posons $f_G : C \to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f_G : y \mapsto \frac{1}{2} \langle y - x, G(y - x) \rangle + \langle w, y - x \rangle + \varphi(y).$$

Puisque, pour tous y et z dans C, on a

$$2\langle y - x, G(z - x) \rangle = \langle y - x, G(y - x) \rangle + \langle z - x, G(z - x) \rangle - \langle y - z, G(y - z) \rangle$$

et comme, pour tous y et z dans C et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\langle \lambda y + (1 - \lambda) z - x, G(\lambda y + (1 - \lambda) z - x) \rangle$$

$= \lambda$

alors, pour tous y et z dans C et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\langle \lambda y + (1 - \lambda) z - x, G(\lambda y + (1 - \lambda) z - x) \rangle$$
$$= \lambda \langle y - x, G(y - x) \rangle + (1 - \lambda) \langle z - x, G(z - x) \rangle - \lambda(1 - \lambda) \langle y - z, G(y - z) \rangle.$$

Ceci prouve, en utilisant la convexité de φ, que la fonction f_G est fortement convexe sur C.

De plus, comme la fonction φ est sous-différentiable sur C, alors la fonction f_G est sous-différentiable sur C et donc semi-continue inférieurement sur C (voir [20]). C'est-à-dire, pour toute suite $(x_n)_n$ dans C, on a

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \Rightarrow \liminf_{n \to +\infty} f_G(x_n) \geq f_G(x).$$

Comme C est convexe fermé, alors, en appliquant le théorème 2.4, le problème d'optimisation (2) admet une unique solution.

Pour démontrer 2., rappelons que, d'après la règle de Fermat généralisée (voir [8] ou [17, Proposition 2.31]), $h \in C$ est une solution du problème (2) si et seulement si

$$0 \in \partial f_G(h) + N_C(h)$$

où $N_C(h) = \{z \in \mathbb{R}^n | \langle z, y-h \rangle \le 0 \quad \forall y \in C\}$ est le cône normal à C en h.

En appliquant les propriétés calculatoires des sous-différentielles (voir [12, Proposition~5.6]), nous avons

$$\partial f_G(h) = G(h-x) + w + \partial\varphi(h).$$

Alors, h est une solution du problème d'optimisation (2) si et seulement s'il existe $z \in \partial\varphi(h)$ et $z' \in N_C(h)$ tels que

$$G(h-x) + w + z + z' = 0.$$

Et puisque

$$\langle -z', y-h \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

alors h est une solution du problème d'optmisation (2) si et seulement si

$$\langle w + G(h-x) + z, y-h \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

pour un certain $z \in \partial\varphi(h)$.

On peut également démontrer la réciproque de la façon suivante. Supposons que $h \in C$ vérifie, pour un certain $z \in \partial\varphi(h)$,

$$\langle w + G(h-x) + z, y-h \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Comme

$$\langle w, y-x \rangle - \langle w, h-x \rangle = \langle w, y-h \rangle \quad \forall y \in C,$$

$$\varphi(y) - \varphi(h) \ge \langle z, y-h \rangle \quad \forall y \in C$$

et

$$\frac{1}{2}\langle G(y-x), y-x \rangle - \frac{1}{2}\langle G(h-x), h-x \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle G(y-h), y-h \rangle + \langle G(h-x), y-h \rangle \ge \langle G(h-x), y-h \rangle$$

car G est une matrice symétrique définie positive, alors

$$\frac{1}{2}\langle G(y-x), y-x \rangle + \langle w, y-x \rangle + \varphi(y)$$
$$\ge \frac{1}{2}\langle G(h-x), h-x \rangle + \langle w, h-x \rangle + \varphi(h) \quad \forall y \in C.$$

Ce qui signifie que h est une solution du problème d'optimisation (2).

D'après le théorème 3, nous allons pouvoir associer à chaque couple (x, w) avec $x \in dom(F)$ et $w \in F(x)$ un unique point $h(x, w)$ qui est l'unique solution du problème d'optimisation (2).

Nous construisons ainsi une multifonction $H: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} \{h(x,w) | w \in F(x)\} & \text{si} \quad x \in dom(F), \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

De la construction, on a $C \subseteq dom(F) = dom(H)$.

Le lemme suivant caractérise les solutions de l'inégalité variationnelle multivoque mixte (1) par les points fixes de la multifonction H.

Lemme 3.2.

Un point x^* est solution du problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1) si et seulement si x^* est un point fixe de H. Plus précisément, on a que $x^* = h(x^*, w^*) \in H(x^*)$ si et seulement si

$$\langle w^*, y - x^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Démonstration :

Si x^* est une solution du problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1), soit alors $w^* \in F(x^*)$ tel que

$$\langle w^*, y - x^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Donc, pour tout $y \in C$, on a

$$\langle w^*, y - x^* \rangle + \varphi(y) \geq \varphi(x^*).$$

Comme G est définie positive, on a alors

$$\frac{1}{2}\langle y - x^*, G(y - x^*) \rangle + \langle w^*, y - x^* \rangle + \varphi(y)$$
$$\geq \frac{1}{2}\langle x^* - x^*, G(x^* - x^*) \rangle + \langle w^*, x^* - x^* \rangle + \varphi(x^*).$$

Comme $x^* \in C$ et par l'unicité de la solution du problème d'optimisation (2), on a alors que $x^* = h(x^*, w^*) \in H(x^*)$.

Inversement. Supposons que x^* soit un point fixe de H. C'est-à-dire, $x^* \in H(x^*)$. Soit alors $w^* \in F(x^*)$ tel que $x^* = h(x^*, w^*)$. Ceci veut dire que x^* est l'unique solution du problème (3) associé à x^*, $w^* \in F(x^*)$ et à un certain $z^* \in \partial\varphi(x^*)$. Il en résulte que, pour tout $y \in C$, on a

$$\langle w^* + z^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Comme

$$\varphi(y) - \varphi(x^*) \geq \langle z^*, y - x^* \rangle \quad \forall y \in C,$$

alors

$$\langle w^*, y - x^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

On conclut donc que x^* est une solution du problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1).

Nous allons à présent commencer à chercher les points fixes de la multifonction H pour pouvoir résoudre le problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1).

Nous restreignons désormais notre attention au cas important de la matrice symétrique et définie positive $G = \alpha I$ avec $\alpha > 0$ et I la matrice identité d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, le problème d'optimisation (2) associé à $x \in C$ et $w \in F(x)$ devient

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \| y - x \|^2 + \langle w, y - x \rangle + \varphi(y) \right\}.$$

Les théorèmes qui vont suivre montrent que l'on peut choisir un paramètre α pour construire, en utilisant le principe de contraction de Banach, des suites convergentes vers l'unique point fixe de H.

Tout d'abord, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.

Soit $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction. Alors, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(x)$ soit fermé non vide et $F(x')$ soit fermé, convexe et non vide, et pour tout $w(x) \in F(x)$, il existe $w(x') \in F(x')$ vérifiant

$$\| w(x) - w(x') \| \leq d_H\big(F(x), F(x')\big).$$

Démonstration :

Soient x, x' et $w(x)$ comme dans l'énoncé. Posons

$$w(x') = P_{F(x')}\big(w(x)\big),$$

la projection orthogonale de $w(x)$ sur $F(x')$. Par définition de la projection orthogonale et de la distance de Hausdorff, on a

$$\| w(x) - w(x') \| = \inf_{v' \in F(x')} \| w(x) - v' \| \leq \sup_{v \in F(x)} \inf_{v' \in F(x')} \| v - v' \|$$

$$\leq d_H\big(F(x), F(x')\big).$$

Dans tout ce qui va suivre, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$,

$$B(x_0, r) \stackrel{\mathrm{d}ef}{=} \{x \in \mathbb{R}^n | \, \| x - x_0 \| < r\}$$

désignera la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

Théorème 3.4.

Soient $r > 0$ et C un convexe, fermé et non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit φ une fonction propre, convexe et sous-différentiable sur C. Soit $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction vérifiant

1. F est β-fortement monotone sur C,
2. F est L-Lipschitzienne sur $C \cap B(x_0, r)$ et
3. $F(x)$ est fermé, convexe et non vide, pour tout $x \in C \cap B(x_0, r)$.

Alors, pour tous $x, x' \in C \cap B(x_0, r)$ et tout $w(x) \in F(x)$, il existe $w(x') \in F(x')$ tel que

$$\| h\big(x, w(x)\big) - h\big(x', w(x')\big) \| \leq \delta \, \| x - x' \|$$

où $\delta = \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

Démonstration :

Soient $x, x' \in C \cap B(x_0, r)$, $w \in F(x)$ et $w' \in F(x')$. Soient $h(x, w)$ et $h(x', w')$ les solutions uniques du problème (2)

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \| y - x \|^2 + \langle w, y - x \rangle + \varphi(y) \right\}$$

correspondant à x et w et à x' et w' respectivement. D'après le théorème 3.1, soient $z \in \partial\varphi\big(h(x,w)\big)$ et $z' \in \partial\varphi\big(h(x',w')\big)$ tels que

$$\langle \alpha(h(x,w)-x)+w+z, y-h(x,w)\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C$$

et

$$\langle \alpha(h(x',w')-x')+w'+z', y-h(x',w')\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

En remplaçant y par $h(x',w')$ dans la première inégalité et par $h(x,w)$ dans la deuxième, puis en additionnant les deux inégalités et en divisant par α, on obtient

$$\langle x-x'-\frac{1}{\alpha}(w-w')-\frac{1}{\alpha}(z-z')-\big(h(x,w)-h(x',w')\big), h(x,w)-h(x',w')\rangle \geq 0.$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}\| h(x,w)-h(x',w') \|^2 &\leq \langle x-x'-\frac{1}{\alpha}(w-w')-\frac{1}{\alpha}(z-z'), h(x,w)-h(x',w')\rangle \\ &= \langle x-x'-\frac{1}{\alpha}(w-w'), h(x,w)-h(x',w')\rangle \\ &\quad -\frac{1}{\alpha}\langle z-z', h(x,w)-h(x',w')\rangle.\end{aligned}$$

Comme l'opérateur multivoque $\partial\varphi$ est monotone sur C, alors

$$\frac{1}{\alpha}\langle z-z', h(x,w)-h(x',w')\rangle \geq 0$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}\| h(x,w)-h(x',w') \|^2 &\leq \langle x-x'-\frac{1}{\alpha}(w-w'), h(x,w)-h(x',w')\rangle \\ &\leq \| x-x'-\frac{1}{\alpha}(w-w') \| \| h(x,w)-h(x',w') \|.\end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}\| h(x,w)-h(x',w') \|^2 &\leq \| x-x'-\frac{1}{\alpha}(w-w') \|^2 \\ &= \| x-x' \|^2 - \frac{2}{\alpha}\langle x-x', w-w'\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\| w-w' \|^2.\end{aligned}$$

Puisque F est L-Lipschitzienne sur $C \cap B(x_0,r)$ et en posant $w = w(x) \in F(x)$ et en prenant $w' = w(x') \in F(x')$ défini comme dans le lemme 3.3, on a

$$\| w(x)-w(x') \| \leq d_H\big(F(x),F(x')\big) \leq L \| x-x' \|.$$

En utilisant la forte monotonie de F, on a

$$-\frac{2}{\alpha}\langle x-x', w(x)-w(x')\rangle \leq -\frac{2\beta}{\alpha}\| x-x' \|^2.$$

Ce qui permet de dire que

$$\| h\big(x,w(x)\big)-h\big(x',w(x')\big) \|^2 \leq \left(1-\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{L^2}{\alpha^2}\right)\| x-x' \|^2$$

et donc

$$\| h\big(x,w(x)\big)-h\big(x',w(x')\big) \| \leq \sqrt{1-\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{L^2}{\alpha^2}}\| x-x' \|.$$

En posant $\delta = \sqrt{1-\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{L^2}{\alpha^2}}$, on a

$$\| h\big(x,w(x)\big)-h\big(x',w(x')\big) \| \leq \delta \| x-x' \| \quad \forall x,x' \in C \cap B(x_0,r).$$

Remarque 3.5.

Il faut remarquer que sous les conditions du théorème 3.4 on a $L \geq \beta > 0$ et que la fonction $\alpha \mapsto \delta$ est une fonction décroissante sur $\left]\frac{L^2}{2\beta}, \frac{L^2}{\beta}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{L^2}{\beta}, +\infty\right[$. Son minimum est égal à $\sqrt{1-\frac{\beta^2}{L^2}}$ et $\lim_{\alpha \to \frac{L^2}{2\beta}} \delta = \lim_{\alpha \to +\infty} \delta = 1$. Donc $\delta \in]0,1[$ dès que $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

Nous allons maintenant remplacer la forte monotonie de F par la forte convexité de φ, c'est-à-dire par la forte monotonie de $\partial\varphi$.

Théorème 3.6.

Soient $r > 0$ et C un convexe, fermé et non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit φ une fonction propre, sous-différentiable et η-fortement convexe sur C. Soit $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction vérifiant

1. F est monotone sur C,
2. F est L-Lipschitzienne sur $C \cap B(x_0, r)$ et
3. $F(x)$ est fermé, convexe et non vide, pour tout $x \in C \cap B(x_0, r)$.

Alors, pour tous $x, x' \in C \cap B(x_0, r)$ et tout $w(x) \in F(x)$, il existe $w(x') \in F(x')$ tel que

$$\| h\big(x, w(x)\big) - h\big(x', w(x')\big) \| \leq \delta \| x - x' \|$$

où $\delta = \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\eta}$ avec $\alpha > \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}$.

Démonstration :

Soient $x, x' \in C \cap B(x_0, r)$, $w \in F(x)$ et $w' \in F(x')$. Soient $h(x, w)$ et $h(x', w')$ obtenus comme dans la démonstration du théorème 3.4. Et par le même procédé, on obtient donc que

$$\begin{aligned} \| h(x,w) - h(x',w') \|^2 &\leq \langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') - \frac{1}{\alpha}(z - z'), h(x,w) - h(x',w') \rangle \\ &= \langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w'), h(x,w) - h(x',w') \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}\langle z - z', h(x,w) - h(x',w') \rangle, \end{aligned}$$

pour un certain $z \in \partial\varphi\big(h(x,w)\big)$ et un certain $z' \in \partial\varphi\big(h(x',w')\big)$.

Comme φ est sous-différentiable et η-fortement convexe sur C, alors l'opérateur multivoque $\partial\varphi$ est η-fortement monotone sur C, et donc

$$\eta \| h(x,w) - h(x',w') \|^2 \leq \langle z - z', h(x,w) - h(x',w') \rangle$$
$$\forall z \in \partial\varphi\big(h(x,w)\big), \forall z' \in \partial\varphi\big(h(x',w')\big).$$

Il s'en suit alors, en utlisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\eta}{\alpha}\right) \| h(x,w) - h(x',w') \|^2 &\leq \langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w'), h(x,w) - h(x',w') \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}\langle z - z', h(x,w) - h(x',w') \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\langle z - z', h(x,w) - h(x',w') \rangle \\ &\leq \| x - x' - \tfrac{1}{\alpha}(w - w') \| \| h(x,w) - h(x',w') \| \end{aligned}$$

et donc

$$\left(1 + \frac{\eta}{\alpha}\right) \| h(x,w) - h(x',w') \| \leq \| x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') \|.$$

Ceci entraîne, donc, que

$$\left(1+\frac{\eta}{\alpha}\right)^2 \parallel h(x,w)-h(x',w') \parallel^2 \leq \parallel x-x'-\frac{1}{\alpha}(w-w') \parallel^2$$
$$= \parallel x-x' \parallel^2 - \frac{2}{\alpha}\langle x-x', w-w'\rangle + \frac{1}{\alpha^2} \parallel w-w' \parallel^2.$$

Comme F est monotone, alors

$$\frac{2}{\alpha}\langle x-x', w-w'\rangle \geq 0$$

et donc

$$\left(1+\frac{\eta}{\alpha}\right)^2 \parallel h(x,w)-h(x',w') \parallel^2 \leq \parallel x-x' \parallel^2 + \frac{1}{\alpha^2} \parallel w-w' \parallel^2.$$

Puisque F est L-Lipschitzienne sur $C \cap B(x_0,r)$ et en posant $w = w(x) \in F(x)$ et en prenant $w' = w(x') \in F(x')$ défini comme dans le lemme 3.3, on a

$$\parallel w(x)-w(x') \parallel \leq d_H\big(F(x),F(x')\big) \leq L \parallel x-x' \parallel.$$

On obtient, donc

$$\left(1+\frac{\eta}{\alpha}\right)^2 \parallel h\big(x,w(x)\big)-h\big(x',w(x')\big) \parallel^2 \leq \left(1+\frac{L^2}{\alpha^2}\right) \parallel x-x' \parallel^2$$

et donc

En posant donc $\delta = \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\eta}$, on a, alors

$$\parallel h\big(x,w(x)\big)-h\big(x',w(x')\big) \parallel \leq \delta \parallel x-x' \parallel \quad \forall x,x' \in C \cap B(x_0,r).$$

Remarque 3.7.

Il faut remarquer que sous les conditions du théorème 3.6, la fonction $\alpha \mapsto \delta$ est une fonction décroissante sur $\left]\frac{L^2-\eta^2}{2\eta}, \frac{L^2}{\eta}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{L^2}{\eta}, +\infty\right[$. Son minimum est égal à $\frac{L}{\sqrt{L^2+\eta^2}}$ et $\lim_{\alpha \to \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}} \delta = \lim_{\alpha \to +\infty} \delta = 1$. Donc $\delta \in]0,1[$ dès que $\alpha > \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}$.

4 Algorithmes

Nous allons maintenant présenter un théorème qui va nous permettre de construire, suivant le principe de contraction de Banach, une suite qui converge vers l'unique solution de l'inégalité variationnelle multivoque mixte (1) et donc vers l'unique point fixe de la multifonction H. Ce théorème est basé sur les techniques de la théorie du point fixe (voir [1, 15]).

Théorème 4.1.

Soient $r > 0$ et C un fermé, convexe et non vide de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et soit φ une fonction propre, convexe et sous-différentiable sur C. Soit $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction fermée sur C et telle que $F(x)$ soit convexe non vide, pour tout $x \in C \cap B(x_0,r)$. On suppose que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1. F est β-fortement monotone sur C et L-Lipschitzienne sur $C \cap B(x_0,r)$. On prend dans ce cas $\delta = \sqrt{1-\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{L^2}{\alpha^2}}$ avec $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$.

2. F est monotone sur C et L-Lipschitzienne sur $C \cap B(x_0, r)$ et φ est η-fortement convexe sur C. On prend dans ce cas $\delta = \frac{\sqrt{L^2+\alpha^2}}{\alpha+\eta}$ avec $\alpha > \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}$.

Supposons, de plus, qu'il existe $w_0 \in F(x_0)$ tel que

$$\| h(x_0, w_0) - x_0 \| < (1-\delta)r$$

où $h(x_0, w_0)$ est l'unique solution du problème d'optimisation (2)

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \| y - x_0 \|^2 + \langle w_0, y - x_0 \rangle + \varphi(y) \right\}.$$

Alors le problème(1) admet une unique solution $x^* \in C$. Plus précisément, il existe une suite $(x_n)_n$ dans $C \cap B(x_0, r)$ convergente vers x^* et une suite $(w_n)_n$ convergente vers $w^* \in F(x^*)$ telles que $w_n \in F(x_n)$,

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| \leq \delta \| x_{n+1} - x_n \|, \quad \| x_n - x^* \| \leq \frac{1}{1-\delta} \| x_{n+1} - x_n \|,$$

$$\| w_{n+1} - w_n \| \leq L \| x_{n+1} - x_n \| \quad \text{et} \quad \| w_n - w^* \| \leq \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} L \| x_1 - x_0 \|,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration :

Posons $x_1 = h(x_0, w_0)$. On a donc

$$\| x_1 - x_0 \| < (1-\delta)r.$$

Nous allons construire les deux suites $(x_n)_n$ et $(w_n)_n$ vérifiant les propriétés ci-dessus. Le premier pas de récurrence étant semblable au pas d'ordre n, supposons alors que l'on ait déjà construit $(x_k)_{k \leq n+1}$ et $(w_k)_{k \leq n}$. D'après le lemme 3.3, soit $w(x_{n+1}) \in F(x_{n+1})$ tel que

$$\| w(x_{n+1}) - w_n \| \leq L \| x_{n+1} - x_n \|.$$

D'après le théorème 3.4 ou le théorème 3.6, et en posant $w_{n+1} = w(x_{n+1})$ et $x_{n+2} = h(x_{n+1}, w_{n+1})$, on a

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| \leq \delta \| x_{n+1} - x_n \|.$$

Pour démontrer que $x_{n+2} \in C \cap B(x_0, r)$, remarquons que

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| \leq \delta^{n+1} \| x_1 - x_0 \| < (1-\delta)\delta^{n+1} r$$

et donc

$$\| x_{n+2} - x_0 \| \leq \sum_{i=0}^{n+1} \| x_{i+1} - x_i \| < \sum_{i=0}^{n+1} (1-\delta)\delta^i r$$
$$= \frac{1-\delta^{n+2}}{1-\delta}(1-\delta)r = (1-\delta^{n+2})r < r.$$

Montrons maintenant que la suite $(x_n)_n$ est convergente dans C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \| x_{n+i+1} - x_{n+i} \| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \delta^i \| x_{n+1} - x_n \|$$
$$= \frac{1-\delta^p}{1-\delta} \| x_{n+1} - x_n \| < \frac{1-\delta^p}{1-\delta}(1-\delta)\delta^n r = (1-\delta^p)\delta^n r.$$

Alors la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans C et donc convergente vers un certain $x^* \in C$. D'autre part, en faisant tendre p vers $+\infty$, on a

$$\| x_n - x^* \| \leq \frac{1}{1-\delta} \| x_{n+1} - x_n \|.$$

Montrons que la suite $(w_n)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}^n$. Par sa construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\| w_{n+1} - w_n \| \leq L \| x_{n+1} - x_n \|.$$

Il s'en suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\| w_{n+p} - w_n \| \leq L \| x_{n+p} - x_n \| < (1 - \delta^p)\delta^n Lr.$$

Ce qui signifie que $(w_n)_n$ est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ et donc convergente vers un certain $w^* \in \mathbb{R}^n$. De plus, comme F est une multifonction fermée sur C et comme $w_n \in F(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $w^* \in F(x^*)$.

Montrons enfin que $x^* = h(x^*, w^*) \in H(x^*)$ et donc, en utilisant le lemme 3.2 et le théorème 2.7, on a que x^* est l'unique solution de l'inégalité variationnelle (1).

Puisque $x_{n+1} = h(x_n, w_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, on a

Après passage à la limite et en utilisant la continuité du produit scalaire et la semi-continuité inférieure de φ, on obtient

Ceci veut dire que $x^* = h(x^*, w^*) \in H(x^*)$ et achève donc la démonstration.

Voici un algorithme pour approcher la solution x^* du problème d'inégalité variationnelle multivoque mixte (1). Pour $\varepsilon \geq 0$, on dira que $x \in C$ est une ε-solution du problème (1) si $\| x - x^* \| \leq \varepsilon$.

Algorithme 4.2 :

Choisissons une tolérance $\varepsilon \geq 0$.
Choisissons $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$ si F est β-fortement monotone et $\alpha > \frac{L^2-\eta^2}{2\eta}$ si φ est η-fortement convexe.

Fixons $r > 0$, $x_0 \in C$ et $x_1 \in C \cap B(x_0, r)$.

Iteration n $(n = 1,2 \cdots)$

Résoudre le problème

$$P(x_n): \min_{y \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \| y - x_n \|^2 + \langle w_n, y - x_n \rangle + \varphi(y) \right\}$$

pour obtenir son unique solution x_{n+1}.

Trouver $w_{n+1} \in F(x_{n+1})$ tel que $\| w_{n+1} - w_n \| \leq L \| x_{n+1} - x_n \|$, par exemple $w_{n+1} = P_{F(x_{n+1})}(w_n)$ la projection orthogonale de w_n sur $F(x_{n+1})$.

Si $\| x_{n+1} - x_n \| \leq (1-\delta)\varepsilon$, alors terminer : x_n est une ε-solution du problème (1).

Sinon, $\| x_{n+1} - x_n \| > (1-\delta)\varepsilon$, alors augmenter n par 1 et va à l'itération n.

Ici, nous donnons un résultat montrant que, sous certaines conditions supplémentaires sur la fonction φ, on peut construire un point x_1 vérifiant les conditions du théorème 4.1.

Théorème 4.3.

Soient $r > 0$, $\alpha > 0$ et $\delta \in]0,1[$. Soit $F: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction telle que, pour tout $x \in C$, $F(x)$ soit fermé, convexe et non vide. On suppose qu'il existe $x_0 \in C$ tel que

$$\| x_0 \| < (1-\delta)\alpha r \quad et \quad d\big(x_0, F(x_0)\big) < (1-\delta)\alpha r - \| x_0 \|.$$

Alors, il existe $0 < r_0 < r$ et $w_0 \in F(x_0)$ tels que

$$\| w_0 \| < (1-\delta)\alpha r_0$$

et, pour tout $0 \le k \le (1-\delta)(r-r_0)\alpha$ et pour toute fonction φ convexe et sous-différentiable sur C et k-Lipschitzienne sur un ouvert contenant C, la solution $x_1 = h(x_0, w_0)$ du problème d'optimisation (2)

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \| y - x_0 \|^2 + \langle w_0, y - x_0 \rangle + \varphi(y) \right\}$$

vérifie

$$\| x_1 - x_0 \| < (1-\delta) r.$$

Démonstration :

Tout d'abord, montrons le résultat suivant (voir [20]) :

Si φ est une application k-Lipschitzienne sur un voisinage V de x, alors

$$\| z \| \le k \quad pour \;\; tout \quad z \in \partial\varphi(x).$$

En effet ; soit $d \in \mathbb{R}^n$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $y_{d,\varepsilon} = x + d\varepsilon \in V$.

La fonction φ étant sous-différentiable en x, on a alors

$$\langle z, y_{d,\varepsilon} - x \rangle \le \varphi\big(y_{d,\varepsilon}\big) - \varphi(x) \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

et donc

$$\langle z, d\varepsilon \rangle \le \varphi(x + d\varepsilon) - \varphi(x) \le k \| d \| \varepsilon \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

En remplaçant d par z, on obtient

$$\| z \|^2 \le k \| z \| \quad et \;\; donc \quad \| z \| \le k, \quad \forall z \in \partial\varphi(x).$$

Revenons à la démonstration du théorème, et puisque

$$d\big(x_0, F(x_0)\big) \le (1-\delta)\alpha r - \| x_0 \|,$$

soit alors $w_0 \in F(x_0)$ tel que

$$\| x_0 - w_0 \| < (1-\delta)\alpha r - \| x_0 \|.$$

Soit $0 \le r_0 < r$ tel que $\| x_0 - w_0 \| < (1-\delta)\alpha r_0 - \| x_0 \|$. On a donc

$$\| w_0 \| < (1-\delta)\alpha r_0.$$

Posons $x_1 = h(x_0, w_0)$, l'unique solution du problème d'optimisation

$$\min_{y \in C} \left\{ \frac{\alpha}{2} \| y - x_0 \|^2 + \langle w_0, y - x_0 \rangle + \varphi(y) \right\}.$$

Alors, d'après le théorème 3, soit $z \in \partial\varphi(x_1)$ tel que

$$\langle w_0 + \alpha(x_1 - x_0) + z, y - x_1 \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

En remplaçant y par x_0, on obtient

$$\alpha \| x_1 - x_0 \|^2 \le \langle w_0 + z, x_0 - x_1 \rangle \le (\| z \| + \| w_0 \|) \| x_1 - x_0 \|$$

et donc

$$= (1 - \delta)r.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

References

[1] R. P. Agarwal and M. Meehan and D. O'Regan. *Fixed Point theory and applications*. Cambridge University Press, 2001.

[2] G. Allaire. *Analyse Numérique et Optimisation*. Les ةditions de l'ةcole Polytechnique, 2005.

[3] B. Alleche. Weakly developable and weakly k-developable spaces, and Vietoris topology. *Topology Appl.*, 111:3--19, 2001.

[4] B. Alleche and J. Calbrix. Multifunctions and bases of countable order. *Topology Appl.*, 104(1):3--12, 2000.

[5] P. N. Anh and L. D. Muu. Contraction mapping fixed point algorithms for solving multivalued mixed variational inequalities, in: Optimization with Multivalued Mappings. S. Dempe and V. Kalashnikov (eds.). *Springer*, 2:231--249, 2006.

[6] P. N. Anh and L. D. Muu and V. H. Nguyen and J. J. Strodiot. On contraction and nonexpansiveness properties of the marginal mapping in generalized variational inequalities involving co-coercive operators, in: Generalized Convexity and Generalized Monotonicity and Applications. A. Eberhard, N. Hadjisavvas and D.T. Luc (eds.). *Springer*, Chapter 5:89--111, 2005.

[7] P. N. Anh and L. D. Muu and V. H. Nguyen and J. J. Strodiot. Using the Banach contraction principle to implement the proximal point method for multivalued monotone variational inequalities. *J. of Optimization Theory and Applications*, 124:285--306, 2005.

[8] H. H. Bauschke and P. L. Combettes. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer, 2011.

[9] G. Beer. *Topologies On Closed and Closed Convex Sets*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[10] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New Yowk, 1983.

[11] S. Dafermos. Traffic Equilibrium and variationnal inequalities. *Transportation Science*, 14(1):42--54,

1980.

[12] I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland and American Elsevier, 1976.

[13] F. Facchinei and J. S. Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Springer, 2002.

[14] M. Fukushima. Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems. *Mathematical Programming*, 53:99--110, 1992.

[15] K. Goebel and W. A. Kirk. *Topics in Metric Fixed Point Theory*. Cambridge University Press, 1990.

[16] B. S. He. A class of projection and for monotone variational inequalities. *Applied Mathematical Optimization*, 35:69--76, 1997.

[17] T. Hoang. *Convex Analysis and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[18] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Academic Press, 1980.

[19] I. Konnov. *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*. Springer, 2001.

[20] R. Lucchetti. *Convexity and Well-Posed Problems*. Springer, 2006.

[21] L. D. Muu and V. H. Nguyen and N. V. Quy. On Nash-Cournot oligopolistic market equilibrium models with concave costs function. *Journal Of Global Optimization*, 41(3):351--364, 2008.

[22] A. Nagurney. *Network Economics: a Variational Inequality Approach*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[23] M. A. Noor. On certain classes of variational inequalities and related iterative algorithms. *Journal of applied mathematics and stochastic analysis*, 9(1):43--56, 1996.

[24] R. T. Rockafellar and R. J-B Wets. *Variational Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009. 3rd Edition.

[25] G. Salmon and V. H. Nguyen and J-J. Strodiot,. A bundle method for solving variational inequalities.

SIAM J. Optimization, 14(8):69--893, 2004.

[26] R. U. Verma. A class of projection-contraction methods applied to monotone variational inequalities. *Applied Mathematics Letters*, 13:55--62, 2000.

[27] R. U. Verma. A class of quasivariational inequalities involving cocoercive mappings. *Advanced Nonlinear Variational Inequalities*, 2:1--12, 1999.

Boualem ALLECHE. Université de Médéa, Cité Ain Dheb, 26000 Médéa, Algérie E-mail : alleche.boualem@univ-medea.dz, alleche.boualem@gmail.com

Samia BOUZIDI. E-mail : sambouzidi@gmail.com

Djamila HAZEDJE. E-mail : hazedje.dj@gmail.com