



## Etude Numérique de l'Écoulement d'un Fluide Visqueux Incompressible Autour de Corps Profilés par une Méthode Combinée d'Ordre $O(h^2)$ et $O(h^4)$

(1)Y.H.MADANI & (2)M.Abidat  
1-ENSET Oran 2-USTO Oran

Département de génie mécanique, E.N.S.E.T d'Oran , BP 1523 El Mnaouer Oran  
Laboratoire de mécanique des fluides  
Tel : (041) 41.97.00/16, Fax : (041) 41.98.05/06

**Résumé :** *L'étude d'écoulements instationnaires décollés autour de corps profilés par la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. L'algorithme utilisé est une combinaison de deux schémas aux différences finies d'ordre  $O(h^2)$  et  $O(h^4)$ . Des applications dans le domaine d'écoulement externe de fluide visqueux incompressible sont données. Le mécanisme de création et de transport des tourbillons alternés derrière des corps profilés en incidence a été analysé théoriquement. Une étude sur l'influence des conditions initiales de mise incidence d'un profil elliptique sur le processus de création et de transport des tourbillons a permis de mettre en évidence une période transitoire, au delà de laquelle, le phénomène de création et de transport des tourbillons redevient permanent. Les avantages en temps de calcul et en précision de la méthode proposée ont été mis en évidence par les résultats numériques obtenus.*

**INTRODUCTION :** L'étude des écoulements décollés stationnaires ou instationnaires autour des corps profilés a fait l'objet ces dernières années de nombreux travaux de recherche. Pour permettre en ces phénomènes de décollement, une voie possible et de résoudre numériquement les équations complètes de Navier-stokes. Malheureusement, cette résolution nécessite en général un temps de calcul prohibitif, même sur les calculateurs modernes. Il est donc souhaitable de trouver des méthodes et algorithmes plus rapides afin d'abaisser notablement le temps de calcul. D'autre part, à grands nombre de Reynolds apparaissent des problèmes liés à la convergence et à la précision des schémas numériques utilisés. Une façon de remédier à ces inconvénients est d'utiliser des schémas de précisions

d'ordre supérieur à ceux utilisés généralement qui sont précis d'ordre  $O(h)$  ou  $O(h^2)$ . Il est alors possible d'utiliser un nombre moins important de nœuds. L'occupation mémoire et le temps de calcul peuvent alors être nettement améliorés. Les conditions de stabilité et de convergence deviennent moins restrictives.

### 1 - EQUATIONS GENERALES :

En utilisant la fonction de courant  $\psi$  et la vorticité  $\omega$ , les équations de Navier-Stokes s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = \nu \nabla^2 \tilde{\omega} \quad [01]$$

$$\nabla^2 \tilde{\psi} = \tilde{\omega} \quad [02]$$

où

$$\tilde{u} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{sur les parois du profil} \quad [03]$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= -U_\infty \\ \tilde{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{à l'infini} \quad [04]$$

Si  $a$  est une longueur caractéristique (rayon dans le cas d'un cercle, demi-grand axe dans le cas d'une ellipse ou demi corde dans le cas d'un profil), on peut poser :

$$\tilde{\psi} = a U_\infty \psi \quad ; \quad \tilde{\omega} = \frac{U_\infty}{a} \omega \quad ;$$

$$R_e = \frac{2 U_\infty a}{\nu} \quad ; \quad \tilde{t} = \frac{a}{U_\infty} t \quad ; \quad \tilde{x} = a x$$

$$; \quad \tilde{y} = a y \quad ; \quad \tilde{u} = U_\infty u \quad \text{et} \quad \tilde{v} = U_\infty v$$

On obtient les équations de Navier-Stokes sous une forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{2}{R_e} \nabla^2 \omega \quad [05]$$

$$\nabla^2 \psi = \omega \quad [06]$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{et} \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$u = v = 0 \quad \text{sur le contour}$$

$$u = -1 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{à l'infini}$$

## 2 - TRANSFORMATION DES EQUATIONS :

### a - Equation de Poisson :

Dans le plan physique (  $x, y$  ) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad [07]$$

Dans le plan numérique (  $\xi, \eta$  )

$$\begin{aligned} & \left[ \xi_x^2 + \xi_y^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left[ \eta_x^2 + \eta_y^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \\ & 2 \left[ \eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \end{aligned} \quad [08]$$

$$\left[ \xi_{xx} + \xi_{yy} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left[ \eta_{xx} + \eta_{yy} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \omega$$

Lorsque la transformation (  $\xi, \eta$  )  $\rightarrow$  (  $x, y$  ) est une transformation conforme, l'équation [08] devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = J \omega \quad [09]$$

$$\text{Car} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{et} \quad \xi_x = \eta_y \quad \text{et} \quad \xi_y = -\eta_x$$

( Conditions de Cauchy-Riemann ) d'où :

$$\eta_x \cdot \xi_x + \eta_y \cdot \xi_y = 0$$

( Condition d'orthogonalité du maillage )

Lorsque le maillage est uniquement orthogonal sans que les conditions de Cauchy-Riemann ne soient vérifiées, l'équation [08] devient :

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + J^2 P(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ & + J^2 Q(\xi, \eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = J^2 \omega \end{aligned} \quad [10]$$

où

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad ; \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

$$\text{et} \quad J = \det \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

$$\text{dans ce cas :} \quad J^2 = \alpha \gamma \quad [11]$$

les coefficients  $P(\xi, \eta)$  et  $Q(\xi, \eta)$  sont obtenus à partir des relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta)$$

et

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta)$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J^2 P(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ & + J^2 Q(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad [12]$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + J^2 P(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$+ J^2 Q(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$$

### b - Equation de la vorticité :

Dans le plan physique (  $x, y$  ) :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{2}{R_e} \nabla^2 \omega \text{ Dans}$$

le plan numérique (  $\xi, \eta$  ) : Sachant que

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right]$$

et

$$J^2 \nabla^2 \omega = \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + J^2 P(\xi, \eta) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + J^2 Q(\xi, \eta) \frac{\partial \omega}{\partial \eta}$$

d'où

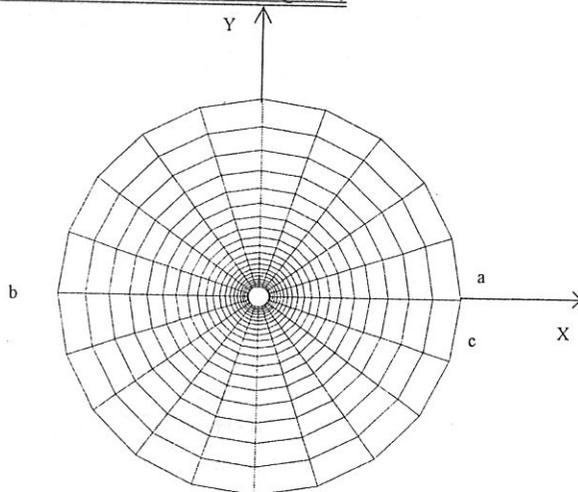
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] =$$

$$\frac{2}{R_e} \left[ \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + P(\xi, \eta) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] \quad [13]$$

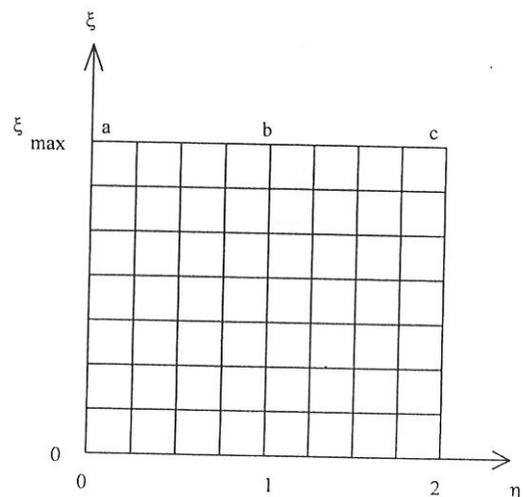
Dans le cas d'une transformation conforme,  $P(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta) = 0$  et  $\alpha = \gamma = J$ , on obtient :

$$J \frac{R_e}{2} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{R_e}{2} \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \quad [14]$$

### 3 - METHODE NUMERIQUE :



a - Plan Physique



b - Plan Numérique

Figure 01 : Maillage Généré à l'aide d'une Transformation Conforme

Afin de résoudre l'équation de poisson [09] et l'équation de transport du tourbillon [14], on utilise une méthode combinée d'ordre  $O(h^2)$  et  $O(h^4)$ . Cette précision est obtenue au moyen de simples relations entre les dérivées première et seconde de la fonction de courant. Pour la fonction de courant, les systèmes d'équations à résoudre sont les suivants:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = J \omega$$

Dans chaque direction  $\xi$  et  $\eta$  du plan numérique, on a les relations suivantes :

$$\psi'_{k-1} + 4 \psi'_k + \psi'_{k+1} = \frac{3}{\Delta h} [\psi_{k+1} - \psi_{k-1}] + O(\Delta h^4)$$

$$\psi''_{k-1} + 10 \psi''_k + \psi''_{k+1} = \frac{12}{\Delta h^2} [\psi_{k+1} - 2 \psi_k + \psi_{k-1}] + O(\Delta h^4)$$

Où  $k$  et  $\Delta h$  sont l'indice et le pas spatial suivant l'une des directions  $\xi$  ou  $\eta$  respectivement.

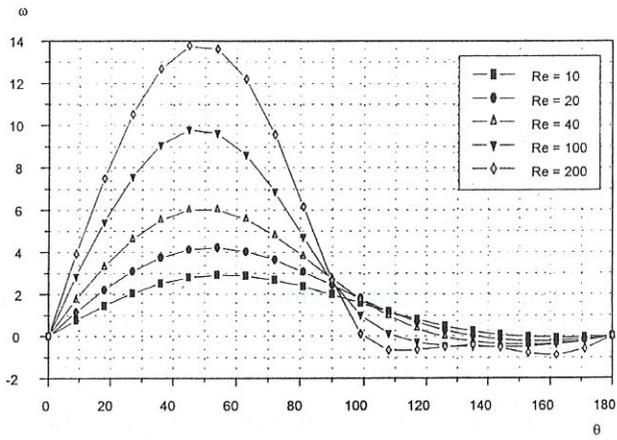


fig 2  
Pression sur la Surface du Cylindre

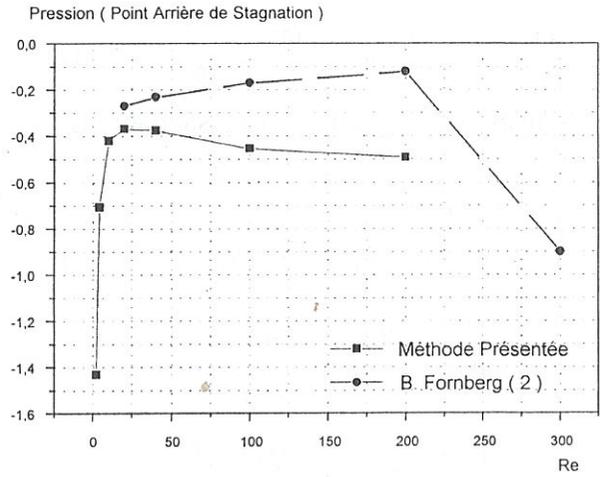


fig3

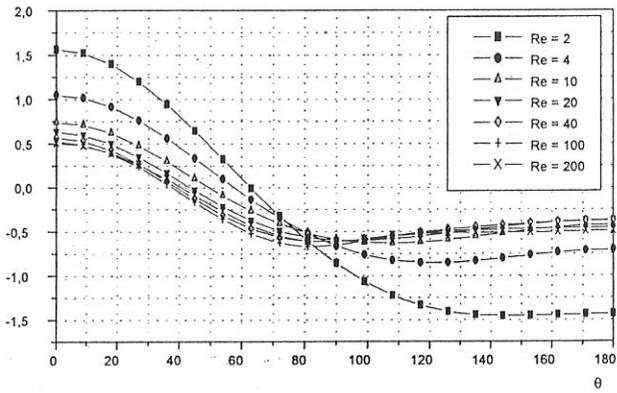


fig4

fig5

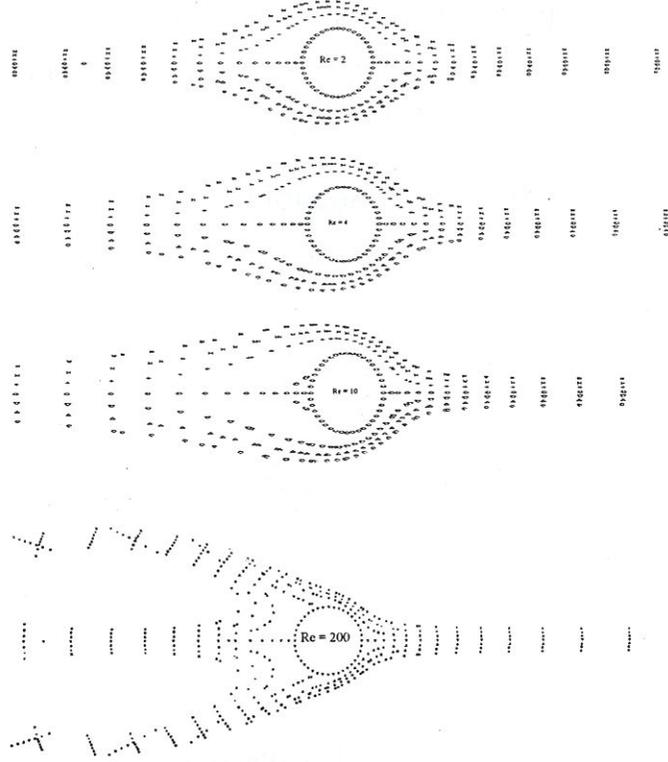
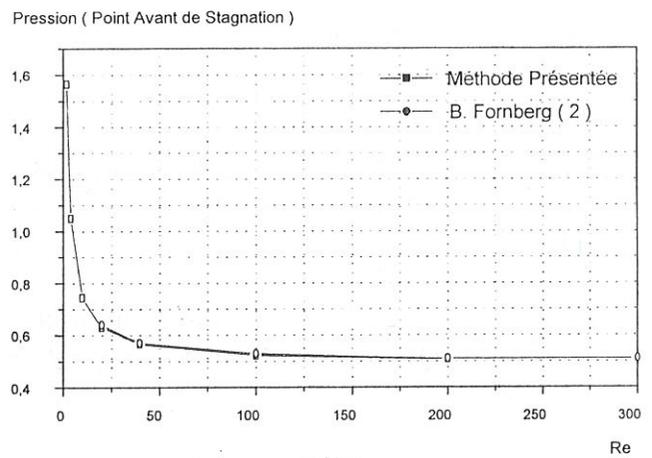


fig6

**Conclusion :** Ce travail rentre dans le cadre de la recherche où l'objectif est d'analyser et de mettre au point un modèle de calcul de l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible autour d'un cylindre par une méthode combinée d'ordre  $O(h^2)$  et  $O(h^4)$ .

L'étude bibliographique de plusieurs schémas de discrétisation des équations de Navier-Stokes et leur analyse en stabilité et forme, nous a motivé pour le choix de notre méthode par le fait que toutes les conditions aux limites de  $\omega$  sont calculés à partir de la connaissance de la fonction de  $\psi$ . Pour remédier aux problèmes bien connus d'imposition de conditions aux limites sur la fonction tourbillon, seule l'équation de Poisson de la fonction de courant est résolue par la méthode précise d'ordre  $O(h^4)$  et l'équation de transport de tourbillon est résolue par un schéma directionnel précis d'ordre  $O(h^2)$ .

La résolution des équations de l'écoulement du fluide dans le problème étudié ne peut pas se faire par une méthode de différence finis dans un domaine physique non rectangulaire, ce qui nous a amené à effectuer une transformation conforme de coordonnées pour passer du domaine physique  $(x,y)$  à un domaine numérique rectangulaire  $(\zeta,\eta)$ . Le système d'équations obtenus est un système à matrices tridiagonales dont la résolution est effectué au moyen d'un algorithme de Thomas.

Pour l'application de cette méthode combinée au calcul d'écoulement autour d'un cylindre de rayon  $R_0$ , le domaine étant compris entre la surface de ce cylindre et un cylindre de rayon  $R_\infty$ , l'écoulement étant caractérisé par un nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{2U_\infty a}{\mu}$$

### Références

- [1]MEHTA U.B et LAVAN.Z starting vortex, separation Bubbles and Stall :a numerical study of laminar unsteady flow around an Air-foil (J,Fluid mech, vol 67 part 2, 1975 P :227-256 )
- [2]LUGH. H J et HAUSSLING.H J laminar flow past an abruptly accelerated, Elliptic cylinder at 45° incidence (J,Fluid mech,vol 65, part 4, 1974, P :711-734 )
- [3]TA PHUOC LOC , une méthode de différences finies d'intégration des équations de Navier-stokes. (C.R Acad Sc Paris T272 Série A 1971, P :160-163)
- [4] HIRSH R.S Higher order accurate difference solution of fluid mechanics problems by a compact differencing technique (J,of comput, phys, vol 19, 1975 P :90-100)
- [5]COLLINS W.M et DENNIS S.C.R Flow past an impulsively started circular (J, of fluid mech, vol 60 part 1, 1973 P :105-127)
- [6]BONTOUX.P FORESTIER.B ROUX.B Développement de méthodes efficaces et de haute précision par la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires.(Communication au3° congrès français de mécanique 6-9 sept 1977 Grenoble)