



MODELISATION DE LA PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE DANS UN ALLIAGE D'ALUMINIUM PAR UNE APPROCHE ENERGETIQUE

KhelilFoudil^{1,2}, AourBenaoumeur², Benaoum Fatima^{1,2}Belhouari Mohamed³
UniversitéMustaph Stambouli deMascara, Mascara, 29000, Algérie.

²Laboratoire de Biomécanique Appliquée et Biomatériaux, Ecole Nationale
Polytechnique d'Oran, BP1523 El'Mnaour 31000, Algérie.

³Université Djilali Liabes, Sidi Belabes, 22000, Algérie.

E-mail: khelifoudil@yahoo.com, ben_aour@yahoo.fr

Reçu le : 26/04/2018

Accepté le : 20/01/2019

Résumé

La fatigue des matériaux est un type de destruction des structures particulièrement graves et dangereuses. Les recherches sur le taux de propagation de fissure et la durée de vie en fatigue constituent des problèmes très importants et complexes en mécanique de la rupture. La compréhension des mécanismes de fissuration, en tenant compte de divers facteurs tels que le profil de charge, la vitesse de déformation, le taux de contrainte, etc., est un premier besoin. Dans ce travail une approche énergétique de la propagation de la fissure de fatigue a été proposée. Cette approche est basée sur la détermination numérique de la zone plastique en introduisant une nouvelle forme de rayon plastique. Les résultats expérimentaux réalisés sur deux alliages d'aluminium de type 2024-T351 et 7075-T7351 ont été exploités pour valider le modèle numérique développé. Un bon accord a été trouvé entre les deux types de résultats.

Mots-clés: Propagation des fissures de fatigue; Approche énergétique; Zone plastique; Alliages d'aluminium.

abstract

Materials fatigue is a particularly serious and unsafe kind of structures destruction. Investigations of the fatigue crack growth rate and fatigue life constitute very important and complex problems in fracture mechanics. The understanding of the cracking mechanisms, taking into account various factors such as the load pattern, the strain rate, the stress ratio, etc., is of a first need. In this work, an energy approach of the Fatigue

Crack Growth (FCG) was proposed. This approach is based on the numerical determination of the plastic zone by introducing a novel form of plastic radius. The experimental results conducted on two aluminium alloys of types 2024-T351 and 7075-T7351 were exploited to validate the developed numerical model. A good agreement has been found between the two types of results.

Nomenclature

a	Longueur de fissure
a_0	Longueur de fissure initiale
a_{cr}	Longueur de fissure critique
B	Epaisseur de l'éprouvette
C	Constante de la loi de Paris
da/dN	Taux de propagation de fissure par fatigue
E	Module d'Young
$f(z)$	Fonction de complaisance
G	Module de cisaillement
K	Coefficient de résistance
K_C	Facteur d'intensité des contraintes critique
K_I	Facteur d'intensité des contraintes en mode I
m	Exposant de la loi de Paris
n	Exposant de la loi de Ludwik
N'	Exposant d'érouissage
N''	Exposant reliant les amplitudes des contraintes et des déformations
Q	Energy totale dissipée
r	Rayon (coordonnée polaire)
$r_p(PD)$,	Limite de la zone plastique en déformation plane ou en
$r_p(PS)$	contrainte plane.
S	Surface de l'élément en pointe de fissure
S_M	Surface de la zone plastique déterminée par le modèle proposé.
S_{pz}	Surface de la zone plastique calculée par le modèle de Tracey.
W	Largeur de l'éprouvette
θ	Angle (Coordonnée polaire)
ΔK_I	Amplitude du facteur d'intensité des contraintes en mode I
ΔP	Amplitude de la force appliquée
$\Delta W(PZ)$	Energie dissipée dans la zone plastique par unité d'épaisseur

1. Introduction

Suivant les travaux de Bodner et al. [1], Klingbeil [2] avait proposé une loi de propagation de fissure, dans laquelle, le taux de propagation par fatigue était lié à l'énergie plastique totale dissipée au fond de la pointe de la fissure sous un chargement cyclique. Ce modèle a été ensuite étendu à la délamination par fatigue en mode mixte des matériaux stratifiés le long de l'interface par Daily [3] and Ranganathan [4]. Récemment, Mazari et al. [5] ont proposé un facteur de correction empirique qui prend en compte les évolutions obtenues par les boucles d'hystérésis en montrant les différents effets de la plasticité, de la fermeture de fissure et du mode d'ouverture.

Dans ce présente travail, une nouvelle approche, pour l'évaluation de l'énergie de déformation plastique cyclique en pointe de la fissure en mode I est proposée. Cette approche est basée sur la détermination numérique de la zone plastique en introduisant une nouvelle forme du rayon plastique. Les bases théoriques reliées à l'énergie de création de surface et l'évolution des paramètres énergétiques seront discutées dans la section 2. La section 3 est consacrée à la présentation des résultats expérimentaux exploités pour la validation. Puis, la section 4 est réservée pour le développement de l'algorithme numérique utilisé pour l'évaluation de l'énergie de déformation plastique cyclique. Les résultats obtenus sont présentés et discutés dans la dernière section.

2. L'énergie de déformation plastique cyclique du modèle proposé

En considérant que l'énergie est principalement dissipée dans la zone plastique, une comparaison peut être faite entre les valeurs mesurées et celles prédites théoriquement en assumant le mode I de propagation. La limite de la zone plastique peut être calculée en utilisant le critère de Von Mises. La taille et la forme de cette zone dépendent de l'état considéré : (i) déformations planes (DP) ou (ii) contraintes planes (CP) comme le montre le critère de Von Mises et de Tresca [6].

Il est intéressant de noter que l'énergie dissipée sur toute la zone plastique par unité d'épaisseur en fonction de ΔK^4 , qui est conforme au modèle théorique donné par Klingbeil [2], Mazari et al. [5] et Ranganathan et al.[7]. Par conséquent, afin d'obtenir une variation similaire comme fonction de ΔK^4 , nous avons proposé de calculer la surface de la zone plastique, en utilisant l'expression suivante pour le rayon plastique :

$$r_p(PD) = \frac{1}{2\pi B} \left(\frac{\Delta K}{\Delta \sigma_0} \right)^4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (1)$$

en déformation plane et

$$r_p(PS) = \frac{1}{2\pi B} \left(\frac{\Delta K}{\Delta \sigma_0} \right)^4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2)$$

en contrainte plane.

En utilisant les équations de la théorie[8], le nouveau modèle pour le calcul de l'énergie plastique par unité d'épaisseur peut être écrit comme suit :

$\Delta W(PZ)_M = \alpha_M \cdot \Delta \sigma_0 \cdot \Delta \varepsilon_0 \cdot S_{pzM}$ (3) où α_M est une constante qui dépend du matériau et le critère utilisé, et S_M indique la surface de la zone plastique déterminée par les expressions (1) et (2).

Par conséquent, l'énergie totale dissipée Q dans l'échantillon est donnée par :

$$Q = \Delta W(PZ) \times B \quad (4)$$

3. Détails expérimentaux

3.1 Matériau et géométrie de l'échantillon

Les essais ont été conduits sur deux alliages d'aluminium : l'alliage 2024 en condition T351 et l'alliage 7075 en condition T7351[7].

Dans le tableau1, les paramètres K et n sont calculés en utilisant la relation de Ludwik [9]:

$$\sigma = K \cdot (\varepsilon_p)^n \quad (5)$$

Les essais ont été achevés sur des éprouvettes de traction compactes (CT) d'une épaisseur de 10mm pour l'alliage 2024 et 6mm pour l'alliage 7075 (Figure 1). La direction de fissuration a été prise dans le sens du laminage.

Tous les essais mécaniques ont été conduits sur une machine servo-hydraulique de type Instron avec une fréquence typique d'essai de 20 Hz à température ambiante avec un rapport de chargement $R=0.5$.

$$R = P_{\min} / P_{\max} \quad (6)$$

où P_{\min} and P_{\max} sont respectivement les forces minimal et le maximum sur un cycle.

Tableau1. Propriétés mécaniques des alliages étudiés [7].

Matériau	2024-T351	7075-T7351
Limite élastique conventionnelle à 0.2% de déformation plastique (MPa)	318	470
Contrainte à la rupture σ_R (MPa)	524	539
Elongation A%	12.8	11.7
Coefficient de résistance K (MPa)	652	960.5
Coefficient d'érouissage	0.104	0.051

Le taux de propagation de fissure a été mesuré par une technique optique sur la face lisse de l'échantillon, à l'aide d'un microscope à déplacement avec une précision de 0.01 mm. L'énergie totale dissipée a été mesurée en amplifiant la courbe force en fonction des déplacements mesurés sous l'axe des forces.

L'amplitude du facteur d'intensité des contraintes pour cette géométrie est donnée par Newman [10] :

$$\Delta K = \frac{\Delta P}{B \cdot \sqrt{w}} f(z) \quad \text{avec} \quad z = \frac{a}{w} \quad (7)$$

où w et B sont respectivement la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette, a , est la longueur de la fissure et $\Delta P = P_{\max} - P_{\min}$ est l'amplitude de la force appliquée.

Afin d'obtenir plus de précision, deux fonctions de complaisance $f(z)$ ont été utilisées :

➤ pour $0.2 < z < 0.3$ [8]:

$$f(z) = 4.55 - 40.32z + 414.7z^2 - 1698z^3 + 3781z^4 - 4287z^5 + 2017z^6 \quad (8)$$

➤ Pour $0.3 < z < 0.7$ [6]:

$$f(z) = 29.6 z^{0.5} - 185.5 z^{1.5} + 655.7 z^{2.5} - 1017 z^{3.5} + 638.9 z^{4.5} \quad (9)$$

3.2 Identification des paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique

Les résultats obtenus après identification des paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique sont résumés dans le tableau 2.

Tableau2. Paramètres de l'énergie de déformation plastique cyclique [9].

Pour AL2024-T351						
$\Delta\sigma_0$	$\Delta\varepsilon_0$	α_M	N'	N''	Integral	$\Delta W / \Delta K^4$
914	0.0111	6.677E-4	0.148	0.078	0.0138	2.92E-13
Pour AL 7075-T7351						
$\Delta\sigma_0$	$\Delta\varepsilon_0$	α_M	N'	N''	Integral	$\Delta W / \Delta K^4$
705	0.00849	1.26E-5	0.166	0.0765	0.0140	4.85E-13

Finalement, pour les matériaux de l'étude, nous obtenons :

➤ Pour 2024-T351: $\Delta W = 2,92 \cdot 10^{-13} \Delta K^4 \text{ MPa}$ (10)

➤ Pour 7075-T7351 $\Delta W = 4,85 \cdot 10^{-13} \Delta K^4 \text{ MPa}$ (11)

3.3 Identification de la loi de Paris

La propagation de la fissure par fatigue dans l'éprouvette CT a été modélisée selon la loi de Paris, où le taux de propagation FCG da/dN est décrit en terme d'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK suivant la relation [11]:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad (12)$$

où C et m sont respectivement le coefficient et l'exposant de la loi de Paris.

La figure 2 montre les résultats typiques des essais utilisés pour le tracé des courbes log (da/dN) en fonction de log (ΔK) pour chaque alliage d'aluminium étudié.

Un modèle de loi puissance est adapté à la région de l'état stable (phase II) de la propagation de fissure par fatigue. Le coefficient (C) et l'exposant (m) ont été déterminés pour chaque éprouvette subissant une croissance stable de fissure par fatigue. Une échelle logarithmique a été utilisée pour une représentation linéaire de la courbe. Ainsi, une régression linéaire donne les paramètres (C) et (m). En identifiant les paramètres de la loi de Paris en accord avec les résultats expérimentaux pour les deux alliages, nous avons trouvé que $C = 6.0E-9$ et $m = 4.5849$ avec une pente de 4.58 pour le 2024-T351. Cependant, pour le 7075-T7351; $C = 3.0E-8$ et $m = 3.1987$ avec une pente de 3.20. Il est à noter que l'aluminium 2024 reste un matériau de structure d'avion important pour sa bonne tolérance à l'endommagement et sa résistance à la propagation de fissure par fatigue élevée [13], tandis que, le 7075-T7351 offre une bonne résistance à la fissuration par corrosion sous contraintes [14].

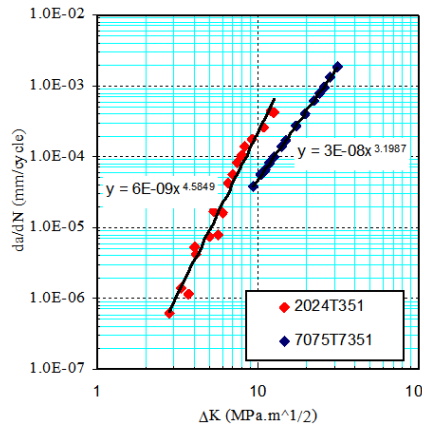
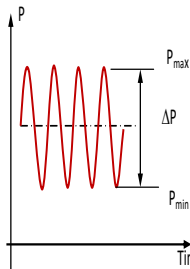
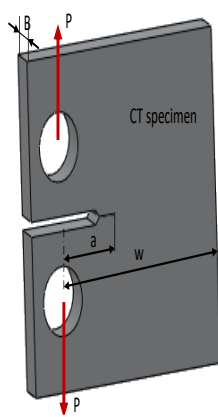


Figure 1: Configuration de l'essai cyclique sur une éprouvette de traction compacte

Figure 2: Ajustement des données expérimentales par la loi de Paris.

4. Implémentation de l'approche proposée

Un programme a été écrit avec le langage Matlab selon l'organigramme de la figure3. Ce dernier a été développé pour calculer le facteur d'intensité des contraintes, la taille de la zone plastique, le taux de propagation defissure, lenombre des cycles et l'énergie de déformation plastique.

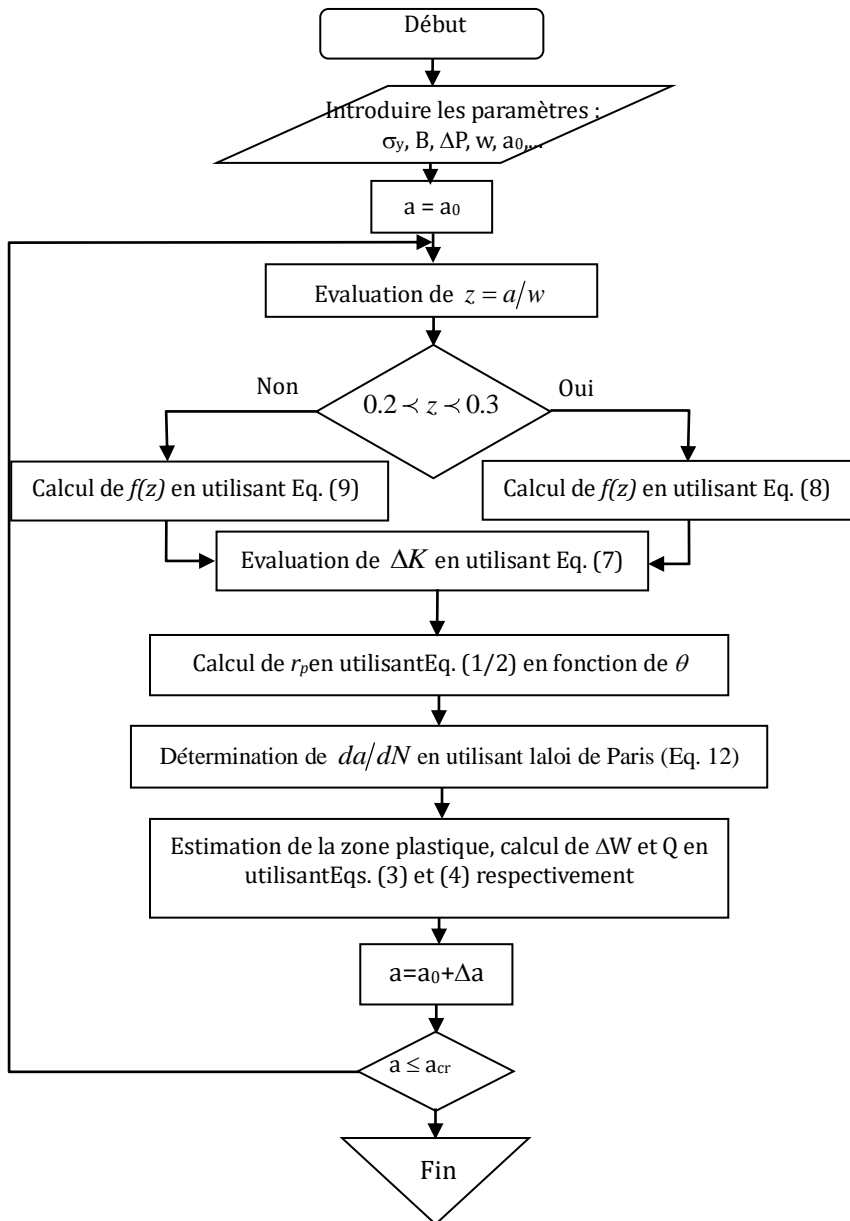


Figure 3 : Organigramme de la procédure numérique.

Des conditions de déformations planes et un critère de Von Mises ont été considérés. Premièrement, on spécifie les dimensions de l'éprouvette : l'épaisseur B , la largeur w , la longueur initiale de fissure a_0 , la longueur critique de fissure a_c et les propriétés mécaniques du matériau, à savoir, le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν , la limite élastique σ_y et les constantes de la loi de Paris C et m ainsi que l'amplitude de la force appliquée ΔP . Puis, on lance le calcul de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK , le rayon plastique r_p , le taux de propagation de fissure par fatigue da/dN et les paramètres énergétiques.

5. Résultats et discussion

Il est intéressant de noter que l'évolution de l'énergie de déformation plastique cyclique est directement liée à la variation de la taille de la zone plastique à la pointe de la fissure comme il a été décrit dans la section précédente. Dans ce qui suit, nous allons d'abord mettre en évidence l'évolution de la zone plastique. Ensuite, nous allons analyser en détail l'évolution de l'énergie de déformation plastique cyclique et la vitesse de propagation de la fissure.

5.1. Evolution de la zone plastique

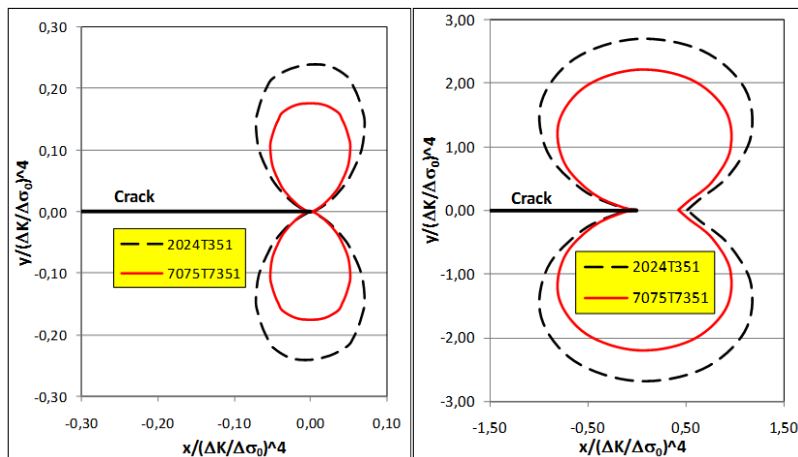
Le but de cette section est d'étudier en détail l'évolution de la zone plastique à la pointe de la fissure au cours de la croissance des fissures sur les deux alliages d'aluminium. Il convient de noter que, à la pointe de la fissure d'un matériau ductile, les champs de déformation sont importants et conduisent dans une large mesure, à la zone plastique. Dans ce cas, l'énergie mécanique à la pointe de la fissure est absorbée par le matériau sous forme de défauts linéaires [12 et 13]. D'autre part, la taille de la zone plastique ne dépend pas seulement de la nature des matériaux, mais aussi de l'intensité de l'énergie mécanique à la pointe de la fissure et de la géométrie et la taille de la fissure. Notons que le durcissement, caractérisée par son taux, peut ralentir considérablement l'extension de la zone plastique.

La figure4 montre l'évolution de la zone plastique pour les deux matériaux de l'étude (2024 et 7075) utilisant le modèle de Tracey (Figure4a) et le modèle proposé (Figure4b). Il a été constaté que la taille de la zone plastique calculée par le modèle proposé

pour le 2024 et pour le 7075 est plus grande que celle calculée par le modèle de Tracey[14].

Par ailleurs, on observe que l'alliage 2024, duquel les propriétés mécaniques de ductilité sont plus élevées que celles de l'alliage 7075, présente une taille de zone plastique plus large. Nous avons obtenu pour :

- Modèle de Tracey: $S(PZ)$ de 2024 = $2,37 \times S(PZ)$ de 7075.
- Modèle proposé: $S(PZ)$ de 2024 = $2,12 \times S(PZ)$ de 7075.



(a)

(b)

Figure.4: Evolution des zones plastiques normalisées dans les cas du (a) Modèle de Tracey et du (b) Modèle proposé pour les deux alliages d'aluminium.

5.2. Evolution de l'énergie totale dissipée dans l'éprouvette

Il doit être mentionné que l'extension de la fissure qui mène à la rupture provient quand l'énergie procurée est suffisante pour vaincre la résistance du matériau. Assumant que cette énergie est principalement dissipée dans la zone plastique, une comparaison peut être faite entre les valeurs mesurées et celles théoriquement prédites comme illustré dans la figure 5 en assumant le mode I de propagation.

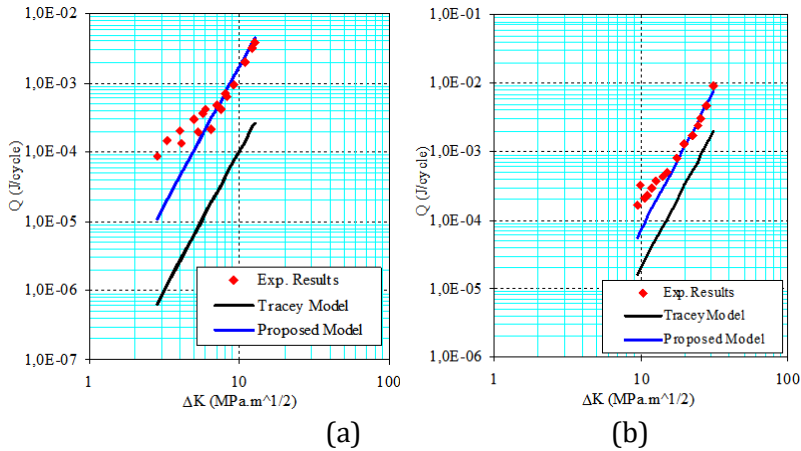


Figure.5: Comparaison de l'énergie dissipée par cycle mesurée à celle estimée pour: (a) 2024-T351 et (b) 7075-T7351.

Cette figure illustre l'évolution de l'énergie totale dissipée en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes ΔK pour les deux types d'alliage d'aluminium pour le cas d'un rapport de contraintes constant $R=0.5$. Il peut être remarqué que les estimations théoriques données par le modèle de Tracey sont inférieures aux mesures expérimentales. Cependant, de bonnes prédictions sont obtenues par le modèle proposé. Notons que pour le 2024 (Figure 5a), Q calculée par le modèle de Tracey est d'environ 11 à 76 fois plus faible que celle expérimentalement mesurée ; la différence est moins prononcée pour des valeurs de ΔK élevées. La même tendance est observée pour le 7075 (Figure 5b). L'écart entre les estimations théoriques par le modèle de Tracey et les valeurs expérimentales varie de 3 pour des valeurs élevées de ΔK , à 10 pour des valeurs plus faibles de ΔK . Cette différence peut généralement être attribuée à la taille de la zone plastique estimée qui est inférieure que celle mesurée, particulièrement pour les matériaux qui exhibent une ductilité élevée comme pour le 2024-T351 en comparaison avec le 7075-T7351. De l'autre côté, selon la figure 5, les résultats obtenus par le modèle proposé sont en bon accord avec les résultats expérimentaux pour les deux types d'aluminium. Il est aussi observé que pour la même valeur de ΔK , l'énergie dissipée totale dans le 2024-T351 est plus importante que celle dissipée dans le 7075-T7351.

5.3 Relation entre Q et da/dN

L'évolution de la propagation de la fissure est étudiée en fonction du paramètre énergétique afin d'expliquer le comportement de la fissure pour les différents régimes. La figure6 montre l'évolution de da/dN en terme de l'énergie totale dissipée Q pour $R=0.5$. Pour les deux nuances d'alliage, les résultats expérimentaux peuvent être divisés en deux domaines différents comme illustre la figure6.

Dans le cas de 2024, **le domaine I** est défini par $da/dN \leq 2.10^{-5}$ mm/cycle. Dans cette région, on constate une forte diminution de la vitesse de propagation de la fissure en fonction de l'énergie totale dissipée. Une approximation logarithmique peut être utilisée à ce stade. La relation obtenue est donnée par :

$$\frac{da}{dN} = 0.00002Ln(Q) + 0.0001 \quad (13)$$

Le domaine II est défini par $da/dN \geq 2.10^{-5}$ mm/cycle. Cette région montre une évolution stable de la propagation de la fissure et une loi puissance peut être utilisée comme une approximation à ce stade :

$$\frac{da}{dN} = 0.7346Q^{1.272} \quad (14)$$

Dans le cas de 7075, **le domaine I** est défini par $da/dN \leq 210^{-4}$ mm /cycle . L'évolution de la propagation de la fissure à ce stade est non stable. Si on utilise une fonction logarithmique, on peut déterminer une relation de la forme :

$$\frac{da}{dN} = 0.0001Ln(Q) + 0.0011 \quad (15)$$

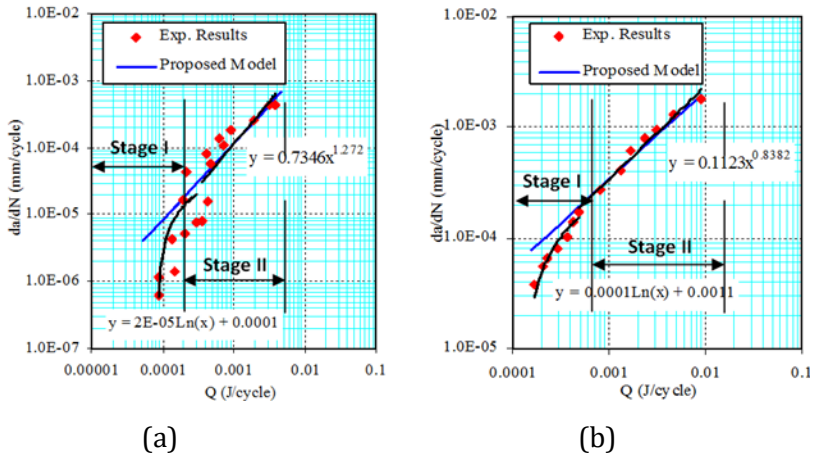


Figure.6: Evolution de da / dN par rapport à Q pour (a) 2024-T351 et (b) 7075-T7351. Les lignes noires représentent les courbes de régression des résultats expérimentaux utilisant l'énergie et des fonctions logarithmiques.

Le domaine II est défini par $da/dN \geq 2 \times 10^{-4}$ mm/cycle. La loi obtenue a la forme suivante :

$$\frac{da}{dN} = 0.1123Q^{0.8382} \quad (16)$$

On peut constater qu'il y a un bon accord dans le stade II entre les données expérimentales et les résultats calculés par le modèle proposé pour les deux types d'alliage d'aluminium. En outre, les lignes droites de pente 0.316 pour l'Al 2024 et de 0.086 pour l'Al 7075 peuvent être déduites du modèle proposé. En effet, nous obtenons les expressions suivantes.

$$\frac{da}{dN} = 0.316Q^{1.1462} \quad \text{pour 2024-T351} \quad (17)$$

$$\frac{da}{dN} = 0.086Q^{0.7997} \quad \text{pour 7075-T7531} \quad (18)$$

Cependant, une différence significative a été trouvée dans le stade I entre les résultats expérimentaux et ceux prédits par le modèle proposé. Cela limite donc l'application du modèle proposé dans le stade où la propagation de la fissure est stable.

6. Conclusion

Dans cette étude une approche énergétique pour la modélisation de la propagation de fissure par fatigue a été proposée. Cette approche procure un lien direct entre l'énergie cyclique de déformation plastique et la zone plastique en pointe de la fissure. Pour valider le modèle proposé, des données expérimentales conduites sur des éprouvettes CT en alliage d'aluminium (2024-T351 et 7075-T7351) à amplitude de contraintes constantes avec un rapport de charge $R=0.5$ en mode I de chargement ont été exploitées.

Les conclusions suivantes peuvent être tirées:

- Les valeurs mesurées de l'énergie cyclique de déformations plastiques pour les deux types d'aluminium sont sensiblement supérieures à celles calculées par le modèle de Tracey. Cependant, un accord relativement bon entre les résultats expérimentaux et ceux calculés par le modèle proposé a été trouvé.

- Une modélisation correcte de la zone plastique est nécessaire pour déterminer avec précision l'énergie cyclique totale dissipée à la pointe de fissure. La taille de la zone plastique calculée par le modèle proposé est d'environ 16 à 18 fois supérieure à celle calculée par le modèle de Tracey.

- Finalement, il peut être noté que la simplicité de l'approche proposée limite sa capacité à prendre en compte la fermeture de la fissure, l'effet de l'environnement et de l'amplitude de chargement variable, qui sont des sujets de recherche en cours.

Références

- [1] S.R, Bodner, D.L. Davidson, &J. Lankford, A description of fatigue crack growth in terms of plastic work, Eng. Fract.Mech. 17(2) (1983) 189-191
- [2]N.W. Klingbeil, A total dissipated energy theory of fatigue crack growth in ductile solids, Int. J. Fat. 25 (2003) 117-128
- [3] N.Ranganathan, F, Chalon, &S, Meo, Some aspects of the energy based approach to fatigue crack propagation, Int. J. Fat. 30 (2008) 1921-1929
- [4] J.S.Daily, N.W. Klingbeil, Plastic dissipation energy at a bimaterial crack tip under cyclic loading, Int. J. Fat. 32 (2010) 1710-1723

- [5] N.Ranganathan, Contribution au développement d'une approche énergétique à la propagation d'une fissure de fatigue, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 1985
- [6] J.E. Srawley, &B.Gross, Stress intensity factors for bend and compact specimens, *Eng. Fract. Mech.* 4(3)(1972) 587-589
- [7] P. Ludwik, *Elemente der Technologischen Mechanik.* -3rd , Vol. 32, Springer-Verlag OHG, Berlin. (1909) 32-37
- [8] N.J. Ranganathan, K. Jendoubi, M. Benguediab &J. Petit, Effect of R ratio and ΔK level on the hysteretic energy dissipated during fatigue crack propagation, *Scr. Metal.* j. 21(8) (1987) 1045-1049
- [9] M. Mazari, B. Bouchouicha, M. Zemri, M. Benguediab, &N.Ranganathan, Fatigue crack propagation analysis based on plastic energy approach, *Comput. Mater Sci.* 41: (2008) 344-349.
- [10] W. Wang, T. Cheng, Fatigue Crack Growth Rate of Metal by Plastic Energy Damage Accumulation Theory, *J. Eng. Mech.* 120(4) (1994) 776-795.
- [11] P.C. Paris, & F.A. Erdogan, Critical analysis of crack propagation laws, *J. Basic Eng.* 85, (1963) 528-534
- [12] J. Weertman, Theory of fatigue crack growth based on a BCS crack theory with work hardening, *Int. J. Fract.* 9(2) (1973) 125-131 DOI: 10.1007/BF00041854
- [13] , S. M. Beden S. Abdullah, , &A.K. Ariffin,. Review of Fatigue Crack Propagation Models for Metallic Components, *Eur. J. Sci. Res.* 28(3), (2009) 64-397
- [14]R.O. Ritchie, Mechanisms of fatigue-crack propagation in ductile and brittle solid, *Int. J. Fract.*, 100, (1999) 55-83doi: 10.1007/s11999-010-1712-y
- [15]D.C. Tracey, Finite element solution for crack-tip behaviour in small-scale yielding, *J. Eng Mater. Tech*, 98, (1976) 148-151
- [16] G. Chalant, &L. Rémy, Plastic strain distribution at the tip of a fatigue crack. Application to fatigue crack closure in the threshold regime, *Eng. Fract. Mech.* 16 (1982) 707-720
- [17]M. Mazari, Contribution à l'étude d'une approche énergétique de la propagation des fissures de fatigue, Thèse de doctorat, Université de Sidi Bel Abbès, Algérie, 2003
- [18] J.C. Newman, Stress analysis of the compact specimen including the effects of pin loading fracture analysis, *ASTM international STP* 560 <http://doi.org/10.1520/stp331365>, 1974,105-121.