

MISE AU POINT D'UNE METHODE D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES DES MODELES ELASTO/VISCO-PLASTIQUES

Ali MITSAK, Benaoumeur AOUR

Laboratoire de Biomécanique Appliquée et Biomatériaux, Département de Génie Mécanique, BP1523 El'Mnaour 31000, Algérie, alimit_student@yahoo.fr; ben_aour@yahoo.fr

Résumé

Dans ce travail une mise au point d'une méthode d'identification des paramètres des modèles élasto-viscoplastiques a été présentée. Cette méthode a été développée en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour le calage avec des courbes contraintes-déformations obtenues par des essais expérimentaux. Une méthode d'identification en se basant sur un principe itérative a été également programmée et validée. Cette méthode permet d'obtenir une solution numérique au problème de minimisation des modèles, souvent non-linéaires et dépendant de plusieurs variables.

Mots-clés : *Elastoviscoplasticité, Modélisation, Identification, Ecrouissage, Moindres carrées.*

Abstract

In this paper a numerical investigation for identification of the elastic-viscoplastic models parameters was presented. This method has been developed using the Levenberg-Marquardt algorithm for calibration with stress-strain curves obtained by experimental tests. An identification method based on iterative principle has also been programmed and validated. This method is used to obtain a numerical solution for the problem of minimizing models, often non-linear and dependent on several variables.

Key-words: *Elastoviscoplasticity, Modelling, Identification, Hardening, Least square.*

1. INTRODUCTION

La simulation numérique de la déformation plastique des matériaux nécessite la mise au point des modèles de comportement basés sur les principes de la thermodynamique et qui tiennent compte des sollicitations que subissent les matériaux utilisés et rendent compte de l'anisotropie matérielle [1]. La détermination des paramètres intervenant dans les lois de comportement des matériaux est une étape importante. Elle permet une meilleure représentation possible des expériences par les modèles identifiés. En effet, une rigoureuse identification paramétrique avec le choix d'un modèle adéquat permet de simuler correctement la déformation plastique des matériaux [2].

Dans ce travail, nous proposons d'établir une stratégie d'identification paramétrique applicable aux modèles élastoplastiques et ou viscoplastiques, ces modèles présentés dans ce qui suit sont classés dans un ordre croissant de complexité, pour les ajuster aux essais expérimentaux.

2. IDENTIFICATION DU MODELE A 2 PARAMETRES (MODELE DE NORTON)

2.1. Modélisation mathématique

Pour modéliser le fluage secondaire, on utilise la vitesse de déformation pour une température fixée. Cette loi est empirique et lie la contrainte avec la vitesse de déformation comme suit [3] :

$$\varepsilon_p^* = \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N \quad (1)$$

$$\sigma = K \left(\varepsilon_p^* \right)^{1/N} \quad (2)$$

où K et N sont des constantes typiques du matériau.

Cependant cette loi de Norton ne fait pas intervenir la température. Le fluage étant une déformation activée thermiquement, on affine la loi de Norton par l'expression suivante [4]:

$$\varepsilon_p^* = \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N e^{\left(\frac{-Q}{RT} \right)} \quad (3)$$

où Q est aussi une constante du matériau. Le terme en exponentiel correspond à l'énergie d'activation qui est égale à l'énergie d'auto-diffusion dans le cas des métaux purs.

2.2. Détermination des coefficients K et N

Pour déterminer K et N , il faut connaître les différentes valeurs de σ en fonction de la vitesse de déformation. La figure 1 représente les résultats de l'essai de fluage effectué sur l'alliage AUGN à température $T = 180^\circ\text{C}$ [5]. Il est à noter que la valeur de l'exposant N et en conséquence du coefficient K dépend souvent du domaine de vitesse considéré : pour les grandes vitesses, l'effet géométrique de contraction devient prépondérant et les valeurs obtenues pour N sont généralement plus grandes. Au contraire, pour les faibles vitesses l'exposant a tendance à diminuer [3].

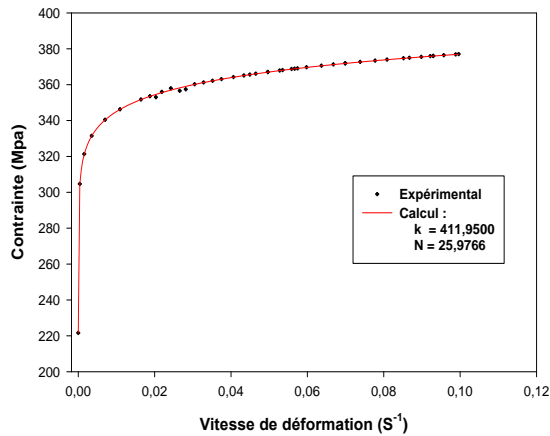


Fig. 1. Identification du modèle de Norton à deux paramètres sur un alliage léger AUGN à T = 180°C.

3. IDENTIFICATION D'UN MODELE A 3 PARAMETRES

3.1. Identification de la fonction d'érouissage (modèle de Swift)

Afin de mettre en évidence l'identification d'un modèle à trois paramètres nous avons utilisé la base de données expérimentale relative à l'essai de traction simple fait sur trois tôles avec des propriétés mécaniques différentes [5]. Ces tôles (d'épaisseur 0.8 mm) sont destinées pour la mise en forme par emboutissage dans l'industrie automobile. Ces matériaux sont :

- Tôle 1 : D280 acier microallié à haute limite élastique ;
- Tôle 2 : IF acier sans interstitiels ;
- Tôle 3 : ES acier extra doux.

La fonction d'érouissage $\sigma_s(\varepsilon_p)$ est identifiée à partir de l'essai simple dans la direction de laminage. Pour décrire cette fonction d'érouissage des tôles considérées, nous avons choisi la loi de Swift [6]:

$$\sigma_s = K(\varepsilon_0 + \varepsilon_p)^n \tag{4}$$

Les coefficients de la loi de Swift sont obtenus par ajustement de la courbe de traction simple expérimentale avec cette loi. Les résultats de cette identification sont représentés dans le tableau 1. D'après la figure 2, la loi de Swift avec ces trois paramètres est largement suffisante pour décrire l'érouissage isotrope des tôles étudiées.

Tôles	Coefficients identifiés		
	ϵ_0	n	K
Tôle 1	647,0060	0,0107	0,1945
Tôle 2	586,3416	4,3760e-3	0,2668
Tôle 3	556,4628	7,2404e-3	0,2298

Tableau 1. Identification des paramètres de la loi d'écroutissement de Swift.

Pour les propriétés élastiques des tôles, nous prenons le modèle linéaire isotrope avec un module d'Young $E = 2.10^5$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

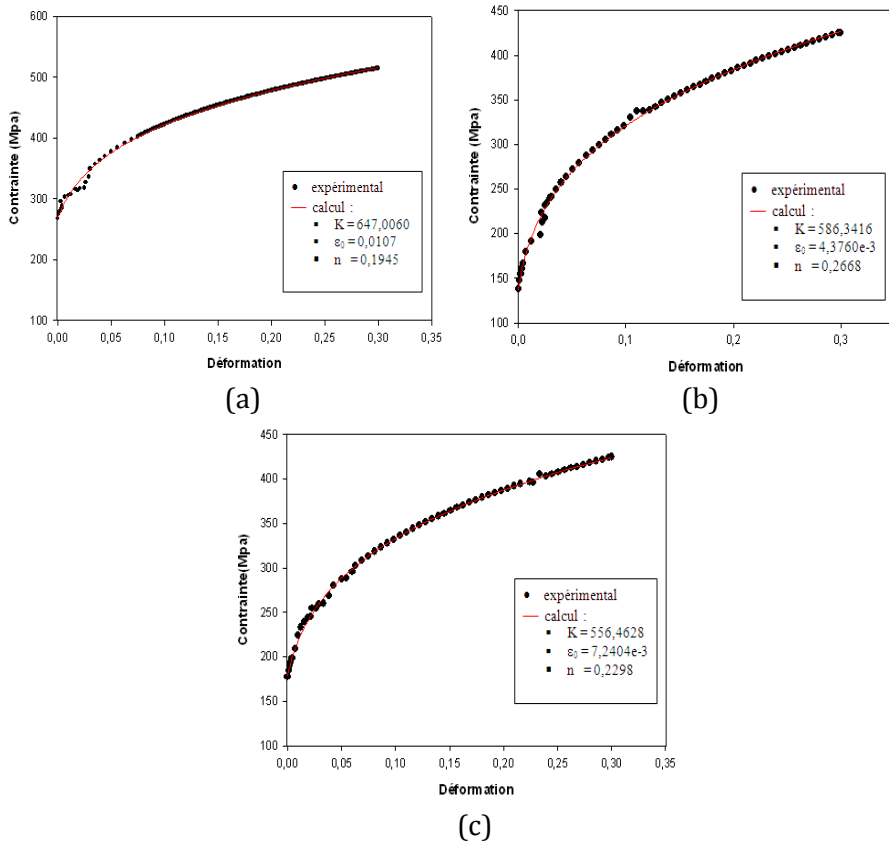


Fig. 2. Identification des courbes d'écroutissement pour : (a) la tôle 1, (b) la tôle 2 et (c) la tôle 3.

3.2. Identification de la fonction d'érouissage -viscosité

3.2.1. Formulation de la loi

En traction simple cette loi d'érouissage-viscosité est donnée par l'expression suivante [7]:

$$\varepsilon_p^* = \left(\frac{\sigma}{K \varepsilon_p^{1/M}} \right)^N \quad (5)$$

$$\sigma = K \varepsilon_p^{1/M} \varepsilon_p^{*1/N} \quad (6)$$

Trois différentes méthodes peuvent être utilisées pour l'identification des coefficients K (coefficient de résistance), M (exposant d'érouissage), N (exposant de viscosité).

Si l'on dispose d'une gamme de résultats expérimentaux (généralement en érouissage, en relaxation, et en fluage primaire) assez étendue, c'est à dire faisant apparaître des variations suffisamment importantes des valeurs expérimentales de σ , ε_p , $\dot{\varepsilon}_p$ (au même instant) on peut utiliser la méthode des moindres carrés linéaire. La loi peut en effet s'écrire pour chaque point expérimental j :

$$\frac{1}{N} \ln \dot{\varepsilon}_p + \frac{1}{M} \ln \varepsilon_p + \ln K = \ln \sigma_j \quad (7)$$

qui est une relation linéaire en $1/N$, $1/M$, et $\ln K$. On remarque que le plan de l'espace $\ln \varepsilon_p^*$, $\ln \varepsilon_p$, $\ln \sigma$ passe aux mieux par les points expérimentaux et on peut déduire facilement les valeurs de N , M et K .

Les essais d'érouissages-relaxation fournissent également un moyen d'identification. L'essai d'érouissage s'effectue avec une vitesse de déformation plastique presque constante tandis que la relaxation correspond à une déformation plastique approximativement constante. En reportant les points (σ, ε_p) , $(\sigma, \dot{\varepsilon}_p)$ dans deux diagrammes bi-logarithmiques, on obtient immédiatement (par la meilleure droite) les coefficients $1/M$ et $1/N$ et l'ordonnée à l'origine donne $\ln K$.

Lorsque l'on dispose surtout des résultats d'essais de fluage, la loi produit présente l'avantage d'être intégrable explicitement (pour une contrainte imposée) à cause de la séparabilité des variables. En fluage, on retrouve

une loi qui établie une relation entre la déformation plastique et le temps :

$$\epsilon_p = \left[\frac{M + N}{M} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N t \right]^{\frac{M}{M+N}} \quad (8)$$

En reportant les points de fluages primaire (ϵ_p, t) dans un diagramme bi-logarithmique on détermine une valeur moyenne de l'exposant $M/M+N$ (Fig. 3a), puis on reporte pour des contraintes différentes les valeurs de $\epsilon_p / t^{\frac{M}{M+N}}$ (Fig. 3b). De la valeur obtenue pour l'exposant $MN/(M+N)$ on tire facilement M et N , puis une valeur moyenne de K par l'ensemble des essais. La figure 3 montre un exemple d'une telle détermination. Avec cette procédure, il est utile de vérifier les valeurs des coefficients en recalculant un essai d'écroutissement-relaxation [4].

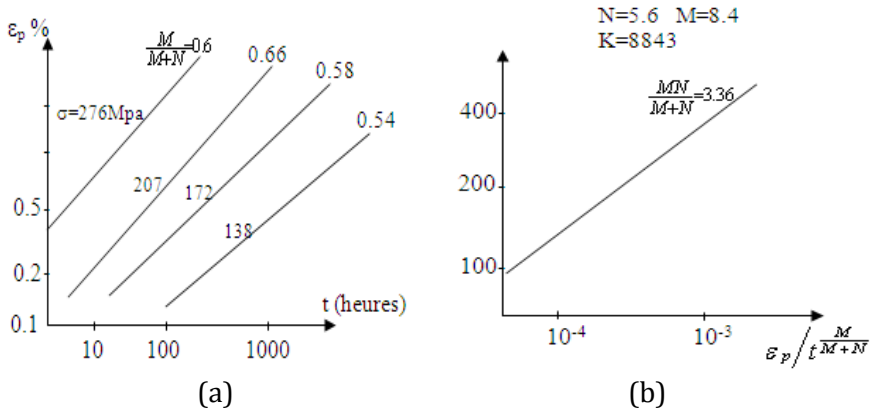


Fig. 3. Détermination de la loi multiplicative par les essais de fluage [1].

3.2.2. Détermination des coefficients K , M et N

La figure 4 illustre une comparaison entre les résultats obtenus par l'identification de la loi d'écroutissement-viscosité et les résultats expérimentaux effectués sur l'alliage AU4G recuit à la température $T = 208^\circ\text{C}$.

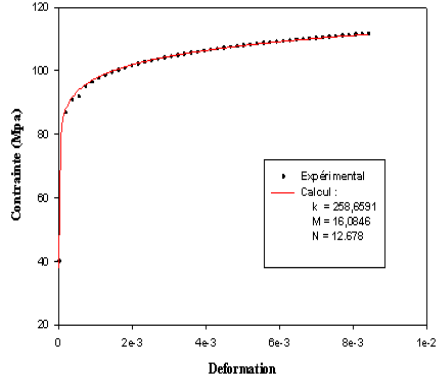


Fig. 4. Identification de la loi d'érouissage-viscosité sur un alliage AU4G recuit, 208°C.

4. IDENTIFICATION D'UN MODELE A 4 PARAMETRES

4.1. Formulation de la loi

Dans cette section, un modèle phénoménologique constitutive a été utilisé pour décrire le comportement spécifique d'un polyéthylène à haute densité (PEHD) [8]. Le tenseur du taux de déformation est décomposé en une partie élastique \mathbf{d}^e et une partie viscoplastique \mathbf{d}^{vp} [9]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^{vp} \quad (9)$$

Le tenseur élastique des taux de déformation \mathbf{d}^e est donné par la loi hypo-élastique suivante :

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{C}^{-1} \mathcal{D} \quad (10)$$

où \mathcal{D} : est la dérivée de Jaumann du tenseur de contrainte de Cauchy et \mathbf{C} : le tenseur élastique isotrope d'ordre quatre qui s'écrit comme suit :

$$C_{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \quad (11)$$

Dans l'équation (11), E , ν et δ sont respectivement, le module d'Young, le coefficient de Poisson et le symbole de Kronecker.

Le tenseur viscoplastique des taux de déformation \mathbf{d}^{vp} peut être donné par une équation de puissance comme suit :

$$\mathbf{d}^{vp} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{\sigma_e - R}{K} \right\rangle^n \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_e} \quad (12)$$

où $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3\mathbf{I}$ est le tenseur déviateur de la contrainte, $\sigma_e = \sqrt{3/2 \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\sigma}'}$ est la contrainte équivalente, K et n sont les paramètres de viscosité et R est l'érouissage isotrope défini par la loi de l'évolution suivante :

$$R = h \left(1 + \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_0} \right)^m \quad (13)$$

Dans l'équation (13) :

$$\varepsilon^p = \int_0^t \|\mathbf{d}^{vp}\| d\tau = \int_0^t \sqrt{2/3 \mathbf{d}^{vp} \mathbf{d}^{vp}} d\tau \quad (14)$$

est la déformation viscoplastique équivalente, ε_0 est la déformation initiale d'écoulement, m et h sont les paramètres d'érouissage.

4.2. Identification des paramètres de la loi du comportement

Des essais de compression ont été effectués sur des éprouvettes cylindriques de PEHD de diamètre 8 mm sur une longueur de 16 mm avec différentes vitesses de déformation et à différentes température [8]. Les résultats expérimentaux aux différentes températures $T = \{25^\circ\text{C}, 40^\circ\text{C}, 60^\circ\text{C} \text{ et } 80^\circ\text{C}\}$ ont été employés pour déterminer les paramètres du modèle viscoplastique. Les valeurs des paramètres K , n , h et m sont présentées dans le tableau 2.

T(°C)	K MPa	n	h MPa	m
25	31,2	7,8	3,15	0,88
40	20,0	8,3	5,0	0,70
60	10,7	10,2	5,5	0,65
80	5,7	11,17	6,0	0,45

Tableau 2. Identification des paramètres du modèle viscoplastique à 4 paramètres.

Les Figures 5 a-d, donnent une comparaison entre la loi constitutive identifiée et les courbes expérimentales pour le PEHD à la température ambiante de 25°C (Fig. 5a), 40°C (Fig. 5b), 60°C (Fig. 5c) et 80°C (Fig. 5d). On peut remarquer que la contrainte est très sensible à la température et elle diminue fortement avec l'augmentation de la température. De plus, on peut observer qu'il y a une bonne concordance entre les deux types de résultats théoriques et expérimentaux.

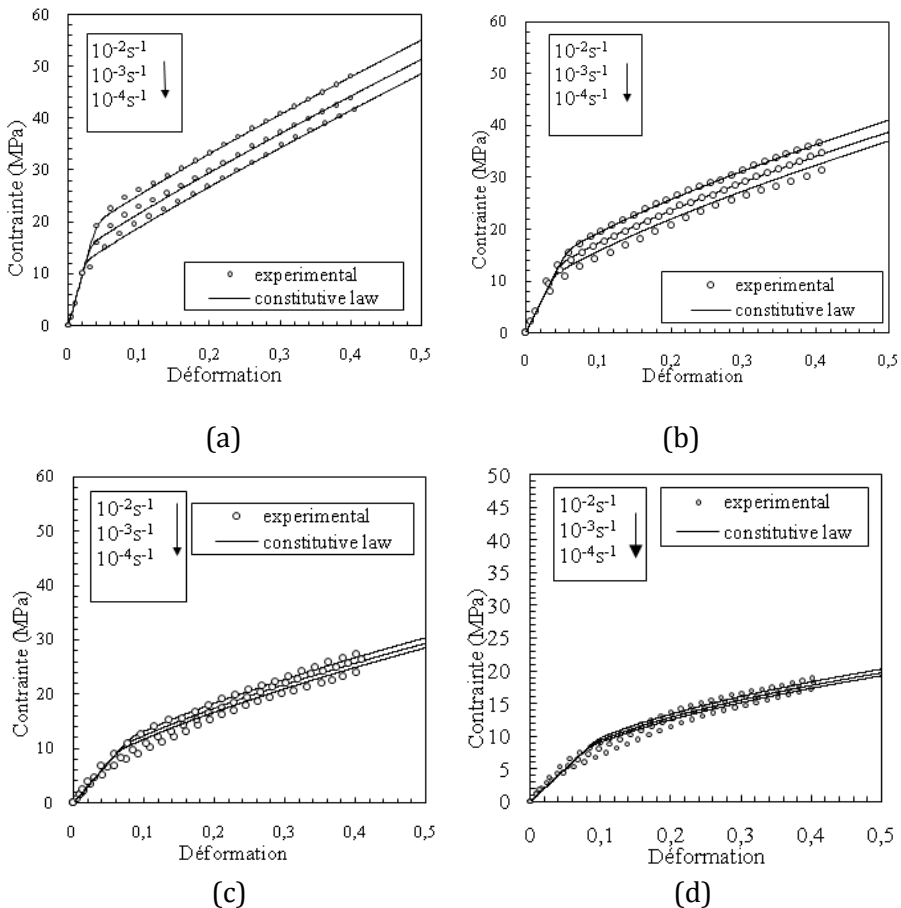


Fig. 5. Comparaison des courbes contraintes-déformations du PEHD à différentes températures: (a) 25°C, (b) 40°C, (c) 60°C et (d) 80°C.

5. PROPOSITION D'UNE METHODE ITERATIVE POUR L'IDENTIFICATION DES MODELES A PLUSIEURS PARAMETRES

5.1. Algorithme de la méthode itérative

Pour identifier des modèles à plusieurs paramètres, on peut utiliser une méthode itérative dont l'organigramme est illustré par la figure 6.

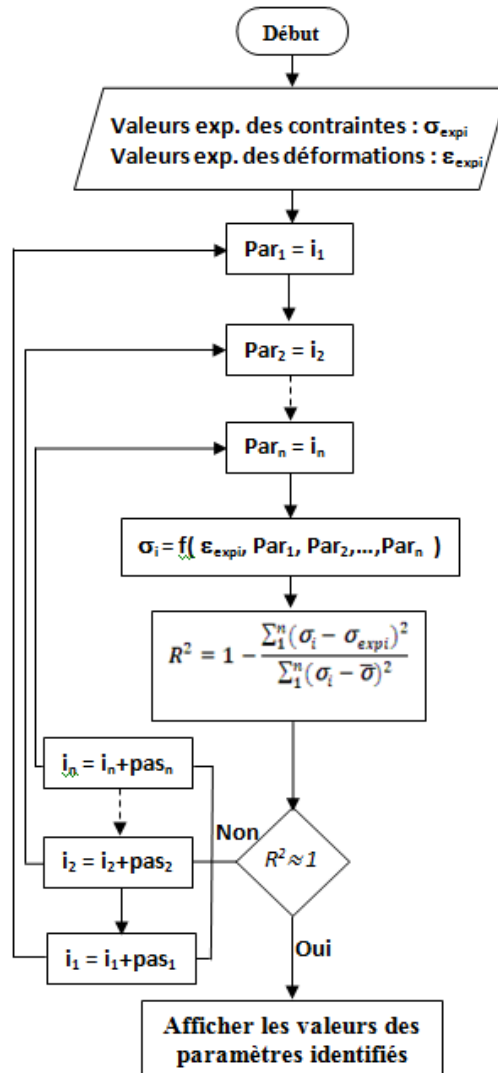


Fig. 6. Méthode itérative pour identification de plusieurs paramètres.

Dans cette méthode les paramètres sont appelées para1, para2,..., paraN, qui sont déterminés par la minimisation de la quantité $\sum_{i=1}^n |\sigma_{i\text{exp}} - \sigma_i|$.

Cette dernière correspond au coefficient de détermination proche de 1 dont la formule est donnée sous la forme suivante :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_1^n (\sigma_i - \sigma_{\text{exp}i})^2}{\sum_1^n (\sigma_i - \bar{\sigma})^2} \tag{15}$$

Il est à noter que cette méthode a pour avantage de prendre en revue toute les possibilités pour tous les paramètres dans un intervalle donné, par contre elle présente un temps de calcul élevé grâce à l'utilisation d'un grand nombre d'itération.

5.2. Identification du modèle de Border-Parton à 7 paramètres

Le tableau 3 présente les équations constitutives du modèle de Bordner-Partom à 7 paramètres.

Taux de déformation inélastique	$\dot{E}^I = \frac{3}{2} \dot{P} \frac{s^I}{J(s^I)}$
Taux de déformation inélastique cumulée	$\dot{P} = \frac{2D_0}{\sqrt{3}} \exp \left[- \left(\frac{Z}{J(s^I)} \right)^{2n} \frac{n+1}{2n} \right]$ $Z = R + X : \frac{s}{J(s)}$
Ecrouissage isotrope	$\dot{R} = m_1 (R_1 - R) \dot{W}^I$ $\dot{W}^I = s : \dot{E}^I, R(t=0) = R_0$
Ecrouissage cinématique	$\dot{X} = m_2 \left(\frac{3}{2} D_1 \frac{s}{J(s)} - X \right) \dot{W}^I$

Tableau 3. Résumé des lois constitutives du modèle de Bordner-Partom.

Le tableau 4 présente les 7 paramètres identifiés du modèle de Bodner-Partom en utilisant la méthode itérative précédemment présentée.

Paramètres identifiés						
R_0 (Mpa)	R_1 (Mpa)	D_0 (s ⁻¹)	n	D_1 (Mpa)	m_1 (Mpa ⁻¹)	m_2 (Mpa ⁻¹)
300	423	20000	16	310	0.068	1.82

Tableau 4. Identification des paramètres d'un modèle viscoplastique à 7 paramètres.

La figure 7 présente une comparaison entre les courbes contraintes-déformations obtenues par essai expérimental et selon la loi identifiée de Bodner-Partom avec les paramètres présentés au tableau 4 ci-dessus.

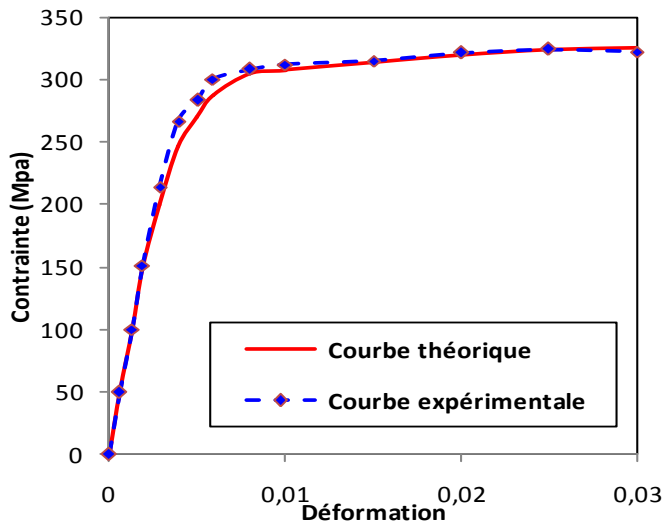


Fig. 7. Comparaison des courbes contraintes-déformation obtenues expérimentalement et par identification du modèle de Bodner-Partom.

5.3. Identification du modèle de Chaboche à 11 paramètres

Les équations constitutives du modèle de Chaboche sont résumées dans le tableau 5 ci-dessous.

Taux de déformation inélastique

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \frac{3}{2} \dot{\boldsymbol{P}} \frac{s' - \boldsymbol{X}'}{J(s' - \boldsymbol{X}')}$$

Taux de déformation inélastique cumulée

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \left\langle \frac{J(s' - \boldsymbol{X}') - R - k}{K} \right\rangle^n$$

$$k(T) = k_1 [1 - \exp(-k_2 T)] + k_3$$

Ecrouissage isotrope

$$\dot{R} = b(h - R) \dot{\boldsymbol{P}}$$

$$R = h(t) \left[1 - \exp(-b \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right]$$

$$h(t) = h_1 [1 - \exp(-h_2 t)] + h_3$$

$$R(t = 0) = 0$$

Ecrouissage cinématique

$$\boldsymbol{X} = \frac{a}{c} (1 - \exp(-c \boldsymbol{\varepsilon}))$$

Tableau 5. Résumé des lois constitutives du modèle de Chaboche.

Les 11 paramètres identifiés du modèle de Chaboche en utilisant la méthode itérative sont présentés dans le tableau 6.

Paramètres identifiés											
h_1	h_2	h_3	a	b	c	k_1	k_2	k_3	n	K	h_1
-80	0.003	0	60	170000	490	255	0.0034	420	1	950	-80

Tableau 6. Identification des paramètres d'un modèle viscoplastique à 11 paramètres.

La figure 8 présente une comparaison entre les courbes contrainte-déformation obtenues par essai expérimentale et selon la loi identifiée de Chaboche avec les paramètres présentés au tableau 6.

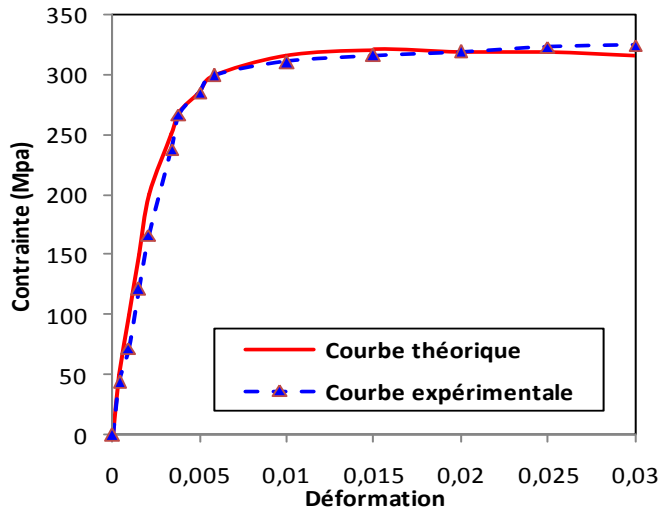


Fig. 7. Comparaison des courbes contraintes-déformation obtenues expérimentalement et par identification du modèle de Chaboche.

6. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons présenté une identification de quelques modèles de comportement viscoplastiques classés dans un ordre croissant de complexité, en commençant par le modèle de Norton à deux paramètres, et en terminant par le modèle de Chaboche à onze paramètres.

Pour les modèles à deux, trois et quatre paramètres on se contente de les identifier en utilisant un programme informatique qui s'appuie sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt déjà implémenté dans le logiciel Sigmaplot. Par contre pour les modèles de Bodner-Partom et de Chaboche à sept et onze paramètres respectivement, l'identification des paramètres de ces modèles est un peu compliquée. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode itérative qui permet d'obtenir une solution numérique au problème de minimisation d'un modèle, souvent non-linéaire et dépendant de plusieurs paramètres.

Les résultats présentés montrent qu'il y a une bonne concordance entre les résultats obtenus par identification des différents modèles et ceux donnés par des essais expérimentaux.

Enfin, il est important de noter que l'identification des lois de comportement élasto-viscoplastique est une étape incontournable pour

toute investigation numérique en mécanique des milieux continus et peut ouvrir la voie à de nouveaux développements, à savoir :

- Le calcul de l'endommagement de fluage et de fatigue sur le cycle stabilisé et par conséquent la prévision de la durée de vie des structures en post-traitement du module viscoplastique.
- Le calcul de l'endommagement couplé aux lois viscoplastiques après initiation de fissures de façon à suivre la progression temporelle de la fissure.
- L'introduction de lois anisotropes de viscoplasticité et d'endommagement.

Références

- [1] K. Woznica, Dynamique des structures élasto-viscoplastique, Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1997.
- [2] J.C. Golinval, Calcul par élément fini de structure élasto-viscoplastique soumises à des chargements cycliques à haute température, Thèse, Université de Liège, 1989.
- [3] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, Mécanique des matériaux solides, 2^{ème} Edition Dunod, Paris, 1996.
- [4] S. Cantournat, Chapitre XIV : Bases physique quantitatives des lois de comportement mécanique,
http://mms2.enscm.fr/mat_paris/deformation/polycop/Ch_14_LdC.pdf
- [5] A. Cochery, B. Milion, B. Lefebvre, Essais de fluage du plomb.
- [6] H.W. Swift, Plastic instability under plane stress, J. Mech. Phys. Solids. 1(1) (1952) 1-18.
- [7] A. Khalfallah, Identification des lois de comportement élastoplastique par des essais inhomogènes et simulations numériques, Thèse, Université de Tunis, 2004.
- [8] B. Aour, Investigation of ECAE process of semicrystalline polymers by a finite element and a coupled boundary element-finite element approach, Thesis, UST Oran, Algeria, 2007.
- [9] J.L. Chaboche, Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the visco-plasticity and visco-elasticity of metals and polymers, Int. J. Solids Struct. 34 (1997) 2239-2254.
- [10] A. Mitsak, Mise au point d'une méthode d'identification des lois de comportement non linéaire, Magister, Université de Mascara, 2008.

INT J SOLIDS STRUCT