

## ETUDES A LA FLEXION STATIQUE DES PLAQUES EPAISSES EN MATERIAUX A GRADIENTS DE PROPRIETES « FGM »

*Slimane.Merdaci<sup>1</sup>, Samir.Benyoucef<sup>1</sup>, Abdelouahed.Tounsi<sup>1</sup>, El abbase. Adda Bedia<sup>1</sup>.*

*<sup>1</sup>Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbés, 89 Cité Ben M'hidi 22000 Sidi Bel Abbés.*

**Résumé :** Deux modèles de déplacement raffiné, **RSDT1** et **RSDT2**, sont développés pour une analyse de la flexion des plaques sandwiches en FGM. Contrairement à toute autre théorie, le nombre de fonctions inconnues sont seulement de quatre contre cinq dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement. Les modèles développés sont basés sur la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, ne nécessitent pas de correction au facteur de cisaillement, et donne lieu à des modifications des contraintes de cisaillement transversales, telles que le cisaillement transversal varie paraboliquement à travers l'épaisseur de cisaillement et satisfait les conditions de surface sans les contraintes. La précision de l'analyse présentée est démontrée en comparant les résultats avec les autres solutions dérivées des modèles d'ordre supérieur. Le fonctionnement des couches classées sont supposés isotropes, la distribution du matériel des deux constituants à travers l'épaisseur, et le module d'élasticité, coefficient de Poisson et les coefficients de dilatation thermique sont supposés varier selon une distribution en loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. La couche de base est toujours homogène et constituée d'un matériau isotrope en céramique. Les résultats numériques pour les flèches et les contraintes de la plaque de métal-céramique sont étudiés.

**Mots-clés :** Plaque à gradient variable, cisaillement et déformation, théories d'ordre supérieur.

**Abstract:** Two refined displacement models, **RSDT1** and **RSDT2**, are developed for a bending analysis of functionally graded sandwich plates. Unlike any other theory, the number of unknown functions involved is only four, as against five in case of other shear deformation theories. The developed models are based on classical plate theory in many aspects, do not require shear correction factor, and give rise to transverse shear stress variation such that the transverse shear stresses vary parabolically across the thickness satisfying shear stress-free surface conditions. The accuracy of the analysis presented is demonstrated by comparing the results with solutions derived from other higher-order models. The functionally graded layers are assumed to have isotropic, two-constituent material distribution through the thickness, and the modulus of elasticity, Poisson's ratio of the faces, and thermal expansion coefficients are assumed to vary according to a power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. The core layer is still homogeneous and made of an isotropic ceramic material. Numerical results for deflections and stresses of functionally graded metal-ceramic plates are investigated.

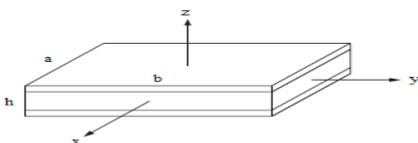
**Keywords:** Functionally graded plates, Shear deformation, Higher-order theories.

## 1. INTRODUCTION

Dans les dernières décennies, une nouvelle classe des plaques / coques constituées de **FGM**, matériaux à gradients de propriétés, dans lequel les propriétés du matériau varie en continu à travers l'épaisseur, est devenue populaire en divers applications. Certains inconvénients des théories classiques des plaques composites multicouches / coques, résultant du brusque changement de propriétés matériel aux interfaces entre les couches adjacentes ont été surmontés, tels que la concentration des contraintes résiduelles, délaminage, fissuration de la matrice. Par conséquent, cette catégorie des plaques **FGM** / coques peut être plus stable que les théories classiques des plaques composites multicouches / coques généralement appliquée avec succès dans diverses industries. Ainsi le développement de méthodologies théoriques et la modélisation numérique pour l'analyse de cette classe des plaques et coques **FGM** a attiré une attention considérable des chercheurs [1-7].

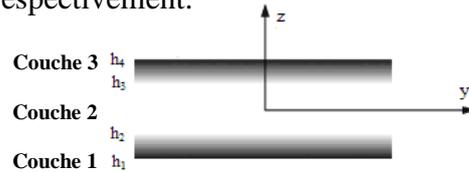
## 2. MODELE MATHEMATIQUE

Prenons le cas d'une plaque sandwich **FGM** rectangulaire d'épaisseur uniforme, composé de trois couches hétérogènes voir la Figure 1, de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h$  soumise à un chargement uniformément répartie  $q(x,y)$ . Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ . Les propriétés matérielles de la plaque **FGM** changent sans interruption à travers l'épaisseur, selon la fraction volumique du matériau constitutif suivant une fonction de loi de puissance **P-FGM**.



**Figure 1** : La géométrie de la plaque sandwich rectangulaire **FGM**

La plaque sandwich est composé de trois couches élastiques, voir la Figure 2. Les ordonnées verticales de ces couches de bas vers le haut de la plaque sandwich **FGM**, sont désigné par  $h_1 = -h/2, h_2, h_3, h_4 = h/2$ , respectivement.



**Figure 2** : La variation de corps le long de l'épaisseur de la plaque sandwich **FGM**

Les propriétés matérielles d'une plaque peuvent être déterminées par la loi des mélanges Wang et al. [10] :

$$E^{(n)}(z) = E_m + (E_c - E_m)V^{(n)} \quad (1)$$

où  $E_m$  : modules de Young de la face supérieure de la couche **1** ( $h_1 \leq z \leq h_2$ ), et la couche **3** ( $h_3 \leq z \leq h_4$ );  $E_c$ : modules de Young de la couche centrale **2** ( $h_2 \leq z \leq h_3$ ).

Récemment, Chehel Amirani et al. [8] ont étudié la vibration libre de la poutre sandwich, et il est montré qu'il ya une différence négligeable entre les résultats obtenus par ces deux techniques (micromécanique technique et de la primauté de la technique des mélanges). La fraction volumique dont cet article supposée transmettre à une fonction en loi de puissance le long de la direction de l'épaisseur:

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (2a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (2b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (2c)$$

Où  $V^{(n)}$ , ( $n=1,2,3$ ) représente la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$ ;

$k$  est l'indice de fraction volumique ( $0 \leq k \leq +\infty$ ), qui indique le profil de variation des matériaux à travers l'épaisseur.

### 3. CHAMP DU DEPLACEMENT ET LES EQUATIONS CONSTITUTIVES

Le champ du déplacement de la plaque **P-FGM** suivant la théorie d'ordre élevé s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (3b)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (3c)$$

Où  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  sont les déplacements de la surface moyenne.  $w_b$ ,  $w_s$ , sont les déformations de cisaillement sur la surface moyenne suivant les axes  $y$  et  $x$  respectivement.  $f(z)$  représente la fonction de distribution des contraintes de cisaillement.

Dans cette étude on prend :

$$\text{RSDT1 : } f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (4a)$$

$$\text{RSDT2 : } f(z) = z \left[ \frac{-1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right] \quad (4b)$$

Dans le cadre des petites perturbations (petites déformations) [9] le tenseur de déformations est obtenu par la dérivé du champ de déplacement et s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \epsilon_y &= \epsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\ \epsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \epsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z) \quad \text{et} \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

Le tenseur contrainte-déformation s'écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{et} \quad (7a)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (7b)$$

En utilisant les propriétés des matériaux définis à l'équation. (1), le coefficient de rigidité,  $Q_{ij}$ , peut être exprimé par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, \quad (8a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}, \quad (8b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}, \quad (8c)$$

### 4. ÉQUATIONS D'EQUILIBRES

Les équations d'équilibres sont obtenues en utilisant le principe de travail virtuel, qui peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \left[ \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right. \\ & \left. + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] d\Omega dz \quad (9) \\ & - \int_{\Omega} q \delta W d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure.

En substituant les équations (6) et (7) dans l'équation (10a) et l'équation (10a) peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ N_x \delta \epsilon_x^0 + N_y \delta \epsilon_y^0 + N_{xy} \delta \epsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b \right. \\ & \left. + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \right. \\ & \left. + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] \\ & d\Omega - \int_{\Omega} q (\delta w_b + \delta w_s) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\text{Où} \quad \begin{Bmatrix} N_x, N_y, N_{xy} \\ M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b \\ M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz,$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz. \quad (10b)$$

Nous pouvons obtenir l'équation d'équilibre associée à la théorie des déformations et de cisaillement présentée :

$$\delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (11a)$$

$$\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (11b)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \quad (11c)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_x^s}{\partial x} + \frac{\partial S_y^s}{\partial y} + q = 0 \quad (11d)$$

La résultante des contraintes d'une plaque sandwich composé de trois couches peut être liée aux couches totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (12)$$

Où :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad (13a)$$

$$M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (13a)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad (13b)$$

$$k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t, \quad (13b)$$

Les coefficients de rigidité  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ , sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} =$$

$$\sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ v^{(n)} \\ \frac{1-v^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (14a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (14b)$$

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (14c)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (14d)$$

La substitution de l'équation(12) dans l'équation(11), nous obtenons l'équation suivante

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_s = 0, \quad (15a)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0, \quad (15b)$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s + q = 0, \quad (15c)$$

$$B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s + q = 0 \quad (15d)$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad (16)$$

$$d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad (i, j, l, m = 1, 2).$$

## 5. SOLUTION NUMERIQUE

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous sommes ici concernés avec la solution exacte des équations (15) pour une plaque FGM simplement appuyée.

Navier Bernoulli. [11] a présenté la force extérieure sous la forme d'une double série trigonométrique:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad (17)$$

Où  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$ , et  $m$  et  $n$  sont des nombres de mode. Pour le cas d'une charge distribuée sinusoïdalement, nous avons :

$$m = n = 1, \text{ et } q_{11} = q_0 \quad (18)$$

Où  $q_0$  représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. Suivant la procédure de solution Navier Bernoulli. [11], nous supposons que la forme de solution pour la

suite  $(u_0, v_0, w_b, w_s)$  satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{cases} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{cases} = \begin{cases} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{cases}, \quad (19)$$

où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont des paramètres à déterminer en utilisant les équations(15). On obtient l'équation suivante:

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}, \quad (20)$$

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}^T, \{F\} = \{0, 0, -q_{mn}, -q_{mn}\}^T \text{ et}$$

la matrice  $[K]$  est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= \lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= \mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \\ a_{44} &= -\left( H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + \right. \\ &\quad \left. H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

## 6. RESULTAT ET DISCUSSION

La plaque **FGM** est considérée comme étant en aluminium et d'alumine avec les propriétés des matériaux suivants:

- de métaux (aluminium, Al):  $E_m = 70 \times 10^9 \text{N/m}^2$ ; Céramique (alumine,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ):  $E_c = 380 \times 10^9 \text{N/m}^2$  et Le coefficient de Poisson des deux matériaux est égale  $\nu = 0.3$  ; On prend le rapport  $a/h=10$ .

Les différents paramètres sans dimension utilisée sont :

$$\text{Déplacement } \bar{w} = \frac{10hE_0}{a^2q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\text{Contrainte axiale } \bar{\sigma}_x = \frac{10h^2}{a^2q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right),$$

$$\text{Contrainte de cisaillement } \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{aq_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right),$$

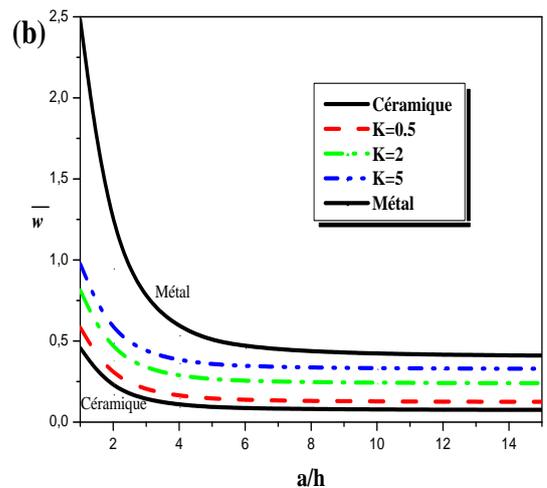
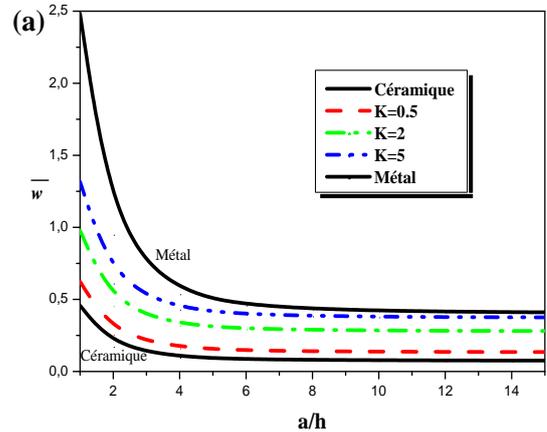
Épaisseur de coordonnée  $\bar{z} = z/h$ .

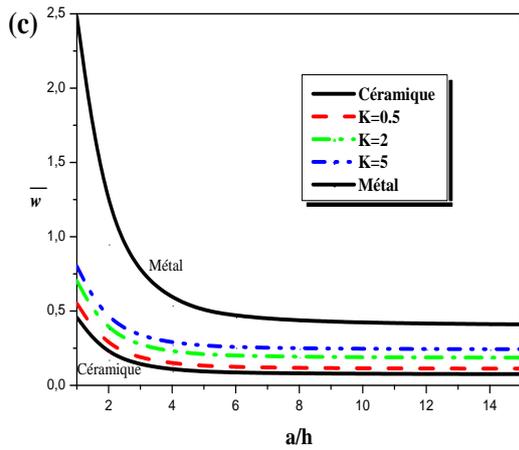
Dans ce qui suit, nous notons que plusieurs types de plaques sandwich sont utilisées:

- La plaque (a) sandwich **FGM**: La plaque est symétrique et nous avons seulement deux couches d'épaisseur égale, il n'y a pas de couche de base. Ainsi,  $h_1 = h_2 = 0$ .

- La plaque (b) sandwich **FGM**: Ici, la plaque est aussi symétrique, et l'épaisseur de l'âme est la moitié de l'épaisseur de la face. Dans ce cas, nous avons  $h_1 = -h/10$ ,  $h_2 = h/10$ .

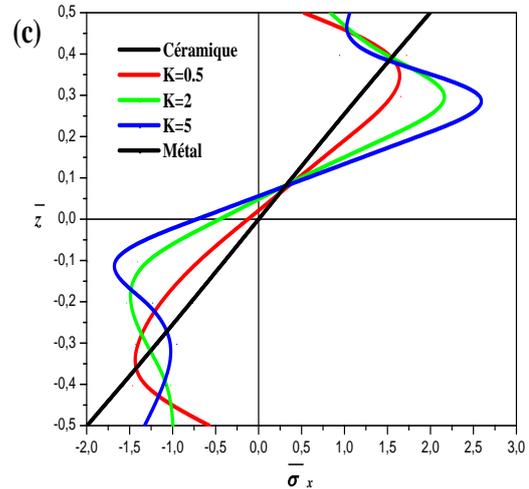
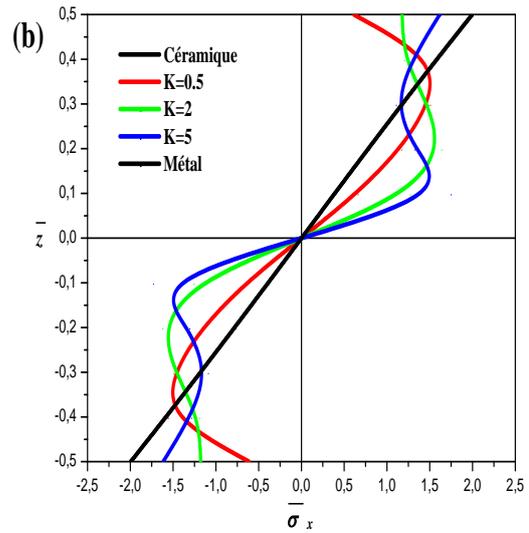
- La plaque (c) sandwich en **FGM**: Dans ce cas, la plaque n'est pas symétrique. Ainsi,  $h_1 = -h/10$ ,  $h_2 = 3h/10$ .





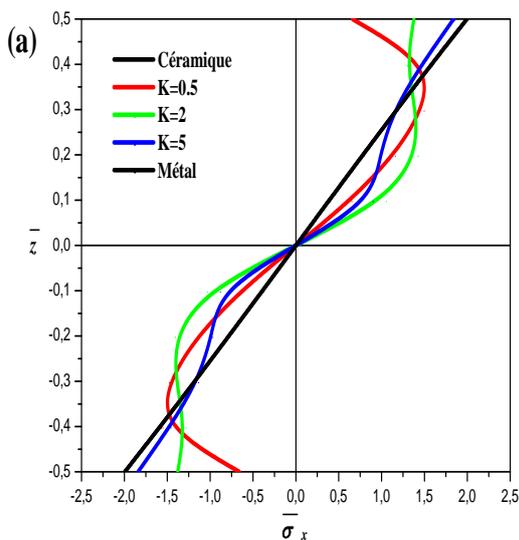
**Figure 3 :** Influence de l'épaisseur ( $a / h$ ) pour diverses valeurs de «  $k$  » et différents types des plaques sandwich FGM.

La figure 3 montre que la variation de déplacement diminue par rapport à l'épaisseur pour différents types des plaques sandwich FGM. La diminution se situe entre celles des plaques en céramique ( $Al_2O_3$ ) et le métal (Al). On peut observer que la déflexion de la plaque FGM riches en métaux est plus grande par rapport à la plaque en céramique. Cela peut être pris en compte pour le module d'Young de la céramique ( $Al_2O_3$ ; 380GPa) étant élevé par rapport à celle du métal (Al; 70GPa).

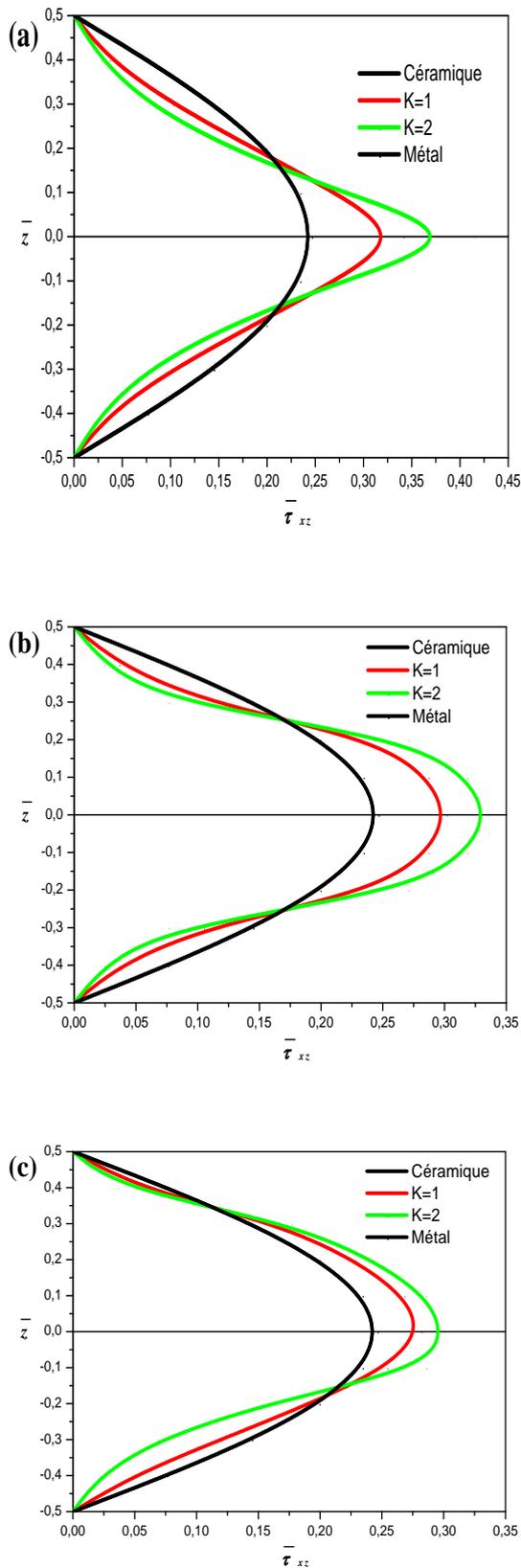


**Figure 4 :** Variation de la contrainte  $\sigma_x$ , à travers l'épaisseur pour différentes valeurs de  $k$  et différents types des plaques sandwich FGM.

Figure 4 contient les graphes de la contrainte axiale  $\sigma_x$  à travers l'épaisseur des plaques sandwich FGM. Les contraintes sont à la traction au-dessus du plan médian et à la compression en dessous du plan médian, sauf pour les non symétrique (c) plaque de FGM. Les résultats démontrent une non- linéarité de la variation de la contrainte axiale de l'épaisseur de la tôle pour les plaques en FGM. Il est important d'observer que la contrainte maximale dépend de la valeur de l'exposant de la fraction volumique  $k$ .



valeurs de  $k$  et différents types des plaques Sandwich **FGM**.



**Figure 5** : Variation de la contrainte de cisaillement transversale  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque pour différentes

Dans la figure 5, on a tracé les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  à travers la distribution de l'épaisseur transversale. La valeur maximale se produit à un point sur le plan médian de la plaque, et son amplitude pour une plaque **FGM** est plus grande que, pour une plaque homogène (en céramique ou en métal). En raison de la non-symétrie de la plaque de **FGM** (c), la valeur maximale de la contrainte de cisaillement transversale,  $\tau_{xz}$  (figure.5b), se produit comme décrit auparavant, à un point situé sur le plan médian de la plaque.

## 7. CONCLUSIONS

Dans cette étude, nous avons démontré les solutions théoriques des plaques épaisses en matériaux à gradient de propriétés **FGM** sous un chargement transversal développé en utilisant la théorie d'ordre élevé.

Les résultats numériques obtenus montrent que la variation du module d'élasticité joue un rôle important sur les distributions de contraintes normales et tangentielles ainsi que le déplacement transversal de la plaque **FGM**.

La précision et l'efficacité de la présente théorie a été démontrée pour le comportement statique des plaques sandwichs symétriques et non symétrique à gradient de propriétés. Toutes les études comparatives ont démontré que les flèches et les contraintes obtenues en utilisant les présentes nouvelles théories de déformation de cisaillement à quatre inconnues sont presque identiques à ceux des autres théories à cinq inconnues. L'extension de la théorie actuelle est également prévue pour des conditions aux limites générales et des plaques de forme plus générale. En conclusion, on peut dire que les théories proposées **RSMT1** et **RSMT2** sont précises et simples à résoudre pour l'étude du comportement statique des plaques épaisses sandwichs en **FGM**

quelque soit leurs formes de symétries et non-symétrique.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Wu, C.P., Li, H.Y.: An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates. *Compos. Struct.* **92**, 2591–2605 (2010)
- [2] Simsek, M.: Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nucl. Eng. Des.* **240**, 697–705 (2010)
- [3] Ying, J., Lü, C.F., Lim, C.W.: 3D thermoelasticity solutions for functionally graded thick plates. *J. Zhejiang Univ. Sci. A***10**(3), 327–336 (2009)
- [4] Lü, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q.: Exact solutions for free vibrations of functionally graded thick plates on elastic foundations. *Mech. Adv. Mater. Struct.* **16**, 576–584 (2009)
- [5] Lü, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q.: Semi-analytical analysis for multi-directional functionally graded plates: 3-D elasticity solutions. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **79**, 25–44 (2009)
- [6] Wu, C.P., Huang, S.E.: Three-dimensional solutions of functionally graded piezothermo-elastic shells and plates using a modified Pagano method. *Comput. Mater. Continua* **12**, 251–282 (2009).
- [7] Vel, S.S., Batra, R.C.: Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *J. Sound Vib.* **272**, 703–730 (2004).
- [8] Chehel Amirani, M., Khalili, S.M.R., Nemati, N.: Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method. *Compos. Struct.* **90**, 373–379 (2009)
- [9] Slimane Merdaci, Abdelouahed Tounsi, Mohammed Sid Ahmed Houari, Ismail Mechab, Habib Hebali, Samir Benyoucef: Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates *Journal of Springer-Verlag* 2010

- [10] L. Wang, G. Bao., Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.

- [11] Navier Bernoulli : la théorie des plaques classique