Contribution à une théorie développementale de l'écrit de résolution de problèmes en mathématiques

Maryvonne MERRI*, Roland POUGET** et Alain MERCIER***
*Ecole Nationale de Formation Agronomique de Toulouse
**Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Midi-Pyrénées
***Institut National de Recherche Pédagogique

I. Classes de problèmes et techniques

Plus que la résolution de problèmes isolés, l'enjeu de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire[38] est de permettre la maîtrise de classes de problèmes. Au-delà de la résolution d'un problème spécifique, les élèves doivent donc entrevoir les moyens de résoudre d'autres problèmes.
Le système scolaire considère qu'il n'existe qu'une seule technique pour résoudre les problèmes d'une classe donnée et l'on nommera fréquemment ces problèmes du nom de la technique ou des objets écrits manipulés. En effet, le statut essentiel d'une production écrite dans l'enseignement secondaire est l'« ostension » d'une technique c'est-à-dire d'un système de signes et des gestes associés (BOSCH & CHEVALLARD, 1999). Par exemple, on identifie les élèves qui utilisent une technique de résolution algébrique de problèmes à deux inconnues par des systèmes de signes tels des équations, des accolades et par des transformations telles la substitution et l'élimination.
Le programme de mathématiques a coutume d'introduire en même temps les classes de problèmes et les techniques algébriques correspondantes. Ce sont d'abord les problèmes à une inconnue et la technique algébrique de résolution qui sont introduits puis le curriculum prévoit l'introduction des problèmes à deux inconnues et les techniques de combinaison et substitution.
Le fait de disposer d'une technique crée donc la classe de problèmes pour les élèves. Pourtant, concevoir un parcours dans un ensemble de problèmes reste un moyen didactique inhabituel pour construire une technique. Il n'existe pas seulement une coïncidence curriculaire entre les techniques et les catégories de problèmes mais l'étude est, la plupart du temps, réduite à des prototypes alors qu'une technique a été construite parce qu'elle aide à résoudre des problèmes qui apparaissent similaires à des problèmes déjà rencontrés. C'est la répétition qui crée le besoin technique.
C'est dans cette perspective de relation entre besoin et technique que nous avons proposé à des élèves de collège et de lycée un ensemble de quatre problèmes qui sont identifiés, dans le curriculum, par « deux équations à deux inconnues ». Une partie de ces élèves ($6^{ème}$, $5^{ème}$) n'ont pas encore bénéficié d'un enseignement de l'algèbre. Nous faisons deux hypothèses :

- Les élèves plus jeunes peuvent résoudre des problèmes qui seront plus tard résolus avec de telles techniques algébriques ;
- Etudier simultanément différents problèmes de même structure accroît non seulement la performance des élèves mais permet également de développer des systèmes de signes pour représenter, calculer et contrôler des solutions.

Nous avons donc créé expérimentalement un écart entre les problèmes et leur technique de résolution « officielle ». Notre matériau de recherche est composé des écrits de résolution des élèves et nous caractériserons le développement des systèmes de signes de deux points de vue : a) d'un point de vue macro-génétique en identifiant les écrits qui caractérisent les élèves d'un niveau scolaire donné . b) d'un point de vue micro-génétique en étudiant les transformations des écrits à travers les quatre problèmes.

De nombreuses recherches en psychologie considèrent l'écrit et les verbalisations comme des moyens privilégiés d'accès à la pensée (NEWELL & SIMON, 1972). Selon cette méthodologie, l'écrit et les verbalisations ne doivent pas avoir d'autres conséquences qu'un éventuel ralentissement de l'activité. Nous considérerons ici l'écrit d'une autre façon : qu'écrivent les élèves qui résolvent un problème avec un papier et un crayon ? Qu'est-ce qu'ils n'écrivent pas ? Quels sont les éléments écrits qu'ils ajoutent ou enlèvent ?
L'écrit ne sera donc pas considéré ici comme une méthodologie d'accès à la pensée mais sera ici décrit pour lui-même.

II. Ecrire comme processus didactique et comme processus psychologique

[38] Le système d'enseignement désigné ici est le système français actuel.

La théorie de B0SCH & CHEVALLARD (BOSCH, 1994 ; BOSCH & CHEVALLARD, 1999) est spécifique à l'activité mathématique. Ils rompent avec une représentation de l'activité mathématique qui aurait lieu seulement « dans la tête de l'élève » et considèrent que les instruments matériels (les mots et discours écrits et oraux, les graphiques …) sont subordonnés à une activité non visible. Ils proposent une distinction entre « ostensifs » - ce qui peut être manipulé par une personne – et « non ostensifs » -ce qui ne peut pas être manipulé. Par exemple, la notation Log est un objet ostensif tandis que la notion de logarithme est un objet non-ostensif. De plus, les objets ostensifs et les objets non-ostensifs ont besoin les uns des autres.
Selon BOSCH & CHEVALLARD, l'association entre non-ostensifs et ostensifs est, en grande part, déterminée dans le cadre d'institutions. Par exemple, la proportionnalité a été successivement enseignée en utilisant le langage des proportions, des opérateurs, le langage des tableaux … à travers de nombreuses réformes de l'enseignement (BOISNARD & al., 1994).
De plus, les institutions peuvent favoriser ou encore restreindre certains usages des objets ostensifs. Par exemple, jusqu'à récemment, pour résoudre des problèmes de vitesse, le système scolaire français restreignait la notation m/s à l'unité de la solution. Dans le même temps, d'autres systèmes scolaires permettaient aux élèves d'utiliser la notation m/s comme moyens pour résoudre des problèmes de vitesse. Dans de tels systèmes, on enseigne explicitement aux élèves à contrôler leurs calculs en se référant à « m » pour la distance et à « s » pour la durée.
Enfin, les objets ostensifs peuvent être plus ou moins pratiques pour réaliser un calcul. Par exemple, la notation $\sqrt{}$ est aussi utile que l'exposant ½ pour calculer $\sqrt{2x3} = \sqrt{2}$ x $\sqrt{3}$ mais la seconde notation est bien plus pratique pour calculer la dérivée de la fonction $\sqrt{x}$: $(\sqrt{x})' = (x^{½})' = ½\, x^{1/2-1}$ (BOSCH & CHEVALLARD, 1999).
La relation entre ostensifs et non-ostensifs est bien plus qu'une relation sémiotique. En effet, BOSCH & CHEVALLARD mettent en évidence la dimension instrumentale des objets ostensifs. Par exemple, une notation comme $\sqrt{}$ possède, d'une part, une dimension sémiotique parce qu'elle est peut être associée à un ou plusieurs objets non-ostensifs et, d'autre part, une valeur instrumentale qui permet à l'élève de prendre en charge des fonctions de résolution de problèmes. Les objets ostensifs supportent des gestes techniques tout en représentant des objets non-ostensifs.
Cette dernière idée fonde une approche technique de l'activité mathématique, les techniques étant reliées à des discours à propos d'elles-mêmes. La technologie comme l'explicitation des techniques requiert, à son tour, la production de nouveaux objets ostensifs et d'objets non-ostensifs. La création mathématique est donc un mouvement de va-et-vient entre ostensifs et non-ostensifs qui est motivée par la nature technique de l'activité. Il est alors de la plus grande importance de se centrer sur des cas où les objets ostensifs, les objets non-ostensifs et les techniques ne sont pas disponibles en même temps ou ne le sont plus. Une telle situation n'est pas viable et les objets manquants doivent être inventés pour créer un système à la fois technique et porteur de sens.
La théorie de BOSCH & CHEVALLARD nous aide à rester attentifs à la distinction entre difficultés cognitives et difficultés d'origine institutionnelle. Une telle théorie peut également prédire les écrits qui seront observés à différents niveaux scolaires.
Cependant, l'approche non-psychologique de BOSCH & CHEVALLARD ne rend pas compte de la présentation largement utilisée de « problèmes à énoncés » et, plus généralement, du terme désigné dans la théorie sémiotique de PIERCE comme « objet ». En effet, il n'existe pas seulement une relation entre objets ostensifs et objets non-ostensifs mais également entre la réalité et sa représentation. VERGNAUD (1994) met en évidence ces deux relations, en les désignant par « homomorphismes ».
Selon VERGNAUD, l'homomorphisme entre la réalité et sa représentation repose surtout sur des opérations qui prennent place à trois niveaux :

- S'informer sur la réalité correspond au premier niveau. Les opérations de prise d'information sont dirigées vers la sélection d'informations pertinentes.
- A un deuxième niveau, les éléments à représenter doivent être choisis. En effet, il n'existe pas de correspondance entre les éléments qui sont représentés et les éléments sélectionnés dans la prise d'information.
- A un troisième niveau, une autre sélection correspond aux éléments de la réalité qui peuvent être représentés en utilisant des objets ostensifs. Cette sélection peu varier selon le niveau de développement des élèves. Par exemple, les enfants de début de collège peuvent avoir des difficultés à représenter des dates de naissance comme des points sur une droite numérique (VERGNAUD, 1987).

L'homomorphisme entre les systèmes de signes et les objets « non-ostensifs » qu'ils désignent renvoie, selon VERGNAUD, à l'organisation de la représentation spatiale des écrits. Cette représentation ne fait donc pas seulement référence à des objets mais également à des situations. Ainsi, les listes, les formules, les équations sont autant de moyens que les cultures ont inventés à travers l'Histoire (GOODY, 1979).

Les personnes héritent de ces outils qui deviennent des standards d'écriture des problèmes. BRUNER & al. (1966) les désignent comme des « amplificateurs » culturels de l'activité individuelle. Pour faire face à un problème, on peut mobiliser des instruments déjà intériorisés et les adapter pour développer de nouveaux modes d'action.
Un bon écrit est suffisamment homomorphe de ce double point de vue, en ayant acquis une certaine autonomie par rapport à la réalité et par rapport aux relations entre objets représentées. Il est, en particulier, une « représentation calculable » c'est-à-dire qu'il aide à calculer une solution au problème (VERGNAUD, 1975). Les équations algébriques, les tableaux de proportionnalité sont des exemples de « représentations calculables ».
Selon BOSCH & CHEVALLARD, les usages des ostensifs sont surtout déterminés dans les institutions scolaires et peu d'innovations sont à attendre des personnes. Par contre, la théorie de RABARDEL (1995) met en avant que les phénomènes de genèse instrumentale ne sont pas marginaux ou accidentels mais généraux dans l'activité cognitive. RABARDEL tient compte de la définition sociale et institutionnelle des instruments mais il utilise le concept de schème car celui-ci est l'entité psychologique qui peut inclure des composantes sociales et rendre compte du fonctionnement du sujet.
Selon RABARDEL, la description des étapes successives de développement de l'instrument est basée sur la distinction entre le pôle sujet (le schème) et le pôle « artefact » de l'instrument : l'artefact peut être modifié selon un processus d'instrumentalisation (RABARDEL, 1995, p. 140), le schème peut aussi être modifié selon un processus d'instrumentation (RABARDEL, 1995, p. 143).
Dans un texte plus récent (RABARDEL, 1999) remet en cause la distinction vygotskienne entre « instruments psychologiques » et « instruments matériels », montrant que le langage n'appartient pas seulement à la catégorie « instrument psychologique » mais qu'il est également un instrument matériel, à la fois orienté vers le sujet et orienté vers l'extérieur. DERRIDA (1981) met en avant le statut particulier de l'écrit : si un mot à l'oral peut être traduit, sa matérialité résiste à toute traduction. Il nous apparaît que l'écrit peut se libérer en partie des objets psychologiques et réels qu'il représente et connaître des transformations autonomes pour des raisons telles que l'économie de l'écriture ou encore son esthétique. La « calculabilité » d'un écrit passe par les transformations que permet sa matérialité. Les scripteurs ont alors à trouver, en particulier, un équilibre entre écrire pour économiser des efforts, écrire pour être lu, écrire pour résoudre le problème : les abréviations, les icônes, les symboles sont au cœur de cet équilibre.

III. La situation expérimentale

Quatre problèmes à énoncé ont été présentés à 201 élèves de la classe de 6ème à la classe de Première (du début du collège à la fin du lycée) et à 11 professeurs-stagiaires de mathématiques au début de l'année scolaire. Ces problèmes ont été regroupés dans un livret de telle façon qu'ils puissent être résolus dans n'importe quel ordre. Les élèves ne pouvaient consacrer plus de 55 minutes (la durée d'un cours) à la résolution de ces problèmes.
La structure de ces problèmes peut être représentée par le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} a\,x + by = c \\ x + y = d \end{array} \right.$$

a, b, c, d, x, y sont des entiers positifs.

Aux deux contraintes du problème correspondent respectivement une équation. Les coefficients entiers permettent l'émergence de procédures de résolution spécifiques à ce contexte.
Nous avons joué sur quelques variables didactiques[39]. Ce sont, en particulier, la taille des nombres, l'identification immédiate des constantes *a*, *b*, *c* et *d* dans l'énoncé, la nature des inconnues (cardinaux ou mesures non discrètes) et une éventuelle représentation en termes de contenant/contenu (lits et chambres).

[39] Une variable didactique est généralement définie comme un paramètre des situations proposées aux élèves dont la variation a une incidence sur les procédures de résolution des problèmes.

Le choix des variables didactiques rend à la fois possible la résolution des deux premiers problèmes sans mettre en œuvre une technique algébrique -et on verra ce que font les élèves les plus jeunes- tout en rendant très ou trop coûteuses des procédures non algébriques pour les problèmes suivants.

Problème A : **A la clinique « la Sauvegarde », il n'y a que des chambres à 1 lit et des chambres à 2 lits.** *Aujourd'hui, la clinique est complète: 20 malades occupent tous les lits des 13 chambres de la clinique.* *Combien de chambres à 1 lit et combien de chambres à 2 lits y a-t-il ?*	a est donné, b est donné (a = 1 et b = 2). c n'est pas donné directement, on donne le nombre e de malades. Il y a donc un implicite : 1 malade correspond à 1 lit (l'énoncé dit uniquement qu'il y a plus de malades que de lits : $c \leq e$). x et y sont des entiers non nuls.
Problème B **Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à 2 lits et des chambres à 4 lits.** *Aujourd'hui, elle affiche « complet » : 30 randonneurs occupent tous les lits des 12 chambres du refuge.* *Combien de chambres à 2 lits et de chambres à 4 lits y a-t-il ?*	Mêmes commentaires que pour le problème A.
Problème C **Dans ma tirelire, je n'ai mis que des pièces de 2F et des pièces de 5F. Je viens de la casser: j'ai 86 pièces et j'ai économisé 232 Francs.Combien de pièces de 2F et combien de pièces de 5F y avait-il dans ma tirelire ?**	a est donné (a = 2). b est donné (b = 5). c est donné (c = 232). d est donné (d = 86). x et y sont des entiers non nuls. ax, by, et c sont des mesures (ici des francs).
Problème D : **Dans ma ferme, il n'y a que des poules et des lapins. Je compte 54 têtes et 176 pattes.** *Combien de poules et de lapins y a-t-il ?*	a, b ne sont pas donnés. Les valeurs de a et b sont implicites : une poule a 2 pattes et un lapin a 4 pattes. De plus d n'est pas donné mais d' avec $d' = d$ (à une tête correspond un animal). c est donné (c = 176).

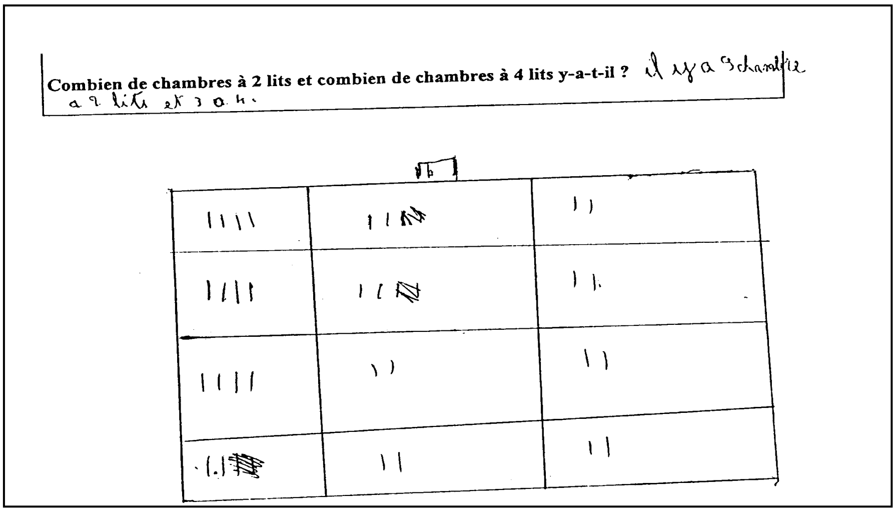
Tableau 1. Les quatre problèmes soumis aux élèves (un problème par page est proposé dans le livret)

IV. Les différents niveaux d'écrit et leur calculabilité

Nous ne retiendrons ici que les protocoles des élèves qui ont fourni un écrit les amenant à la résolution d'un problème au moins et qui n'ont pas utilisé l'algèbre, soit le tiers des élèves de la sixième à la troisième. Cette proportion n'est pas négligeable : elle permet, en effet, de garantir que, dans une classe, une minorité d'élèves suffisamment importante est susceptible d'utiliser et de développer des instruments écrits de résolution de ces problèmes et d'en permettre une diffusion. Tout en étant variés, les écrits peuvent être catégorisés et placés sur un continuum macro-génétique que l'on ne fera ici qu'esquisser.

IV.1 Les représentations analogiques

Les problèmes A et B supposent une relation de contenant à contenu entre les chambres et les lits. Les



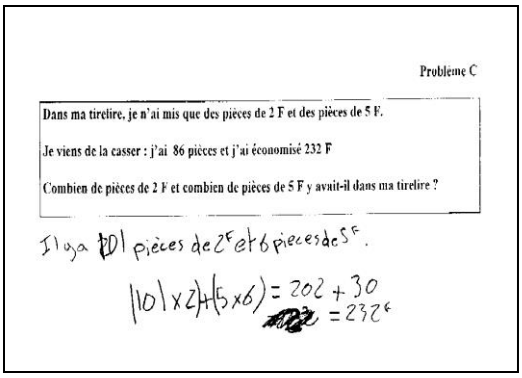
Extrait 1 : Résolution des problèmes A et D par un élève de 6ème

chambres à 1 lit peuvent devenir des chambres à 2 lits.

Cette représentation est calculable. En effet, elle permet à la fois, étant donné sa nature analogique, de respecter l'une des contraintes (le nombre de chambres) et de réaliser la seconde contrainte (le nombre total de lits). Il suffit ensuite de lire le nombre de chambres à un lit et de nombre de chambres à 2 lits.

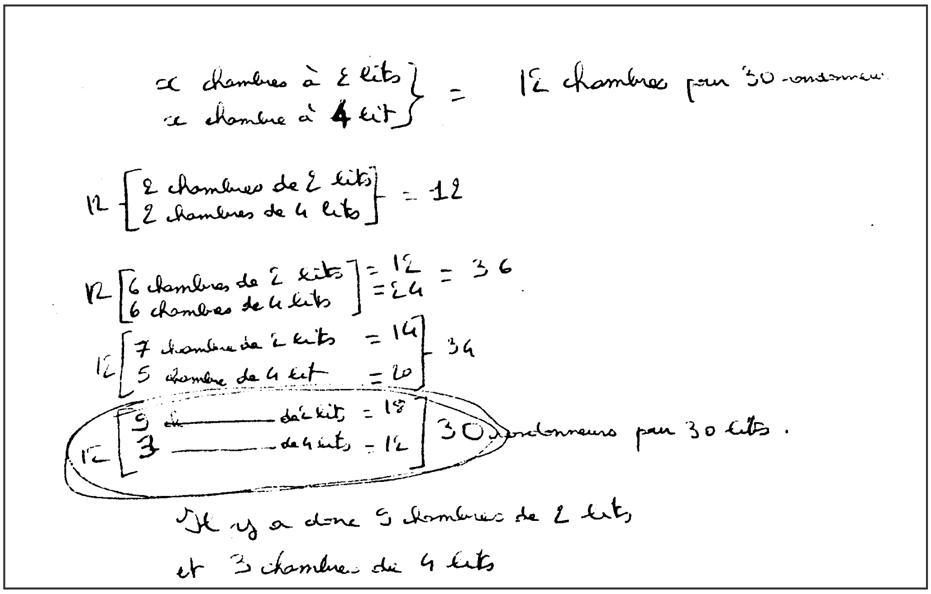
IV.2 Les écritures numériques

Des écrits sous forme de listes verticales ou horizontales et dont les éléments sont additionnés itérativement succèdent aux écrits analogiques. Ils précèdent des écritures combinant multiplication et addition, écritures qui correspondent à la structure de la solution du problème :
En se décontextualisant, les écrits perdent provisoirement une partie de leur
calculabilité. Alors que le dessin des chambres permettait effectivement de "ventiler" les lits, un geste



<u>Extrait 2</u> : Résolution du problème C par un élève de 5ème

analogue à celui qui serait effectué dans la réalité, les contraintes (c et d) sont à présent à la charge de l'élève qui les maintient en mémoire de travail. L'élève ci-dessus produit une écriture rendant compte de l'une des contraintes du problème (la somme totale) mais ne respecte pas l'autre contrainte (le nombre total de pièces). Pour regagner cette calculabilité, certains élèves vont alors générer des écrits tels que celui-ci :

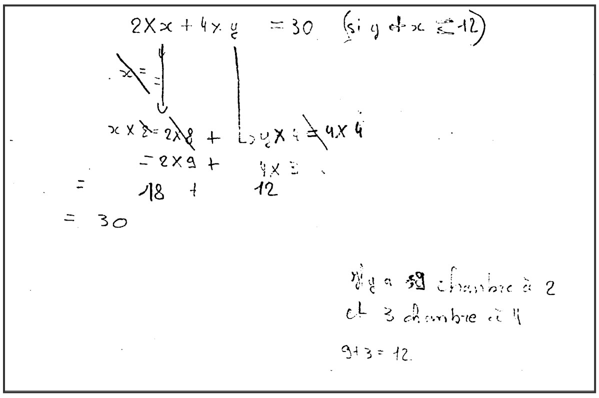


Extrait 3 : Résolution du problème B par un élève de début de 3ème

L'élève choisit une valeur x_1 pour x et y_1 pour y de telle sorte que $x_1 + y_1 = d$, puis il calcule ax_1, by_1. Il calcule ensuite $ax_1 + by_1$ qui donne c_1. Comme $c_1 > c$, il choisit une valeur x_2 pour x et y_2 pour y de telle sorte que $x_2 + y_2 = d$ avec $x_2 > x_1$. Il continue à diminuer la valeur choisie pour x jusqu'à obtenir $c_1 = c$.
Le pattern de fonctionnement de cet instrument permet le contrôle des contraintes et l'exécution des calculs mais ne prend pas en charge le choix des valeurs de x et de y. Cet instrument contrôle en particulier la contrainte x + y = 12.

IV.3 Les écritures alpha-numériques

Enfin, certains élèves adjoignent à l'artefact « formule » rencontré dans la scolarité un schème de calcul par essais et erreurs. Cet instrument intègre, comme le précédent, la structure de la solution, la production du résultat et son contrôle mais une économie de réécriture, assurant surtout un plus grand confort à l'élève, est à présent possible.



Extrait 4 : problème B par un élève de 4ème

V. De la communication de la solution à la recherche de la solution

Une analyse complémentaire des écrits, sur le plan micro-génétique cette fois, permet de préciser les transformations des écrits pour un élève donné au cours de la résolution des quatre problèmes. Nous observons alors trois catégories de phénomènes :

- Les variations de catégories d'écrit pour un élève donné : ainsi, les représentations figuratives chambres/lits sont souvent remplacées par des écritures numériques ou alpha-numériques ;

- L’extension ou, au contraire, la réduction du système de signes pour une catégorie d’écrits : les élèves cherchent un compromis entre l’économie des écrits (écrire moins et plus vite) et le contrôle sémiotique de leurs écrits (écrire sans perte des objets référencés) ;
- La variation de fonction d’un écrit donné, en particulier de l’écrit pour communiquer la solution à autrui à l’écrit pour « résoudre ».

Cette dernière transformation est sans nul doute celle qui a les conséquences les plus importantes sur le plan didactique. En effet, la répétition de la même structure de problèmes permet que la solution du problème précédent puisse devenir la structure de recherche de la solution du problème suivant. Ainsi, l’élève déjà présenté dans l’extrait 4 rend ainsi publique sa réponse pour le problème A et en donne la preuve :

Il y a 7 chambres à 2 lits et 6 chambres à 1 lit

Car 7 x 2 + 6 = 14 + 6 = 20 malades

6 malades seuls

Chambre à 2　　*chambre seul*

malades dans les chambres à 2

<u>Extrait 5</u> : Problème A de l’élève précédent (cf. extrait 4)

Cette écriture deviendra alpha-numérique au problème suivant (cf. extrait 4). Il apparaît ici que la calculabilité de l’écrit alpha-numérique passe par l’existence préalable d’un autre écrit ayant le statut de preuve. La didactique de l’algèbre requiert alors que l’on s’attarde, par une fréquentation précoce des problèmes dès le début du collège, sur la structure numérique de la solution en répétant la résolution de problèmes d’une même classe. Cette expression de la structure de la solution prépare utilement l’apprentissage de la « mise en équation ».

Conclusion

Notre dispositif expérimental réalise, on l’a vu, les conditions de genèse d’instruments sémiotiques pour une partie des élèves les plus jeunes de notre panel.
Une fréquentation des problèmes de ce type dès la sixième, voire avant, permettrait de préparer « la vie bonne »[40] au moment où il sera temps, dans le cursus scolaire de l'élève, d'apprendre les techniques de résolution de cette classe de problèmes. On pourrait alors concevoir une organisation analogue à celle pensée par G.SENSEVY pour son travail sur les fractions (1998), organisation qui prend en compte le rapport de l’élève au temps didactique.
En effet, la fréquentation précoce de cette classe de problèmes en assure la compréhension avant toute technique algébrique car un certain nombre de ces problèmes peuvent être résolus avec les instruments antérieurs de l'élève. La technique est alors rendue nécessaire aux yeux de l'élève par le jeu sur les variables didactiques qui lui donnent le meilleur rapport coût/efficacité.

Bibliographie

BOISNARD Danièle, HOUDEBINE Jean, JULO Jean, KERBOEUF Marie-Paule & MERRI Maryvonne, *La proportionnalité et ses problèmes*, Hachette, Éducation, Paris, 1994.
BOSCH Marianna, *Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité*, In M. Artigue & all. (eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 305-312), La pensée sauvage, Grenoble, 1994.
BOSCH Marianna, CHEVALLARD Yves, *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique,* Recherches en didactique des mathématiques, 19/1, pp. 77-124, La pensée sauvage, Grenoble, 1999.

[40] Selon une expression d’Yves CHEVALLARD, lors d’une conférence dans le cadre d’une formation expérimentale de mathématiques de l’Académie de Toulouse.

BRUNER, Jerome, OLVER Rose & GREENFIELD Patricia (Eds.), *Studies in cognitive growth*, John Wiley, New York, 1966.
DERRIDA Jacques, *De la grammatologie*, Minuit., Paris, 1981.
GOODY Jack, *La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage*, Éditions de Minuit, 1979.
NEWELL Alan & SIMON Herbert, *Human problem solving, Englewood Cliffs*, Prentice-Hall, New York, 1972.
RABARDEL Pierre, *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*, Colin, Paris, 1995.
RABARDEL Pierre, *Le langage comme instrument, éléments pour une théorie instrumentale élargie*, in Yves Clot (Dir.), *Avec VYGOTSKI*,, Paris, pp. 241-265, 1999.
SENSEVY Gérard, *Institutions Didactiques : étude et autonomie à l'école élémentaire,* Paris, PUF, 1998.
VERGNAUD Gérard, *Calcul relationnel et représentation calculable*, Bulletin de psychologie, tome 28 (7-8), n° 315, pp. 378-387, 1975.
VERGNAUD Gérard, *Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant,* In J. Piaget, P. Mounoud & J.P. Bronckart (dr) Encyclopédie de la Pléiade: Psychologie, pp. 821- 844, Gallimard, Paris, 1987.
VERGNAUD Gérard, *Homomorphismes réel-représentation et signifié-signifiant - Exemples en mathématiques*, Didaskalia, n° 5, pp. 25-34, 1994.