

## ETUDE PARAMETRIQUE FREQUENTIELLE POUR L'ANALYSE LIBRE D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE MINCE ISOTROPE AVEC DIFFERENTES COMBINAISONS D'APPUI EN UTILISANT LA METHODE DE RITZ.

Reçu le 14/03/2006 – Accepté le 07/05/2007

### Résumé

Les fréquences circulaires des plaques rectangulaires isotropes avec trois combinaisons d'appuis simplement appuyés (S) et encastrés (C) sont déterminées en utilisant la méthode de Ritz. La solution du problème aux valeurs propres est obtenue en proposant une déformée de fonction de forme en séries qui vérifie les conditions aux limites de la plaque. Les fréquences circulaires calculées par l'approche énergétique sont comparées avec celles obtenues par la méthode numérique des éléments finis. Ensuite, une étude paramétrique fréquentielle des trois plaques est nécessaire afin de mieux appréhender d'une part le comportement vibratoire et d'autre part cerner le taux de dispersion. La confrontation des résultats obtenus par rapport à ceux de la littérature de rigueur, montre une bonne concordance.

**Mots clés:** *Vibration libre, Isotrope, plaque, Fréquence circulaire, Paramètres fréquentiels, Méthode des éléments finis, Méthode de Ritz*

### Abstract

The circular frequencies of rectangular isotropic plaque with three cases of boundary conditions simply supported (S) and clamped (C) are determined using Ritz method. The solution of the eigenvalue problem is obtained by assuming a deflected shape in the form of harmonic series functions that satisfy the edges boundary conditions of the plate. Then, a study on parametric frequency of three plates is handled in order to get into better inside of the dynamic behavior as well as to appreciate the rate of discrepancy. The circular frequencies are obtained based on the energy method and compared with the numerical method using finite element. The results obtained show good agreement with those from the literature.

**Keywords:** *Free vibration, isotropic, plate, circular frequency, parameter frequency, finite element Rayleigh – Ritz method.*

**T. ZARZA<sup>1</sup>,  
T. BENMANSOUR<sup>2</sup>,  
M. NAIMI<sup>1</sup>**  
Départements  
<sup>1</sup>Génie Civil,  
<sup>2</sup>Génie Mécanique  
Faculté des Sciences de  
l'Ingénieur  
Université Mentouri  
Constantine - Algérie

### ملخص

تمت دراسة الاهتزازات الحرة لصفحة مستطيلة متجانسة باستعمال طريقة ريتز. تم الحصول على حلول مسألة القيم الدائرية بافتراض شكل مشوه للصفحة باستعمال متسلسل توافقية تحقق شروط الحد للصفحة. للتحقق من نتائج ودقة الطريقة الحالية، نفس الصفحة تم تكتيمها و تحليلها باستعمال العناصر المتناهية. من تم تمت دراسة عوامل أساسية للاهتزازات ثلاثة صفحات تختلف بنوع المساند الحدية كانت ضرورية من اجل استيعاب شامل لسلوك الاهتزازات من ناحية و كشف درجة الهوة بين النتائج من ناحية أخرى. المقارنة بين النتائج المحصل عليها بالنسبة للنتائج المرجعية المأخوذة من الدوريات العلمية الجادة تؤكد التوافق النسبي بدرجة مقبولة جدا.

**الكلمات المفتاحية:** *الاهتزازات الحرة، متجانسة، صفحة، نوثر طبيعي، المعامل النونري، طريقة العناصر المتناهية، طريقة ريلي ريتز.*

Les plaques isotropes sont des structures largement utilisées dans la technologie de l'espace, navale, aéronautique ainsi dans divers domaines civil et industriel. Leur première mission est de résister à l'environnement. Si l'environnement dépend du temps, c'est le comportement dynamique. Une plaque est soumise à un environnement dynamique constitué de forces de diverses natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) s'appliquant sur elle et provoquant un mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations en tous ses points. Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement du feuillet moyen dans la direction opposées à z, ce déplacement vertical est habituellement appelé flèche et noté par  $w$ . Les théories des plaques dépendent énormément de l'élanement : Les plaque minces (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligé, les plaques minces avec de grandes flèches (Karman), et enfin les plaques modérées (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée. Warbuton [1] et Leissa [2] [3] on présenté une excellente littérature sur les plaques. Les fréquences propres de vibration d'une structure dépendent des rigidités du matériau constitutif. Toutefois, la recherche systématique des modes n'est pas aisée car la déformée d'une plaque résulte de la superposition des déformées de différents modes. Bien que les travaux sur l'analyse vibratoire en flexion des plaques orthotropes ont été étudiés, seulement des solutions approximatives sont disponibles à l'exception des plaques simplement appuyée [4].

Les vibrations naturelles sont des vibrations de la structure en l'absence des forces extérieures. Dans tous les cas, les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. D'autres chercheurs, ont appliqué d'autres méthodes telles que la méthode différences finies [5] [9], des superpositions [6] [7], des éléments finis [8]. Avec le développement de la communication, l'analyse vibratoire des plaques complètement libre est devenue une thématique d'actualité. En se basant sur la méthode des éléments finis, A. Shaaffie et al [10] ont déterminé les fréquences naturelles de deux plaques rectangulaires identiques, complètement libres et mécaniquement couples. D'autres travaux d'analyse vibratoire libre dans le plan avec et sans support [11] [13], d'une console sectorielle annulaire [12] ont été faits. Bardel [14] en utilisant la méthode de Ritz a étudié la vibration libre d'une plaque rectangulaire isotrope.

Le but de ce travail consiste à calculer les fréquences naturelles de différents modes des plaques isotropes [SSSS-SSCC-SCSC]. Un modèle mathématique vérifiant les conditions aux limites est sélectionné. Les résultats des trois plaques sont calculés et sont comparés avec ceux de la méthode des éléments finis. Ensuite, leurs paramètres fréquentiels sont comparés avec ceux de la littérature de rigueur telles que illustrées dans la référence de Chai [15] La plaque est considérée comme isotrope, homogène et élastique avec une épaisseur uniforme.

## 1. LA THEORIE DE KIRCHHOFF :

Historiquement, le premier modèle des plaques minces a été développé par Lagrange, Poisson, et Kirchhoff. Aujourd'hui on l'appelle le modèle de Kirchhoff ou simplement plaque de Kirchhoff. C'est le modèle le plus simple pour décrire le champ de déplacement d'une plaque mince. Dans cette théorie, on néglige les effets de cisaillement transverse.

### 1.1 Domaine de validité

La théorie de Kirchhoff est généralement admise comme étant la théorie des plaques minces dont la caractéristique principale est de permettre l'expression des déformation et des contraintes en fonction de la flèche  $w$  de la surface moyenne. La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élanement de la plaque. Une plaque est dite mince si son facteur d'élanement est  $(b/h > 20)$  où  $b$  est la dimension caractéristique et  $h$  l'épaisseur de la plaque.

### 1.2 Théorie des plaques minces

Dans une plaque mince, lorsque l'effet de cisaillement transversal est négligeable, la théorie Kirchhoff donne des résultats très satisfaisants.

### 1.3 Hypothèses :

- 1- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions latérales. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan feuillet moyen.
- 2- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Cette hypothèse permet de supposer que le mouvement de tous les points se trouvant sur la normale au feuillet moyen est le même, c'est-à-dire que :

$$w(x, y, z) = w(x, y).$$

Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse. On a dans ce cas :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

- 3- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- 4- Les contraintes  $\sigma_{zz}$  normales dans la direction transversale sont négligeables par rapport aux composantes de contraintes, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout point  $z$  donc  $\sigma_{zz} = 0$
- 5- la plaque est symétrique par rapport à son feuillet moyen lors de sa fabrication.

### 1.4 Champ de déplacement

Dans la théorie des plaques minces, on se base sur la dérivation des équations des plaques sur la géométrie non déformée. Le feuillet moyen de la plaque subit une translation dans la direction verticale ayant la valeur  $w$  et subit aussi deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  de la normale à la surface moyenne dans les plans  $yz$  et  $xz$  respectivement.

## 2. LA METHODE RITZ :

La méthode de Ritz est une extension de la méthode de Rayleigh. C'est une méthode approchée également fondée sur des méthodes énergétiques. Le principe général consiste à ramener le problème à celui d'un système comportant un nombre fini de degrés de liberté. Pour cela on fixe un modèle hypothétique de déformation de la structure, satisfaisant les conditions aux limites et dépendant de plusieurs  $(m)$  coordonnées généralisées.

Cette méthode permet une bonne approximation de la fréquence fondamentale, mais aussi donne des résultats satisfaisants pour les fréquences supérieures. La qualité des réponses s'améliore au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de tronçons de fonction de forme. En effet les rigidités des liaisons dépendent de la déformée de la fonction de forme qui se corrige en fonction du nombre de termes ajoutés. Toute la difficulté de la méthode de Ritz est de « bien choisir » la fonction forme à tester.

### 2.1 Equation du mouvement

L'étude vibratoire de la plaque passe par la connaissance de l'amplitude de ses déplacements en chaque point. Dans le cas de vibration libre, la méthode de Ritz permet d'approcher ces fréquences propres. Afin de les déterminer, on établit l'équation du mouvement de la plaque en réalisant une étude énergétique, faisant intervenir les différentes énergies du système (énergie cinétique, énergie potentielle). Cette méthode est utilisée pour développer le déplacement de la plaque selon des bases :  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_i(x), \dots, \phi_n(x)$

Deux bases sont généralement envisagées : Une base sinusoïdale et une base polynomiale.

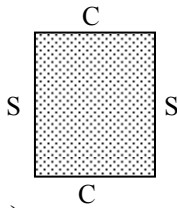
Soit une classe de fonctions de la forme généralisée:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1,2}^{\infty} \sum_{n=1,2}^{\infty} A_{mn} \phi_m(x) \phi_n(y) \quad (1)$$

Où les  $A_{mn}$  représente l'amplitude du mode  $(m, n)$  à déterminer.

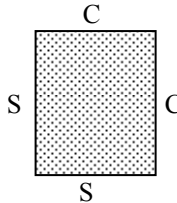
On propose l'étude de la réponse libre d'une plaque isotrope de trois différents cas de conditions d'appuis SCSC, SSCC et SSSS.

**Cas 1: SCSC**



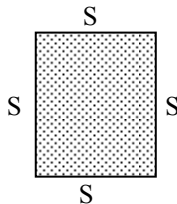
$$w(x, y) = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1, \dots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2)$$

**Cas 2: SSCC**



$$w(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3)$$

**Cas 3: SSSS**



$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4)$$

$$\Pi p_{\max} = \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left[ D \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] - \omega^2 \gamma(x, y) w^2(x, y) \right\} dx dy \right] dx dy \quad (10)$$

### 2.2 Energie d'une plaque

Considérons une plaque linéairement élastique dont les liaisons sont suffisantes pour assurer sa position sans déplacement d'ensemble possible. Le travail positif effectué par les contraintes dans le passage de l'état naturel à l'état déformé est emmagasiné dans la plaque sous forme d'énergie potentielle : C'est l'énergie de déformation ou potentiel élastique. Ce travail est restitué lors du retour de la structure à l'état naturel. Le problème de la flexion d'une plaque revient donc à chercher la fonction  $w(x, y)$  qui vérifie les conditions aux limites et qui rend minimale l'énergie totale qui est la somme de l'énergie de déformation et de l'énergie potentielle. On sera amené à distinguer localement les effets membranaires, de flexion, et de l'effort tranchant transverse. L'énergie interne de déformation de la plaque est donnée par l'intégrale sur le feuillet moyen des produits des efforts généralisés par leur grandeur duale des déformations généralisées.

$$V = \frac{1}{2} \int_A (\bar{N} \cdot \bar{\epsilon} + \bar{M} \cdot \bar{\chi} + \bar{Q} \cdot \bar{\lambda}) dA \quad (5)$$

Les contraintes dans la structure, peuvent être modélisées par des efforts généralisés résultants de membrane, notées  $N_x, N_y, N_{xy}$ , de trois moments de flexions  $M_x, M_y, M_{xy}$ , et enfin de deux efforts tranchants  $Q_x, Q_y$ .

### 3. FORMULATION ANALYTIQUE

L'équation de la fréquence peut être obtenue en utilisant la méthode approchée de Ritz où l'énergie de déformation maximale est de la forme:

#### 3.1 L'énergie de déformation d'une plaque isotrope

$$U_{\max} = \frac{D}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (6)$$

Avec la rigidité de flexion

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7)$$

et  $\nu$  coefficient de Poisson

L'énergie maximale de la plaque en vibration libre avec une amplitude  $w$  et la fréquence naturelle  $\omega$  est comme suit:

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \gamma(x, y) w^2(x, y) dx dy \quad (8)$$

$w(x, y)$  est la fonction admissible et  $\omega$  est la fréquence naturelle de la plaque.

#### 3.2 L'énergie totale de la vibration de la plaque :

$$\Pi p = U_{\max} - T_{\max} \quad (9)$$

### 3.3 Le quotient de Rayleigh :

Le quotient de Rayleigh est le rapport de l'énergie de déformation maximale et de l'énergie cinétique maximale. Ce quotient est défini comme suit:

$$\lambda_R = \frac{U_{\max}}{T_{\max}} = \frac{U_{\max}}{\frac{\omega^2}{2} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \gamma(x, y) w^2(x, y) dx dy} \quad (11)$$

Où  $U_{\max}$  et  $T_{\max}$  sont donnés par les équations (6) et (8) respectivement.

Basé sur le principe de l'énergie potentielle, et appliquant la méthode de Ritz, équation (11) est minimisée par rapport aux coefficients inconnus  $A_{mn}$  pour donner des séries d'équations simultanées et homogènes

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial (\omega^2)}{\partial A_{mn}} = 0 \quad m=1,2,\dots,n=1,2,\dots \quad (12)$$

Substituant le quotient donné par l'équation (11) dans l'équation (12) nous mène à :

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial A_{mn}} = \frac{T_{\max} \frac{\partial U_{\max}}{\partial A_{mn}} - U_{\max} \frac{\partial T_{\max}}{\partial A_{mn}}}{T_{\max}^2} = 0 \quad (13)$$

### 4. FORMULATION DES ELEMENTS FINIS

L'équation du mouvement de la plaque en vibration libre peut être obtenue du principe de Hamilton, lequel est une généralisation à partir du principe des déplacements dans la dynamique des corps déformables. L'équation différentielle d'équilibre du mouvement est obtenue en utilisant le principe de Hamilton comme suit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi p) dt = 0 \quad (14)$$

Où  $\delta$  est l'opérateur variationnel, L est la fonction de Lagrange de la plaque,  $t_1$  et  $t_2$  sont les bornes particulières du temps. T est l'énergie cinétique,  $\Pi p$  est l'énergie potentielle.

Ce principe n'est en somme qu'une forme intégrée dans le temps du principe des travaux virtuels.

Les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial w_i} + \frac{\partial \Pi_p}{\partial w_i} = \{0\} \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Où  $\{w_i\}$  et  $\{\dot{w}_i\}$  sont les vecteurs déplacements et vitesses des coordonnées généralisées

En substituant les fonctions de forme proposées (2), (3) et (4) dans l'équation (13), l'équation aux valeurs propres pour l'analyse vibratoire libre une plaque isotrope s'écrit :

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{W\} = \{0\} \quad (16)$$

Où

$[K]$  : la matrice rigidité globale de la rigidité obtenue par assemblage des matrices élémentaires,  $[M]$  la matrice masse rigidité globale obtenue par assemblage élémentaire et

$\{W\}$  : le vecteur global des déplacements.

### 5. LES CONDITIONS AUX APPUIS

Bord encasté à  $x = a$ :

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (17)$$

Bords simplement appuyés à  $x = a$  :

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (18)$$

La fréquence naturelle fondamentale est représentée en tant que terme adimensionnel  $\Omega_i$  défini comme :

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_i a^2 \quad (19)$$

### 6. RESULTATS

Considérons à titre d'exemple numérique une plaque rectangulaire de longueur  $a = 0.25$  m, de largeur  $b = 0.25$  m et d'épaisseur  $h = 0.005$  m. Les propriétés mécaniques et physiques sont le module de Young  $E = 525000$  N/mm<sup>2</sup>, coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  et la densité  $\rho = 800$  kg/m<sup>3</sup>. L'élément plaque est considéré, la discrétisation de la plaque est réalisée avec un maillage de  $8 \times 8$ .

Type/Mode	Présent	FEM
SSSS/ 1-1	12241	11921
SSSS/ 1-2	30603	29590
SSCC/ 1-1	16915	16249
SSCC/ 1-2	38292	36088
SCSC/ 1-1	18168	17390
SCSC/ 1-2	34389	32470

**Tableau 1 :** Comparaison des fréquences naturelles d'une plaque isotrope carrée avec la méthode des éléments finis (FEM)  
 $a/b = 1, \nu = 0.25$

a/b	Mode (m,n)	Leissa [2,15]	Whitney [15]	R-Q [15]	Chai [15]	Présent
0.4	1-1	11.44	-	-	-	11.44
	1-2	16.18	-	-	-	16.18
2/3	1-1	14.25	-	-	-	14.25
	1-2	27.41	-	-	-	27.41
1.0	1-1	19.73	19.74	19.74	19.74	19.73
	1-2	49.35	49.35	49.35	49.35	49.34
	2-1	49.35	49.35	49.35	49.35	49.34
	2-2	78.86	78.96	78.96	78.96	78.95
	1.5	1-1	32.07	-	-	-
	1-2	61.68	-	-	-	61.68
2.5	1-1	71.55	-	-	-	71.55
	1-2	101.16	-	-	-	101.16

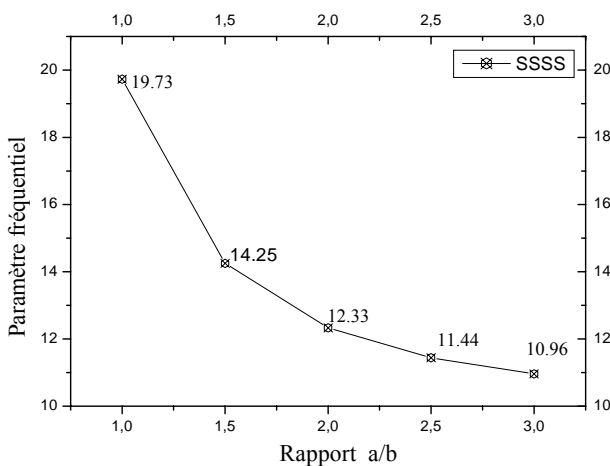
**Tableau 2 :** Comparaison des fréquences naturelles obtenues pour une plaque isotrope carrée du type S-S-S-S. Le paramètre fréquentiel  $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ,  $\nu = 0.30$

**Tableau 3 :** Comparaison des fréquences naturelles obtenues pour une plaque isotrope carrée du type S-S-C-C. Le paramètre fréquentiel  $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ,  $\nu = 0.30$

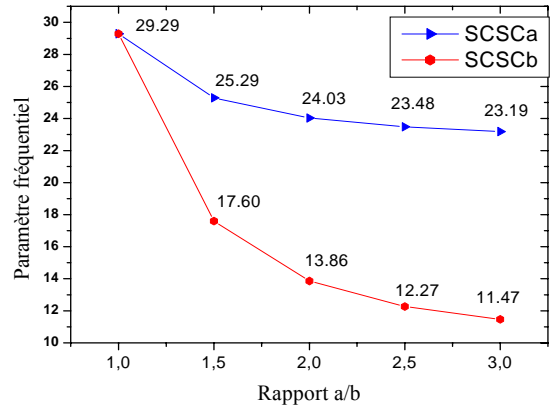
a/b	Mode (m,n)	Leissa [2,16]	whitney [16]	R-Q [16]	Chai [16]	Présent
0.4	1-1	16.84	-	-	-	16.94
	1-2	21.36	-	-	-	21.71
2/3	1-1	19.95	-	-	-	20.10
	1-2	34.02	-	-	-	34.69
1.0	1-1	27.06	27.20	28.35	27.25	27.27
	1-2	60.54	61.00	58.60	61.02	61.74
	2-1	60.79	61.00	58.60	61.22	61.90
	2-2	92.86	93.13	88.41	93.97	95.79
1.5	1-1	44.89	-	-	-	45.23
	1-2	76.55	-	-	-	78.06
2.5	1-1	105.31	-	-	-	105.92
	1-2	133.52	-	-	-	135.69

**Tableau 4 :** Comparaison des fréquences naturelles obtenues pour une plaque isotrope carrée du type S-C-S-C. Le paramètre fréquentiel  $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D}$ ,  $\nu = 0.30$

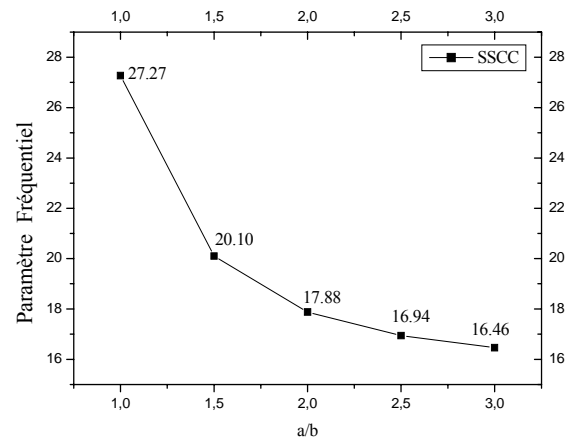
a/b	Mode (m,n)	Leissa [2,16]	Whitney [16]	R-Q [16]	Chai [16]	Présent
0.4	1-1	12.13	-	-	-	12.27
	1-2	18.36	-	-	-	18.78
2/3	1-1	17.37	-	-	-	17.60
	1-2	35.34	-	-	-	36.23
1.0	1-1	28.95	29.03	29.61	29.11	29.29
	1-2	54.74	55.33	55.04	55.04	55.45
	2-1	69.33	69.35	71.17	71.17	71.11
	2-2	94.59	94.84	97.20	97.20	96.88
1.5	1-1	56.34	-	-	-	56.92
	1-2	78.98	-	-	-	81.01
2.5	1-1	145.48	-	-	-	146.78
	1-2	164.73	-	-	-	166.53



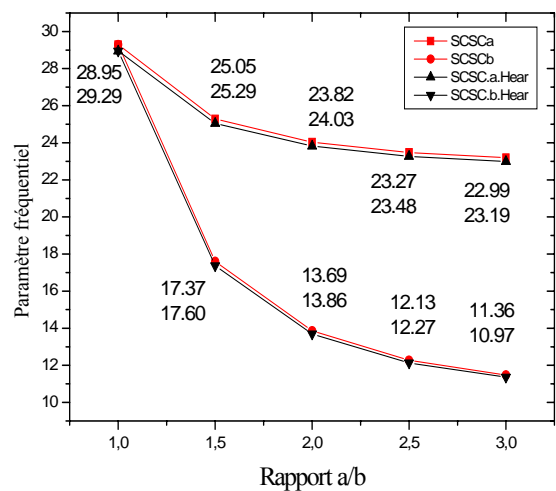
**Figure 1 :** Variation du paramètre fréquentiel  $\Omega$  d'une plaque du type SSSS avec  $b/h=20$



**Figure 2 :** Variation du paramètre fréquentiel  $\Omega$  d'une plaque du type SCSC avec  $b/h=20$



**Figure 3 :** Variation du paramètre fréquentiel  $\Omega$  d'une plaque du type SSCC avec  $b/h=20$



**Figure 4 :** Comparaison de la Variation du Paramètre fréquentiel  $\Omega$  d'une plaque du type CSCS et celle de Hearmon avec  $b/h=20$

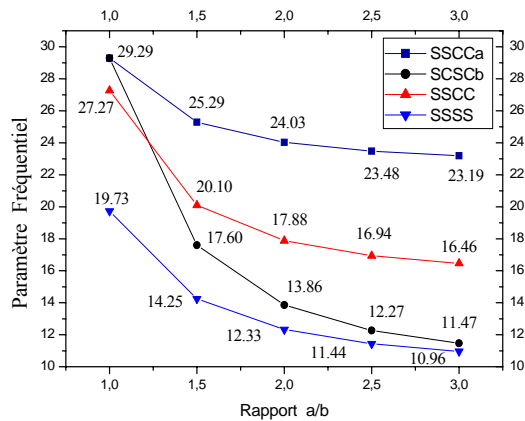


Figure 5 : Variation du paramètre fréquentiel  $\Omega$  des plaques du type SSSS, CSCS, SCSC avec  $b/h=20$

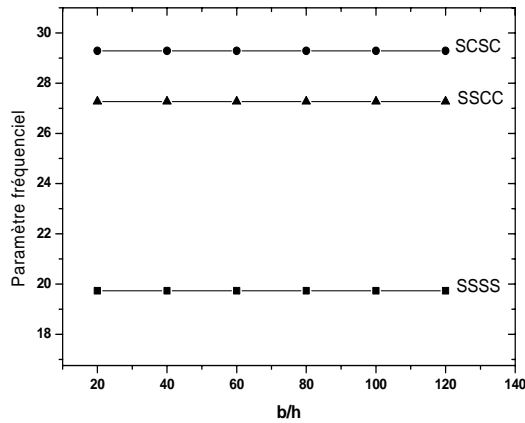


Figure 6 : Variation du paramètre fréquentiel  $\Omega$  des plaques du type SSSS, CSCS, SCSC avec  $b/h=20$

Tableau 5 : Variation du % d'erreur pour les cas de plaques (SSSS) par rapport au paramètre fréquentiel:

$$\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D}$$

Mode (m,n)	Plaque SSSS		
	Leissa	present	%
1-1	19.73	19.73	+0.000
1-2	49.35	49.34	+0.001
2-1	49.35	49.34	+0.001
2-2	78.86	78.95	+0.090

Tableau 6 : Variation du % d'erreur pour les cas de plaques (SSCC) par rapport au paramètre fréquentiel :

$$\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D}$$

Mode (m,n)	Plaque SSCC		
	Leissa	present	%
1-1	27.06	27.27	+0.210
1-2	60.54	61.74	+1.100
2-1	60.79	61.90	+1.110
2-2	92.86	95.79	+2.930

Tableau 7 : Variation du % d'erreur pour les cas de plaques (SSCC) par rapport au paramètre fréquentiel:

$$\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D}$$

Mode (m,n)	Plaque SCSC		
	Leissa	present	%
1-1	28.95	29.29	+0.34
1-2	54.74	55.45	+0.71
2-1	69.33	71.11	+1.78
2-2	94.59	96.88	+2.29

## 7. DISCUSSION DES RESULTATS

La sélection des fonctions admissibles joue un rôle déterminant dans la précision des réponses obtenues d'après les méthodes de Rayleigh et Ritz. Un travail laborieux est effectué afin d'identifier les fonctions de formes intervenant dans la formulation des fonctions admissibles pour l'analyse dynamique libre d'une plaque rectangulaire isotrope présentant des conditions de fixité distribuées suivant trois cas : (SSSS, SCSC, SSCC). Les réponses considérées dans l'analyse sont basées sur les fréquences circulaires fondamentales (M.Rayleigh) et fréquences circulaires (M.Ritz : quatre premiers modes).

L'hypothèse Kirchhoff pour les plaques minces est observée en imposant un seuil  $b/h > 20$  [16]. Au delà de cette frontière, on a constaté dans la figure 6 que le paramètre fréquentiel reste insensible au rapport  $b/h$ . Cette observation s'explique par la non prise en compte de l'effet de cisaillement ainsi que de l'effet de l'inertie rotatoire. L'ensemble des cas de figures, montre des allures compatibles avec les résultats déjà connus [2], [3], [4] et [15].

Quelques graphes sont développés pour la confrontation des résultats de l'analyse actuelle par rapport a ceux exposés dans les tableaux de référence 1, 2, 3. La figure (1) montre une allure parabolique rapidement décroissante pour l'intervalle  $a/b=1-1.5$ . Au delà de cette frontière, une atténuation asymptotique s'impose. Physiquement, cela s'interprète par un transfert de rigidité allant du cas  $a/b=1$  (plaque carrée à deux sens porteurs) vers le cas souple  $a/b \geq 3$  (plaque rectangulaire à longueur infinie avec un seul sens porteur).

La figure (2) présente deux allures différentes selon l'orientation de la plus grande portée par rapport aux conditions de fixité de la plaque CSCSa (plaque rigide) ou la plaque CSCSb (plaque souple). On voit l'importance de l'orientation des conditions de fixité par rapport à la longueur de la plaque sur le comportement vibratoire intrinsèque. L'allure supérieure (CSCSa) des paramètres fréquentiels traduit une augmentation de la rigidité de la plaque ; par contre, l'allure inférieure (CSCSb) traduit une augmentation de la souplesse de la plaque. On remarque aussi que l'allure (CSCSb) converge vers la même valeur que celle de la plaque SSSS au-delà d'un rapport  $a/b \geq 3$ .

Les mêmes remarques sont observées pour le cas de la figure (3) comparées a celles de la plaque SSSS ; la seule

différence réside dans le fait de l'influence des conditions de fixité d'encastrement qui se traduit par un niveau de réponse supérieur. La figure (4) montre une parfaite concordance des réponses du présent travail comparées à ceux de Hermon [17]. La figure (4) montre l'influence de l'emplacement des conditions de fixité (SCSCb ou SSCC) sur le comportement vibratoire plus ou moins rigide de la plaque rectangulaire. En effet on observe qu'au-delà du rapport  $a/b \geq 1.2$ , le seuil des réponses représenté par la courbe SCSCb est dominé par celui de la plaque SSCC.

Finalement le tableau 5, montre pour les trois cas de figures, un faible taux de dispersion des paramètres fréquentiels (SCSC : mode11 : 0.34%, mode 22 : 2.29%), (SSCC : mode11 : 0.21%, mode 22 : 2.93%) comparés avec les résultats de Leissa, considérés comme référence supposée exacte.

### CONCLUSION

La méthode de Ritz est utilisée pour l'investigation de l'analyse vibratoire d'une plaque rectangulaire présentant différents cas de fixité (SSSS, SCSC, SSCC). Trois types de fonctions admissibles dont chacune avec quatre termes sont considérés pour l'analyse vibratoire libre. Les réponses obtenues confrontées avec ceux des auteurs tels que Leissa, Hearmon, Whitney, Chai, montrent une bonne concordance. Les conditions de fixité et leur emplacement imposent une grande influence sur le comportement vibratoire des plaques minces.

### REFERENCES

- [1]- Warburton, G. B. (1954). The vibration of rectangular plates. Proceeding of the institute of Mechanical engineers, Series A 168, 371-384.
- [2]- A.W.Leissa. Vibration of Plates. NASA SP-160, Washington DC, 1969.
- [3]- A.W.Leissa. plate vibration research 1976-1980: classical theory, Shock vibration Digest 13(1981)11-12.
- [4]- Hearmon, R.F.S. (1959). The frequency of flexural vibration of rectangular plates with clamped or simply supported edges. Journal of applied Mechanics 26, 537-540.
- [5]- G. Aksu and R. Ali. Free vibration analysis of stiffened plates using finite difference method. Journal of sound and vibration (1976) 48(1), 15-25.
- [6]- Sriniva S, Rao AK. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plate and laminates. Int J Solids Struct 1970; 6:1463-81.
- [7]- R.H. Gutierrez, P.A.A. Laura and C.A.Rossit. Fundamental frequency of transverse vibration of a clamped rectangular orthotropic plate with a free-edge hole. Journal of sound Vibration 2000; 235(4):697-701.
- [8]- S.J. Lee. Free Vibration analysis of plates by using a four-node finite element formulated with assumed natural transverse shear strain. Journal of sound Vibration 2003; 278(2004):657-684.
- [9]- Karim S. Numayr, Rami H. Haddad, Madhar A. Haddad. Free vibration of composite plates using the finite difference method. Thin-Walled Structures 42 (2004) 399-414.
- [10]- A.Shafiee, Y.Alizadeh, D. Redekop. Free vibration of completely free coupled orthotropic rectangular plates.. Journal of sound and vibration 267, 366-366 (2003).
- [11]- Jongwon Seok, H.F. Tiersten. Free vibrations of annular sector cantilever plates. Part1: out-of-plane motion. Journal of sound and vibration 271 757-772 (2004).
- [12]- Jongwon Seok, H.F. Tiersten, H.A.Scarton. Free vibrations of rectangular cantilever plates. Part2: in- plane motion. Journal of sound and vibration 271 147-158 (2004).
- [13]- Y. Kobayashi, G. Yamada, S. Honma, in- plane vibration of point supported rectangular plates. Journal of sound and vibration 126 (6) 545-549 (1988).
- [14]- N.S ; Bardell, R.S.Langley, J.M. Dusdon, On the free vibration of isotropic rectangular plates, Journal of sound and vibration 191 (6) 459-467 (1996).
- [15]- Chai Gin Boay, free vibration of rectangular isotropic plates with and without a concentrated mass. Computers and structures Vol 48, No.3, pp 529-533(1993)
- [16]- S Latheswary, et al free vibration analysis of laminated plates using higher-order shear deformation theory. IE(1) journal-AS pp18-24(2004).
- [17]- Hearmon, R.F.S. (1959). Natural frequencies of rectangular plates. Journal of applied Mechanics 15, 402-(1952)