

## PROBLEME AUX LIMITES AVEC UNE CONDITION INTEGRALE POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU TROISIEME ORDRE

Reçu le 05/03/2002 – Accepté le 16/04/2003

### Résumé

Dans cet article on utilise la méthode des inégalités énergétiques, dite aussi méthode des estimations a priori, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution forte d'un problème aux limites avec une condition intégrale pour une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

**Mots clés:** Condition intégrale, estimation a priori, solution forte.

### Abstract

In this paper we use the energy inequalities method, it called also the a priori estimations method, to proof the existence and the uniqueness of the strong solution of a boundary-value problem with an integral condition for a partial differential equation of the third order.

**Keywords:** Integral condition, a priori estimation, strong solution.

AMS msc: 35A05, 35A25, 35G05, 35G15, 35M15.

### B. BOUDJEDAA

Département de Mathématiques  
& d'Informatique  
Faculté des Sciences  
et des Sciences de L'ingénieur  
Université de Ouargla  
Ouargla, 30000 (Algérie)

### N. BENOUAR

Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
USTHB, BP32 El-Alia  
Bab-Ezzouar, Alger (Algérie)

### I- POSITION DU PROBLEME

Dans l'ouvert rectangulaire  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ , où  $\Omega = (0, \ell)$ , un intervalle ouvert de  $R$ ,  $\ell$  et  $T$  deux nombres finis et positifs, on considère l'équation différentielle suivante :

$$Lu \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f, \quad (1.1)$$

où  $a(x)$  est une fonction mesurable bornée dépendant seulement de  $x \in \Omega$ , qui satisfait aux conditions suivantes :

$$a(x) \in C^1(\overline{\Omega}) ; \quad (H1)$$

$$a_0 \leq a(x) \leq a_1, \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (H2)$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont deux constantes strictement positives.

A l'équation (1.1), on associe les conditions initiales :

$$u(0, x) = 0 \quad \text{sur } \Omega ; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \quad \text{sur } \Omega ; \quad (1.3)$$

et la condition finale :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(T, x) = 0 \quad \text{sur } \Omega ; \quad (1.4)$$

la condition en  $x = 0$

$$u(t, 0) = 0, \forall t \in [0, T]. \quad (1.5)$$

et la condition intégrale :

$$\int_{\ell_1}^{\ell} u(t, \xi) d\xi = 0, \forall t \in [0, T], \text{ où } \ell_1 \in [0, \ell]. \quad (1.6)$$

La démonstration de l'existence et l'unicité de la solution forte du Problème (1.1)-(1.6) se fera par une étude assez particulière qui peut être caractérisée par le schéma suivant :

On associe au problème (1.1)-(1.6) un opérateur  $L$  défini par

$$L : D(L) \subset E \rightarrow F$$

### ملخص

في هذا البحث نستعمل طريقة التقديرات القبلية لإثبات وجود و وحدانية الحل القوي لمسألة حدية ذات شروط حدية غير محلية (بشروط تكاملية).

**الكلمات المفتاحية:** شرط تكاملية، التقريبات القبلية، الحل القوي.

où  $D(L)$  est le domaine de définition de  $L$ ;  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Banach convenablement choisis ; tel que résoudre le problème (1.1)-(1.6) revient à résoudre l'équation opérationnelle

$$Lu = f, \text{ où } f \in F. \quad (I)$$

Pour le faire on établit une estimation *a priori*

$$\|u\|_E \leq C\|Lu\|_F, \quad \forall u \in D(L); \quad (II)$$

et par suite on construit la fermeture de l'opérateur  $L$ , qu'on note  $\bar{L}$ , alors par passage à la limite on peut facilement étendre l'inégalité (II) aux éléments de  $D(\bar{L})$

$$\|u\|_E \leq C\|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}). \quad (III)$$

Pour cet opérateur  $\bar{L}$  et de l'inégalité (III), on peut vérifier que

$$R(\bar{L}) = \overline{R(L)}, \quad (IV)$$

où  $R(L)$  représente l'ensemble image de l'opérateur  $L$ .

Donc, si on convient d'appeler solution forte du problème (1.1)-(1.6) toute fonction  $u \in D(\bar{L})$  telle que  $\bar{L}u = f$ , alors de (IV), on constate que pour montrer l'existence de la solution forte du problème donné, quel que soit le second membre, il est nécessaire et suffisant qu'on établisse la densité de  $R(L)$  dans  $F$ .

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de problèmes aux limites avec des conditions non-locales (conditions en plusieurs points, conditions intégrales...). Citons par exemple les travaux de N.I.Ionkin [1, 2] où l'auteur étudie un problème aux limites de conduction thermique, les travaux de N.I.Yurchuk [3], A.V.Kartynnik [4] et N.Benouar and N.I.Yurchuk [5] qui sont les travaux de base dans cet article. On a aussi les travaux de A. Bouziani [8], A.Bouziani et N.Benouar [9, 10] où les auteurs étudient, par la même méthode développée dans ce travail, des problèmes pour une classe d'équations paraboliques, dans le travail de A. Bouziani [11] l'auteur étudie un problème d'évolution hyperbolique avec des conditions intégrales.

## II- ESPACES FONCTIONNELS

Associons au problème (1.1)-(1.6) un opérateur noté  $L$ , défini par :

$$L : D(L) \subset E \longrightarrow F \\ u \mapsto Lu = \mathbb{L}u$$

où

$$D(L) = \left\{ u \in L^2(Q_T) / \begin{array}{l} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \in L^2(Q_T), k = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(Q_T) \\ u \text{ vérifie (1.2)-(1.6)} \end{array} \right\},$$

L'espace  $E$  est le complété de  $D(L)$  par rapport à la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_{Q_T} \Psi(x) \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |u|^2 \right)$$

$$\text{où } \Psi(x) = \begin{cases} (\ell - \ell_1) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1; \\ (\ell - x) & \text{si } \ell_1 < x \leq \ell; \end{cases}$$

$F$  est l'espace  $L^2(Q_T)$ , muni de la norme usuelle

$$\|f\|_F^2 = \|f\|_{Q_T}^2 = \int_{Q_T} |f|^2.$$

## III- ESTIMATION A PRIORI

**Théorème 1.** Si  $a(x)$  vérifie les conditions (H1) et (H2) alors il existe une constante positive  $C > 0$  telle que :

$$\|u\|_E \leq C\|Lu\|_F, \quad \forall u \in D(L), \quad (3.1)$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $u$ .

### Preuve.

Notons par  $M$  l'opérateur défini sur  $D(L)$  par :

$$Mu = \begin{cases} (\ell_1 - \ell) \frac{\partial u}{\partial t} & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1; \\ (x - \ell) \frac{\partial u}{\partial t} - J \frac{\partial u}{\partial t} & \text{si } \ell_1 < x \leq \ell, \end{cases}$$

où

$$Ju = \int_{\ell_1}^x u(t, \xi) d\xi, \quad \forall t \in [0, T].$$

On considère le produit scalaire dans  $L^2(Q_T)$  de  $Lu$  et  $Mu$  soit :

$$(Lu, Mu)_{L^2(Q_T)} = \int_{Q_T} \mathbb{L}u \cdot Mu. \quad (3.2)$$

Notons par  $I_1, I_2$  les deux termes du second membres de (3.2) donnés par :

$$I_1 = \int_0^T \int_0^{\ell_1} \mathbb{L}u \cdot \left( (\ell_1 - \ell) \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\text{et } I_2 = \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \mathbb{L}u \cdot \left( (x - \ell) \frac{\partial u}{\partial t} - J \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

En effectuant des intégrations par parties sur le terme  $I_1$  et en tenant compte des conditions (1.2)-(1.5), on obtient:

$$I_1 = \int_0^T \int_0^{\ell_1} (\ell - \ell_1) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_1} a(x)(\ell - \ell_1) \left| \frac{\partial u(T)}{\partial x} \right|^2 \\ + \int_0^T a(\ell_1)(\ell_1 - \ell) \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial x} \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Ecrivons le deuxième terme  $I_2$  sous la forme :

$$I_2 = I_2' + I_2''$$

où

$$I_2' = \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \cdot \left( (x-\ell) \frac{\partial u}{\partial t} - J \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

$$I_2'' = \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left( (x-\ell) \frac{\partial u}{\partial t} - J \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

En effectuant une intégration par parties par rapport à  $t$ , et en tenant compte des conditions (1.2),(1.3), on aura alors:

$$I_2' = \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} (\ell-x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.4)$$

Une intégration par parties par rapport à  $x$  dans le deuxième terme de (3.4), en tenant compte de la condition intégrale (1.6), donne :

$$\int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.5)$$

D'où finalement on a

$$I_2' = \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} (\ell-x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2. \quad (3.6)$$

De même, en effectuant des intégrations par parties par rapport à  $x$  dans  $I_2''$  et en tenant compte des conditions (1.2)-(1.6) on obtient :

$$I_2'' = \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} a(x)(\ell-x) \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \int_0^T a(\ell_1)(\ell_1-\ell) \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial t}; \quad (3.7)$$

Une intégration par parties par rapport à  $t$  dans le premier terme du second membre de (3.7), compte tenu de la condition (1.2), donne :

$$I_2'' = \frac{1}{2} \int_{\ell_1}^{\ell} a(x)(\ell-x) \left| \frac{\partial u(T)}{\partial x} \right|^2 - \int_0^T a(\ell_1)(\ell_1-\ell) \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial t}. \quad (3.8)$$

En utilisant (3.6), (3.8),  $I_2$  s'écrit :

$$I_2 = \int_0^T \int_0^{\ell_1} (\ell-x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_{\ell_1}^{\ell} a(x)(\ell-x) \left| \frac{\partial u(T)}{\partial x} \right|^2 - \int_0^T a(\ell_1)(\ell_1-\ell) \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(\ell_1)}{\partial t} \quad (3.9)$$

Finalement, des identités intégrales (3.3) et (3.9) l'identité (3.2) devient :

$$(\mathbf{L}u, \mathbf{M}u)_{L^2(Q_T)} = \int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\ell} a(x) \Psi(x) \left| \frac{\partial u(T)}{\partial x} \right|^2. \quad (3.10)$$

Comme  $\Psi(x) \geq 0, \forall x \in [0, \ell]$ , en utilisant (H2), (3.10) donne

$$(\mathbf{L}u, \mathbf{M}u)_{L^2(Q_T)} \geq \int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2. \quad (3.11)$$

Pour continuer on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.** (inégalité élémentaire)

Si  $u \in L^2(0, T)$  et  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T)$  telle que :  $u(0) = 0$  ou  $u(T) = 0$  ;

$$\text{alors } \|u\|_{L^2(0, T)} \leq \frac{T}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T)}.$$

De ce lemme on peut déduire que pour tout  $u \in D(L)$ , on a :

$$\int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq \frac{T^2}{2} \int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2; \quad (3.12)$$

$$\int_{Q_T} \Psi(x) |u|^2 \leq \frac{T^4}{4} \int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2. \quad (3.13)$$

En utilisant (3.12) et (3.13) dans (3.11), on a l'estimation :

$$(\mathbf{L}u, \mathbf{M}u)_{L^2(Q_T)} \geq C_1 \int_{Q_T} \Psi(x) \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |u|^2 \right); \quad (3.14)$$

$$\text{où } C_1 = \frac{4}{4 + T^2(2 + T^2)}.$$

D'autre part nous savons que :

$$2(\mathbf{L}u, \mathbf{M}u)_{L^2(Q_T)} \leq 2 \left[ \int_{Q_T} \Psi(x) \cdot |\mathbf{L}u| \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| + \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} |\mathbf{L}u| \cdot \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right| \right]. \quad (3.15)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les deux termes du second membre de (3.15), on a, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$2(\mathbf{L}u, \mathbf{M}u)_{L^2(Q_T)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_T} (\Psi(x)+1) |\mathbf{L}u|^2 + \varepsilon \left[ \int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right]. \quad (3.16)$$

Comme

$$J \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{\ell_1}^x \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} d\xi, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, par application de l'inégalité de Hölder, on a

$$\left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq (x-\ell_1) \int_{\ell_1}^x \left| \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} \right|^2 d\xi \leq (\ell-\ell_1) \int_{\ell_1}^x \left| \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} \right|^2 d\xi,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq (\ell-\ell_1) \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \left( \int_{\ell_1}^x \left| \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} \right|^2 d\xi \right), \quad (3.17)$$

D'où, par application du théorème de Fubini, on a

$$\int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} \left| J \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \leq (\ell-\ell_1) \int_0^T \int_0^{\ell} (\ell-x) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2, \quad (3.18)$$

et, puisque  $\Psi(x) \leq (\ell - \ell_1)$ ,  $\forall x \in [0, \ell]$ , alors l'inégalité (3.16) devient :

$$2(Lu, Mu)_{L^2(Q_T)} \leq \frac{(\ell - \ell_1 + 1)}{\varepsilon} \int_{Q_T} |Lu|^2 + \varepsilon(\ell - \ell_1 + 1) \int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \quad (3.19)$$

Finalement, des inégalités (3.14), (3.19), on a l'estimation

$$\frac{(\ell - \ell_1 + 1)}{\varepsilon} \int_{Q_T} |Lu|^2 \geq 2C_1 \int_{Q_T} \Psi(x) \left( |u|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 \right) + (2C_1 - \varepsilon(\ell - \ell_1 + 1)) \int_{Q_T} \Psi(x) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \quad (3.20)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ .

D'où, pour  $\varepsilon = \frac{C_1}{\ell - \ell_1 + 1}$ , on obtient :

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F, \quad \forall u \in D(L); \quad (3.21)$$

où  $C = \frac{\ell - \ell_1 + 1}{C_1}$ .

Par une méthode standard on peut facilement démontrer la proposition suivante :

**Proposition 1.** *L'opérateur  $L$  défini ci-dessus est fermable (i.e. admet une fermeture).*

#### Démonstration.

$(u_n)$  une suite de  $D(L)$  telle que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow 0 \text{ dans } E, \\ \text{et} \\ Lu_n \rightarrow f \text{ dans } F; \end{cases}$$

il faut montrer que  $f = 0$ .

Montrons d'abord que si  $u_n \rightarrow 0$  dans  $E$  alors  $u_n \rightarrow 0$  au sens de  $D'(Q_T)$ .

En effet, si  $u_n \rightarrow 0$  dans  $E$  alors  $\sqrt{\Psi(x)}u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2(Q_T)$  et par suite  $\sqrt{\Psi(x)}u_n$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2(Q_T)$  c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \sqrt{\Psi(x)}u_n f = 0, \quad \forall f \in L^2(Q_T), \quad (3.22)$$

donc en particulier pour  $f = \frac{1}{\sqrt{\Psi(x)}}\varphi$ , où  $\varphi \in D(Q_T)$ , la

relation (3.22) devient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} u_n \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in D(Q_T), \quad (3.23)$$

Ce qui signifie que

$$u_n \rightarrow 0 \text{ au sens de } D'(Q_T). \quad (3.24)$$

D'autre part? on sait que la dérivation est un opérateur borné dans  $D'(Q_T)$  alors de (3.24) découle

$$Lu_n \rightarrow 0 \text{ au sens de } D'(Q_T). \quad (3.25)$$

Mais on sait que par hypothèse

$$Lu_n \rightarrow f \text{ dans } F = L^2(Q_T) \text{ alors } Lu_n \rightarrow f \text{ au sens de } D'(Q_T).$$

et par suite  $f = 0$  par unicité de la limite dans  $D'(Q_T)$ .

Soit  $\bar{L}$  cette fermeture et  $D(\bar{L})$  son domaine de définition ; alors d'après le Théorème 1 on a le

**Corollaire 1.** *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1, l'inégalité (3.1) s'étend aux éléments de  $D(\bar{L})$ , c'est-à-dire :*

$$\|u\|_E \leq C \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}); \quad (3.26)$$

où  $C$  est la même constante donnée au Théorème 1.

#### Preuve.

Elle se fait par passage à la limite dans l'inégalité (3.1).

**Corollaire 2.** *L'opérateur  $L$  est à image fermée et de plus on a :  $\mathbf{R}(\bar{L}) = \overline{\mathbf{R}(L)}$  où  $\mathbf{R}(L)$  désigne l'ensemble image de l'opérateur  $L$ .*

**Définition 1.** *On appelle solution forte du problème (1.1)-(1.6) toute fonction  $u \in D(\bar{L})$  telle que :*

$$\bar{L}u = f \text{ où } f \in F.$$

Alors, du Corollaire 1, découle le résultat d'unicité suivant

**Corollaire 3.** *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1, pour tout second membre  $f \in F$  la solution forte du problème (1.1)-(1.6), si elle existe, est unique et dépend continûment de  $f$ .*

## IV. EXISTENCE DE LA SOLUTION FORTE

D'après le Corollaire 2, on sait que:  $\mathbf{R}(\bar{L}) = \overline{\mathbf{R}(L)}$ .

Donc pour démontrer l'existence d'une solution forte du problème (1.1)-(1.6), il est nécessaire et suffisant de montrer la densité de  $\mathbf{R}(L)$  dans  $F$ . Pour cela on a besoin du

**Lemme 2.** *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1, si  $W$  est une fonction de  $L^2(Q_T)$  telle que :*

$$\int_{Q_T} Lu \cdot W = 0, \quad \forall u \in D(L); \text{ alors } W = 0.$$

Avant de démontrer ce lemme, nous donnons d'abord quelques résultats que nous utiliserons par la suite. Soit  $B$  l'opérateur engendré par l'expression différentielle  $\frac{\partial^3}{\partial t^3}$  sur

$[0, T]$  de domaine de définition :

$$D(B) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, T) / \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \in L^2(0, T), \quad k = 1, 2, 3; \\ u(0) = 0, \frac{\partial u(0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 u(T)}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right\}.$$

Notons par  $B^*$  l'opérateur adjoint de  $B$  engendré par l'expression différentielle  $-\frac{\partial^3}{\partial t^3}$  sur  $[0, T]$  et qui a pour domaine de définition :

$$D(B^*) = \left\{ \begin{array}{l} v \in L^2(0, T) / \frac{\partial^k v}{\partial t^k} \in L^2(0, T), \quad k = 1, 2, 3 ; \\ v(0) = 0, \quad \frac{\partial v(T)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(T)}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right\}.$$

Les deux opérateurs  $B, B^*$  sont maximaux dissipatifs et inversibles, pour plus de détails concernant ces opérateurs voir [6,7]. Notons pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$B_\varepsilon = (I - \varepsilon B), \quad B_\varepsilon^* = (I - \varepsilon B^*).$$

Par l'intermédiaire de  $B_\varepsilon, B_\varepsilon^*$  on introduit des opérateurs de régularisation qui auront un effet régularisant en temps, puisque ils ne font intervenir que des dérivées en temps, et de ce fait ils nous permettent, d'après leurs propriétés, de donner aux fonctions définis sur  $Q_T$  une certaine régularité en temps et par suite il sera légitime de faire des intégrations par parties en temps. Les opérateurs de régularisation jouent un rôle très important en théorie des semi-groupes pour l'étude des problèmes d'évolution (pour plus de détails, voir [6, 7]).

Les opérateurs  $B_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon^*$  admettent des inverses bornés sur  $L^2(0, T)$  qu'on note respectivement :

$$B_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon B)^{-1}, \quad (B_\varepsilon^*)^{-1} = (I - \varepsilon B^*)^{-1};$$

et jouissent des propriétés :

$$1) \text{ Si } u \in L^2(Q_T) \text{ alors } B_\varepsilon^{-1}u \in H^{3,0}(Q_T)^{(1)};$$

$$(\text{resp: } (B_\varepsilon^*)^{-1}u \in H^{3,0}(Q_T))$$

$$2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon^{-1}u = u, \quad \forall u \in L^2(0, T);$$

$$(\text{resp: } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (B_\varepsilon^*)^{-1}u = u).$$

Considérons ensuite les deux opérateurs  $L_1, L_2$  donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 : D(L_1) \subset L^2(Q_T) \longrightarrow L^2(Q_T) \\ u \mapsto L_1 u = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

où

$$D(L_1) = \left\{ u \in L^2(Q_T) / \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in L^2(Q_T), \quad k = 1, 2, \quad u(t, 0) = 0 \right\};$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 : D(L_2) \subset L^2(Q_T) \longrightarrow L^2(Q_T) \\ u \mapsto L_2 u = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

$$D(L_2) = \left\{ u \in D(L_1) / \int_{\ell_1}^{\ell} u(t, \xi) d\xi = 0 \right\}.$$

<sup>(1)</sup>  $H^{3,0}(Q_T) = \left\{ u \in L^2(Q_T) / \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \in L^2(Q_T), \quad k = 1, 2, 3 \right\}$

**Lemme 3.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2(Q_T)$  si :

$$\int_{Q_T} f u = \int_{Q_T} g L_2 u, \quad \forall u \in D(L) \quad (4.2)$$

alors

$$\int_{Q_T} f u = \int_{Q_T} g L_2 u, \quad \forall u \in D(L_2). \quad (4.3)$$

**Preuve.**

Elle se fait par densité, c'est-à-dire on démontre que  $D(L)$  est dense dans  $D(L_2)$ , où  $D(L_2)$  sera considéré comme un espace de Banach pour la norme du graphe.

En effet, soit  $u \in D(L_2)$  et soit la suite  $u_\varepsilon = B_\varepsilon^{-1}u$ ,  $\varepsilon > 0$ , et d'après les propriétés  $P_1 - P_6$  (voir appendice) on peut facilement vérifier  $u_\varepsilon \in D(L)$  et que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u \text{ dans } L^2(Q_T); \quad (4.4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_2 u_\varepsilon = L_2 u \text{ dans } L^2(Q_T). \quad (4.5)$$

Alors de la relation (4.2) on obtient

$$\int_{Q_T} f u_\varepsilon = \int_{Q_T} g L_2 u_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.6)$$

et par passage à la limite, compte tenu de (4.4), (4.5) (i.e en utilisant la convergence faible), on aura :

$$\int_{Q_T} f u = \int_{Q_T} g L_2 u, \quad \forall u \in D(L_2). \quad (4.7)$$

**Lemme 4.**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^2(Q_T)$  si :

$$\int_{Q_T} f u = \int_{Q_T} g L_2 u, \quad \forall u \in D(L_2) \quad (4.8)$$

alors  $g \in D(L_1^*)^{(2)}$ .

**Preuve.**

En effet pour  $u \in D(L_1)$ , la fonction  $\tilde{u}$  définie par :

$$\tilde{u} = u - \frac{2x}{\ell^2 - \ell_1^2} \int_{\ell_1}^{\ell} u(t, \xi) d\xi$$

est évidemment dans  $D(L_2)$ , donc d'après (4.8) on a :

$$\int_{Q_T} f \tilde{u} = \int_{Q_T} g L_2 \tilde{u}. \quad (4.9)$$

D'où :

$$\int_{Q_T} \tilde{f} u = \int_{Q_T} g L_1 u. \quad (4.10)$$

où

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1 \\ f + \frac{2}{\ell^2 - \ell_1^2} \int_{\ell_1}^{\ell} [g(t, \xi) a'(\xi) - \xi f(t, \xi)] d\xi & \text{si } \ell_1 < x \leq \ell \end{cases}$$

<sup>(2)</sup>  $L_1^*$  désigne l'opérateur adjoint de  $L_1$ .

ce qui prouve que  $g \in D(L_1^*)$ .

Par une méthode classique on peut démontrer le corollaire suivant :

**Corollaire 4.** Une fonction  $g \in L^2(Q_T)$  est dans  $D(L_1^*)$  si

et seulement si  $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$  sont dans  $L^2(Q_T)$  et vérifie :

$$g(t, 0) = 0, \quad g(t, 1) = 0, \quad \frac{\partial g(t, 1)}{\partial x} = 0.$$

**Preuve.**

Il est évident que si  $g \in L^2(Q_T)$  telle que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial x} \in L^2(Q_T)$$

$$\text{et } g(t, 0) = 0, \quad g(t, 1) = 0, \quad \frac{\partial g(t, 1)}{\partial x} = 0,$$

alors  $g \in D(L_1^*)$ .

En effet, par des intégrations par parties on peut voir que

$$\int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) u = \int_{Q_T} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \int_{Q_T} g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall u \in D(L_1); \quad (4.11)$$

c'est-à-dire  $g \in D(L_1^*)$  et  $L_1^* g = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial g}{\partial x} \right)$

Montrons maintenant la réciproque. Soit  $g \in D(L_1^*)$  et

prenons pour  $\varphi \in D(Q_T)$   $u = \int_0^x \frac{1}{a(\xi)} \varphi(t, \xi) d\xi$ , qui est

évidemment dans  $D(L_1)$ , alors pour ce  $u$  on aura dans (4.11):

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} g = \int_{Q_T} \left( \int_0^x \frac{1}{a(\xi)} \varphi(t, \xi) d\xi \right) L_1^* g, \quad \forall \varphi \in D(Q_T), \quad (4.12)$$

Des intégrations par parties dans le second membre de (4.12) donnent

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} g = \int_{Q_T} \left( \int_x^\ell L_1^* g(t, \xi) d\xi \right) \frac{1}{a(x)} \varphi, \quad \forall \varphi \in D(Q_T), \quad (4.13)$$

d'où  $\frac{\partial g}{\partial x} \in L^2(Q_T)$  et de plus on a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{a(x)} \int_x^\ell L_1^* g(t, \xi) d\xi, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial g(t, \ell)}{\partial x} = 0, \quad (4.15)$$

De là aussi on peut voir que  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \in L^2(Q_T)$  telle que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{a'(x)}{a^2(x)} \int_x^\ell L_1^* g(t, \xi) d\xi + \frac{L_1^* g}{a(x)}.$$

Donc, puisque

$$\int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) g = \int_{Q_T} u L_1^* g, \quad \forall u \in D(L_1),$$

Alors, en tenant compte de (4.14), (4.15), des intégrations par parties dans le premier membre donnent

$$a(\ell) \int_0^T \frac{\partial u(t, \ell)}{\partial x} g(t, \ell) dt - a(0) \int_0^T \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} g(t, 0) dt = 0, \quad \forall u \in D(L_1); \quad (4.61)$$

et par un choix particulier de  $u$  dans  $D(L_1)$  on peut facilement déduire que

$$g(t, 0) = 0, \quad g(t, \ell) = 0,$$

En effet, prenons par exemple pour  $\varphi \in D(]0, T[)$

$$\begin{cases} U_1 = x^2(x - \ell)\varphi(t) \\ \text{et} \\ U_2 = x(x - \ell)^2\varphi(t) \end{cases}$$

Evidemment  $U_1, U_2 \in D(L_1)$  et de plus on a

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1(t, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_1(t, \ell)}{\partial x} = \ell^2\varphi(t); \\ \text{et} \\ \frac{\partial U_2(t, 0)}{\partial x} = \ell^2\varphi(t), \quad \frac{\partial U_2(t, \ell)}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Alors en utilisant (4.16) pour  $U_1, U_2$  on aura

$$\int_0^T g(t, 0)\varphi(t) dt = 0, \quad \forall \varphi \in D(]0, T[), \quad (4.17)$$

$$\int_0^T g(t, \ell)\varphi(t) dt = 0, \quad \forall \varphi \in D(]0, T[), \quad (4.18)$$

C'est-à-dire

$$g(t, 0) = 0, \quad g(t, \ell) = 0.$$

Donc, des résultats précédents (Lemmes 3 et 4, Corollaire 4), on est en mesure de démontrer le Lemme 2.

### **Démonstration du Lemme 2.**

En écrivant la relation (4.1) sous la forme :

$$\int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} W = - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) W. \quad (4.19)$$

Soit  $u \in D(L)$  alors pour :  $u_\varepsilon = B_\varepsilon^{-1}u$  et  $u_\varepsilon^* = (B_\varepsilon^*)^{-1}u$ , la relation précédente donne :

$$\int_{Q_T} \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} W = - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \right) W. \quad (4.20)$$

Puisque  $B_\varepsilon^{-1}B = BB_\varepsilon^{-1}$  et en utilisant les propriétés P1-P6 (voir appendice) la relation (4.20) s'écrit alors :

$$\int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} W_\varepsilon^* = - \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) W_\varepsilon^*; \quad (4.21)$$

d'où par des intégrations par parties dans le premier membre de (4.21) on obtient :

$$\int_{Q_T} u \frac{\partial^3 W_\varepsilon^*}{\partial t^3} = \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) W_\varepsilon^*. \quad (4.22)$$

De là, et en vertu des Lemmes 3 et 4 et du Corollaire 4, on peut facilement déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\frac{\partial^2 W_\varepsilon^*}{\partial x^2}, \frac{\partial W_\varepsilon^*}{\partial x} \in L^2(Q_T).$$

De plus on a :

$$W_\varepsilon^*(t, 0) = 0, \quad W_\varepsilon^*(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial W_\varepsilon^*(t, \ell)}{\partial x} = 0.$$

Définissons pour chaque  $W_\varepsilon^*$  une fonction  $V_\varepsilon$  donnée par :

$$V_\varepsilon = \begin{cases} \frac{W_\varepsilon^*}{\ell - \ell_1} & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1, \\ \frac{W_\varepsilon^*}{\ell - x_1} - \int_{\ell_1}^x \frac{W_\varepsilon^*}{(\ell - \xi)^2} d\xi & \text{si } \ell_1 < x \leq \ell. \end{cases} \quad (4.23)$$

On a évidemment  $V_\varepsilon \in L^2(Q_T)$ , et :

$$\int_{\ell_1}^x \frac{W_\varepsilon^*}{(\ell - \xi)^2} d\xi = W_\varepsilon^* - (\ell - x)V_\varepsilon, \quad \ell_1 < x \leq \ell.$$

De là, on tire la relation :

$$W_\varepsilon^* = \begin{cases} (\ell - \ell_1)V_\varepsilon & \text{si } 0 \leq x \leq \ell_1, \\ (\ell - x)V_\varepsilon - JV_\varepsilon & \text{si } \ell_1 < x \leq \ell. \end{cases} \quad (4.24)$$

On a alors :

$$\frac{\partial W_\varepsilon^*}{\partial x} = \Psi(x) \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} \in L^2(Q_T); \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2 W_\varepsilon^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi(x) \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} \right) \in L^2(Q_T). \quad (4.26)$$

La fonction  $V_\varepsilon$  vérifie :

$$V_\varepsilon(t, 0) = 0, \quad \Psi(x) V_\varepsilon(t, x)|_{x=\ell} = 0, \quad \int_{\ell_1}^{\ell} V_\varepsilon(t, \xi) d\xi = 0.$$

Alors en effectuant une intégration par parties dans le second membre de la relation (4.21) et en tenant compte de (4.25) on aura :

$$\int_{Q_T} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} W_\varepsilon^* = \int_{Q_T} a(x) \Psi(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}. \quad (4.27)$$

Prenons ensuite  $U_\varepsilon = B^{-1}V_\varepsilon \in D(L)$  <sup>(3)</sup>. Pour ces  $U_\varepsilon$  la relation (4.27) devient :

$$\int_{Q_T} V_\varepsilon W_\varepsilon^* = \int_{Q_T} a(x) \Psi(x) \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^4 U_\varepsilon}{\partial t^3 \partial x}. \quad (4.28)$$

Des intégrations par parties dans le second membre de (4.28) par rapport à  $t$  donnent :

$$\int_{Q_T} a(x) \Psi(x) \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial^4 U_\varepsilon}{\partial t^3 \partial x} = -\frac{1}{2} \int_0^\ell a(x) \Psi(x) \left( \frac{\partial^2 u(T)}{\partial t \partial x} \right)^2 dx, \quad (4.29)$$

<sup>(3)</sup>  $B^{-1}$  est l'opérateur inverse de l'opérateur  $B$  défini plus haut.

D'où

$$\int_{Q_T} V_\varepsilon W_\varepsilon^* dQ_T \leq 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.30)$$

Mais d'après la relation (4.23) on a :

$$\int_{Q_T} V_\varepsilon W_\varepsilon^* = \int_{Q_T} \Psi(x) V_\varepsilon^2 + \int_0^T \int_{\ell_1}^\ell V_\varepsilon JV_\varepsilon. \quad (4.31)$$

Par une intégration par parties et en tenant compte de la condition  $\int_{\ell_1}^\ell V_\varepsilon(t, \xi) d\xi = 0$ , on peut s'assurer que :

$$\int_0^T \int_{\ell_1}^\ell V_\varepsilon JV_\varepsilon dx dt = 0.$$

D'où :

$$\int_{Q_T} \Psi(x) V_\varepsilon^2 dQ_T \leq 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.32)$$

c'est-à-dire  $V_\varepsilon = 0, \forall \varepsilon > 0$  et, par conséquent,  $W_\varepsilon^* = 0, \forall \varepsilon > 0$  de sorte que  $W = 0$ .

Du Lemme, 2 on a le

**Théorème 2.** *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème 1, l'ensemble image  $\mathbf{R}(L)$  de l'opérateur  $L$  est dense dans  $F = L^2(Q_T)$ .*

**Preuve.**

Par application du corollaire de densité du Théorème de Hahn-Banach, le résultat se déduit directement du Lemme 2.

Finalement il est assez clair que les Théorèmes 1 et 2 se résument en le

**Théorème 3.** *Si  $a(x)$  satisfait aux conditions (H1), (H2), alors pour tout second membre  $f \in L^2(Q_T)$  le problème (1.1)-(1.6) admet une unique solution forte.*

**Preuve.**

L'unicité de la solution forte découle directement du Corollaire 3 quant à l'existence, elle est garantie par le Théorème 2 et le Corollaire 2 c'est-à-dire par la relation

$$\mathbf{R}(\bar{L}) = \overline{\mathbf{R}(L)} = F.$$

## APPENDICE

Les opérateurs  $B, B^*$  engendrés respectivement par les expressions différentielles  $\frac{\partial^3}{\partial t^3}, -\frac{\partial^3}{\partial t^3}$  de domaines de

définition respectifs  $D(B)$  et  $D(B^*)$  donnés plus haut sont maximaux dissipatifs, inversibles, et que pour tout  $\varepsilon > 0$  les opérateurs

$$B_\varepsilon = I - \varepsilon B, \quad B_\varepsilon^* = I - \varepsilon B^*$$

admettent des inverses bornés sur  $L^2(0, T)$  notés respectivement

$$B_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon B)^{-1}, \quad (B_\varepsilon^*)^{-1} = (I - \varepsilon B^*)^{-1}$$

et de plus on a

$$\|B_\varepsilon^{-1}\| \leq 1, \quad \|(B_\varepsilon^*)^{-1}\| \leq 1; \quad (\text{P.I})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon^{-1} u = u, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (B_\varepsilon^*)^{-1} u = u, \quad \forall u \in L^2(0, T). \quad (\text{P.II})$$

Si on considère maintenant  $B_\varepsilon^{-1}$  et  $(B_\varepsilon^*)^{-1}$  comme étant deux opérateurs définis sur  $L^2(Q_T)$ , alors il est aisé de voir que de la définition même de  $B_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon^*$  et par application des théorèmes de Tonelli et Fubini ainsi que des propriétés (P.I), (P.II), ces opérateurs jouissent des propriétés :

#### Propriété P1.

Si  $u \in L^2(Q_T)$  alors on a

$$1) \frac{\partial^k u_\varepsilon}{\partial t^k} \in L^2(Q_T) \quad (k = 0, 1, 2, 3; \text{ de plus}$$

$$u_\varepsilon(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon(0, x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\varepsilon(T, x)}{\partial t^2} = 0;$$

$$2) \frac{\partial^k u_\varepsilon^*}{\partial t^k} \in L^2(Q_T), \quad k = 0, 1, 2, 3; \text{ de plus}$$

$$u_\varepsilon^*(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon^*(0, x)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\varepsilon^*(T, x)}{\partial t^2} = 0.$$

#### Propriété P2.

Si  $u \in L^2(Q_T)$  alors on a

$$1) \|u_\varepsilon\|_{Q_T} \leq \|u\|_{Q_T}, \quad \forall \varepsilon > 0;$$

$$2) \|u_\varepsilon^*\|_{Q_T} \leq \|u\|_{Q_T}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

#### Propriété P3.

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions de  $L^2(Q_T)$  alors on a

$$(u_\varepsilon, v)_{L^2(Q_T)} = (u, v_\varepsilon^*)_{L^2(Q_T)}.$$

#### Propriété P4.

Si  $u \in L^2(Q_T)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(Q_T)$  alors

$$1) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} \in L^2(Q_T) \text{ de plus on a}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_\varepsilon \text{ et } u_\varepsilon(t, 0) = B_\varepsilon^{-1}(u(t, 0)), \quad \forall \varepsilon > 0;$$

$$2) \frac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial x} \in L^2(Q_T) \text{ de plus on a}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon^*}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_\varepsilon \text{ et } u_\varepsilon^*(t, 0) = (B_\varepsilon^*)^{-1}(u(t, 0)), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

#### Propriété P5.

Si  $u \in L^2(Q_T)$  alors pour tout  $\ell_1 \in [0, \ell[$  on a

$$1) \int_{\ell_1}^{\ell} u_\varepsilon(t, \xi) d\xi = \left( \int_{\ell_1}^{\ell} u(t, \xi) d\xi \right)_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0;$$

$$2) \int_{\ell_1}^{\ell} u_\varepsilon^*(t, \xi) d\xi = \left( \int_{\ell_1}^{\ell} u(t, \xi) d\xi \right)_\varepsilon^*, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

#### Propriété P6.

Si  $u \in L^2(Q_T)$  alors

$$1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(Q_T)} = 0;$$

$$2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon^* - u\|_{L^2(Q_T)} = 0.$$

#### Remerciements:

Les auteurs tiennent à remercier le referee pour ses multiples remarques qui ont aidé à l'amélioration de ce travail.

#### REFERENCES

- [1]- Ionkin N.I., "Solution of a boundary-value problem in heat conduction with nonclassical boundary condition", *Diff. Equa.*, Vol.13, n°2, (1977), pp.204-211.
- [2]- Ionkin N.I., "Stability of a problem in heat transfert theory with nonclassical boundary condition", *Diff. Equa.*, Vol.15, n°7, (1979), pp.911-914.
- [3]- Yurchuk N.I., "Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations", *Diff. Equa.*, Vol.22, n°12, (1986), pp.2117-2126.
- [4]- Kartynnik A.V., "Three-point boundary-value problem with an integral space variable condition for second order parabolic equation", *Diff. Equa.*, Vol.26, n°9, (1990), pp.1160-1166.
- [5]- Benouar N. and Yurchuk N.I., "Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator", *Diff. Equa.*, Vol.27, n°12, (1991), pp.1482-1487.
- [6]- Brezis H., "opérateurs maximaux monotone", Noth-Holland (1973).
- [7]- Tanabe H., "Equation of evolution", (Ch.2, pp.19-88), Monographs and studies in Mathematics 6 Pitman Pub. Lin. Transl (1975).
- [8]- Bouziani A., "Solution forte d'un problème mixte avec une condition intégrale pour une classe d'équations paraboliques", *Maghreb. Math. Rev.*, Vol.6, n°1, (1997), pp.1-17.
- [9]- Bouziani A. and Benouar N., "Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation", *Kobe. J. Math.*, Vol.1, n°1, (1998), pp.47-58.
- [10]- Bouziani A. et Benouar N., "Sur un problème mixte avec uniquement des conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques", *Maghreb. Math. Rev.*, Vol.9, n°1 et 2, (2000), pp.55-70.
- [11]- Bouziani A., "Strong solution to hyperbolic evolution problem with nonlocal boundary conditions", *Maghreb. Math. Rev.*, Vol.9, n°1 et 2, (2000), pp.71-84.  $\square$

(4) On note par  $B_\varepsilon^{-1} u, u_\varepsilon^* = (B_\varepsilon^*)^{-1} u$ .



