

# Influence des Conditions d'Ejection sur les Grandeurs Dynamique et Thermique d'un Ecoulement de Type Jet Axisymétrique en Régime Laminaire

S. Habli<sup>1</sup>, H. Mhiri<sup>1</sup>, S. El Golli<sup>1</sup>, G. Le Palec<sup>2</sup> et P. Bournot<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique des Fluides et Thermique, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir,  
Route de Ouardanine, 5000 Monastir, Tunisie

<sup>2</sup> IRPHE, UNIMECA, 60 Rue Juliot Curie, Technopôle de Château-Gombert, 13453 Marseille Cedex 13, France

**Résumé** – Une méthode aux différences finies est utilisée pour résoudre les équations régissant un écoulement de type jet axisymétrique en régime laminaire. La discussion porte essentiellement sur la présentation des différentes caractéristiques dynamiques et thermiques pour décrire l'écoulement dans les trois régions du jet. L'influence des conditions d'émission à la sortie de la buse a été aussi traitée, nous avons considéré pour cela des profils de vitesse et de température uniformes ou paraboliques.

Nous montrons que l'influence des conditions à la sortie de la buse est importante, dans la région du jet. La zone dans laquelle il n'est plus possible de déceler des différences dues aux conditions d'émission est située beaucoup plus loin et elle dépend des nombres sans dimensions Reynolds et Grashof.

**Abstract** - A finite difference method is used successfully to solve a system of differential equation governing an axisymmetric laminar jet. The discussion is essentially focused, on the one hand, on the presentation of the different dynamic and thermal characteristics describing the flow through the three regions of the jet; On the other hand, we are interested in the influence of emission conditions at the nozzle exit, while using uniform or parabolic velocity and temperature profiles. The numerical results show the importance of the inflow conditions on the steady flow. The zone where the inflow conditions do not affect anymore the flow is located much farther from the nozzle and depends on the dimensionless Reynolds and Grashof numbers.

**Mots clés:** Jet axisymétrique - Laminaire – Région de jet – Région de transition – Région auto-similaire – Région de panache.

## 1. INTRODUCTION

Les écoulements de type jet interviennent dans beaucoup d'applications industrielles telles que la pulvérisation, le refroidissement par film, le lissage des solides etc.. Pour cela, ils ont suscité ces dernières décennies un intérêt considérable qui s'est traduit par la production d'une bibliographie abondante [1-14].

La compréhension des phénomènes physiques de ces types d'écoulement avec ou sans chauffage constitue en soit un objectif. Ceux-ci font intervenir des phénomènes complexes de la mécanique des fluides et de la thermique. En particulier, le passage d'un état stable du jet à l'éjection vers un état turbulent en aval est mal connu. L'influence des conditions initiales semble déterminantes.

Rappelons que de tels écoulements sont soit laminaires soit turbulents selon que les forces de frottement sont essentiellement dues aux tensions visqueuses ou aux contraintes turbulentes de Reynolds.

Une revue de la littérature révèle qu'en régime laminaire, la grande majorité des études sur les jets se limitent à des solutions analytiques ou à des résolutions numériques utilisant un changement de variables permettant d'ignorer les conditions d'émission à la sortie de la buse

[1-14]. En effet, l'approche la plus simple et traditionnelle pour la description des écoulements de type jet a été basée sur l'usage des solutions auto-similaires. L'intérêt de ces relations consiste essentiellement à vaincre les difficultés mathématiques posées par le caractère non-linéaire des équations de base et d'avoir un aperçu de ce phénomène. Pour la plupart des travaux déjà effectués, les efforts ont été consacrés au développement de théories des écoulements de jet valables pour les deux cas extrêmes de convection : régime de convection forcée ou de panache pur.

Il a été montré ensuite que pour le jet plan, les conditions d'injection influent de façon significative sur le comportement de l'écoulement sur des distances de la buse de l'ordre de 300 pour le jet isotherme et  $(x/d) = 10 (Re^7/Gr^3)^{0.25}$  pour le jet anisotherme [15].

La connaissance des différents paramètres de l'écoulement dans tout le domaine du jet étant un facteur important. Nous nous proposons dans ce travail de déterminer, d'abord, les grandeurs caractéristiques d'un écoulement de type jet axisymétrique dans tout le domaine du jet pour différents types de régime de convection. Ensuite, nous étudions l'influence des conditions initiales d'injection, à savoir, les conditions dynamique et thermique sur le comportement du jet plus en aval du soufflage.

## 2. MISE EN EQUATIONS

### 2.1 Hypothèses

On considère un jet issu d'une buse circulaire de diamètre  $d$  dont les dimensions sont petites vis-à-vis du milieu ambiant dans lequel débouche l'écoulement. Le jet et le milieu ambiant sont constitués du même fluide. Les forces de frottement sont du même ordre de grandeur que les forces d'inertie et l'écoulement est supposé être de type couche limite. Les équations sont écrites dans un système de coordonnées cylindriques (Fig. 1).

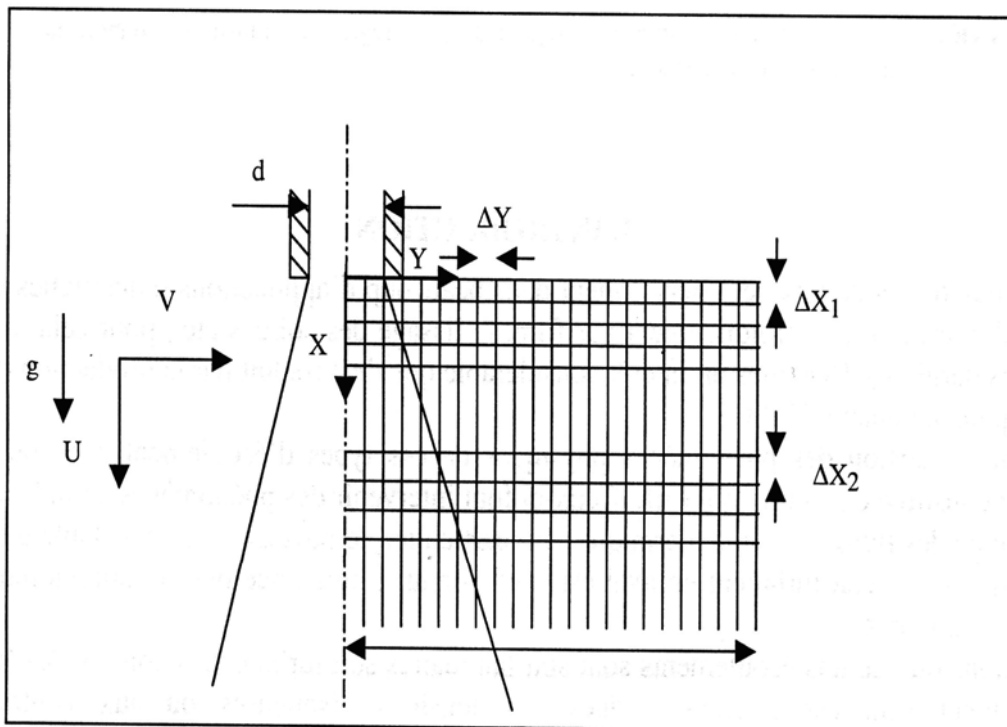


Fig. 1: Représentation schématique de la buse d'éjection et du maillage

Les hypothèses suivantes sont considérées :

- le jet émis verticalement suivant x est à symétrie axiale.
- la masse volumique du fluide varie linéairement avec la température dans le terme contenant la force de flottabilité et elle est considérée constante ailleurs, selon les approximations de Boussinesq.
- L'écoulement est supposé laminaire.
- L'écoulement est stationnaire.

## 2.2 Système d'équations

En introduisant les variables sans dimensions suivantes :

$$\begin{cases} X = \frac{x}{d} \dots\dots Y = \frac{y}{d} \\ U = \frac{u}{u_0} \dots\dots V = \frac{v}{u_0} \\ \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \end{cases} \quad (1)$$

et en supposant nulle la variation axiale de la pression, le système d'équations adimensionnelles régissant le problème dans le cadre des hypothèses précédemment citées pour un fluide incompressible en régime laminaire s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial(YU)}{\partial X} + \frac{\partial(YV)}{\partial Y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left( Y \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \pm \gamma \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta \\ U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left( Y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \end{cases} \quad (2)$$

$\gamma$  prend les valeurs 0 et 1. Pour  $\gamma = 0$  les deux premières équations formulent les jets circulaires isothermes, le signe + représente le cas d'un jet chaud ascendant ou froid descendant alors que le signe - représente celui d'un jet chaud descendant ou froid ascendant.

Les conditions aux limites associées à ces équations sont :

$$X > 0 \quad : \begin{cases} V = \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 & \text{pour } Y = 0 \\ U, \theta \rightarrow 0 & \text{pour } Y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3)$$

Aux conditions aux limites citées ci-dessus, nous avons considéré différents types de conditions à la section de sortie de la buse : profils de vitesse et de température uniformes ou paraboliques :

$$X = 0 ; V = 0 \text{ et } \left\{ \begin{array}{ll} \text{*profil uniforme} & \\ U = 1 ; \theta = 1 ; & \text{si } 0 \leq Y < 0,5 \\ \text{*profil parabolique} & \\ U = \sqrt{3}(1 - 4Y^2) & \\ \theta = \sqrt{3}(1 - 4Y^2) & \text{si } 0 \leq Y < 0,5 \\ U = \theta = 0 & \text{si } Y \geq 0,5 \end{array} \right. \quad (4)$$

Les constantes figurant dans les profils de vitesse et de température sont déterminées de façon à ce que le débit de quantité de mouvement et d'énergie à la sortie de la buse soient les mêmes pour les deux cas de conditions d'émission adoptées.

### 2.3 Méthode de résolution numérique

La résolution numérique du système d'équations obtenu (2), associé à ses conditions limites (3 et 4), est effectuée par une méthode aux différences finies à schéma itératif. Le schéma itératif est celui de la méthode de Gauss Seidel non linéaire qui est une méthode d'approximations successives.

La forme générale des équations de transport résolues, en plus de l'équation de continuité, est alors :

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} + V \frac{\partial \phi}{\partial Y} = D_{\phi} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left( Y \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) + S_{\phi} \quad (5)$$

( $\phi = U, V$  ou  $\theta$ ) et  $S_{\phi}$  sont les termes sources associés à ces variables.

L'équation de continuité est discrétisée au nœud ( $i+1/2, j+1/2$ ), elle est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta X} + \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i,j+1}}{\Delta X} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{(YV)_{i+1,j+1} - (YV)_{i+1,j}}{\Delta Y} + \frac{(YV)_{i,j+1} - (YV)_{i,j}}{\Delta Y} \right) = 0 \quad (6)$$

Les autres équations discrétisées aux nœuds ( $i+1/2, j$ ) sont données par l'équation généralisée suivante :

$$\begin{aligned} & U_{i+1/2,j} \left( \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta X} \right) + V_{i+1/2,j} \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}}{2\Delta Y} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta Y} \right) = \\ & D_{\phi_{i+1/2,j}} \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j-1} - 2\phi_{i+1,j}}{\Delta Y} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}}{\Delta Y} \right) \\ & + \frac{1}{Y_{i+1/2,j}} D_{\phi_{i+1/2,j}} \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}}{2\Delta Y} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta Y} \right) \\ & + S_{\phi_{i+1/2,j}} \end{aligned} \quad (7)$$

Cette méthode utilisée dans un travail antérieur [15], a été adoptée pour des raisons de stabilité numérique par rapport au maillage non décalé.

Le maillage utilisé est non uniforme suivant  $X$ , en effet, le pas est pris très fin au voisinage de la buse ( $\Delta X_1 = 10^{-3}$  pour  $0 \leq X \leq 5$ ); puis pour pouvoir descendre très bas dans le jet, on adopte un pas plus grand ( $\Delta X_2 = 10^{-2}$  pour  $X > 5$ ).

Dans la direction transversale, le maillage utilisé est uniforme, le pas de calcul est constant ( $\Delta Y = 0,0005$ ) et sa valeur impose un nombre de points  $N$  dans cette direction pour tenir compte de l'épanouissement du jet. La distance  $Y_\infty = (N-1) \Delta Y$  dans le cas du jet laminaire dépend des nombres de Reynolds et de Grashof. Ces pas sont suffisants pour obtenir une solution indépendante du maillage. La convergence de la solution globale obtenue avec cette méthode est considérée atteinte lorsque le changement relatif de  $U$  lors de deux itérations successives est inférieure à  $10^{-5}$  pour chaque nœud du domaine.

### 3. RESULTATS NUMERIQUES

Dans cette partie, nous présentons une analyse sur le comportement d'un écoulement de type jet axisymétrique en régime laminaire. Nous nous intéressons particulièrement à l'influence des différents profils d'émission à la sortie de la buse de décharge sur les champs dynamique et thermique.

#### 3.1 Jet circulaire

##### 3.1.1 Jet libre isotherme

L'influence des conditions d'émission à la sortie de la buse est examinée en comparant les résultats obtenus pour les grandeurs caractéristiques de l'écoulement

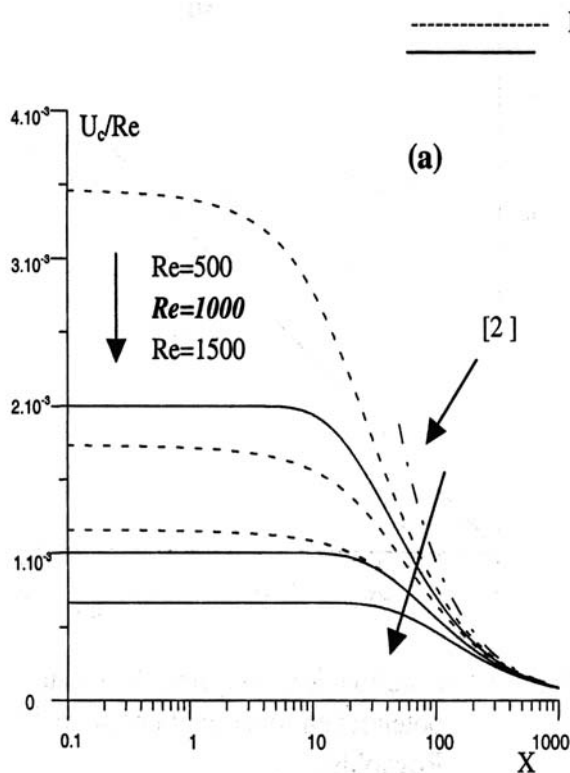


Fig. 2a: Influence du nombre de Reynolds sur l'évolution de la vitesse verticale au centre

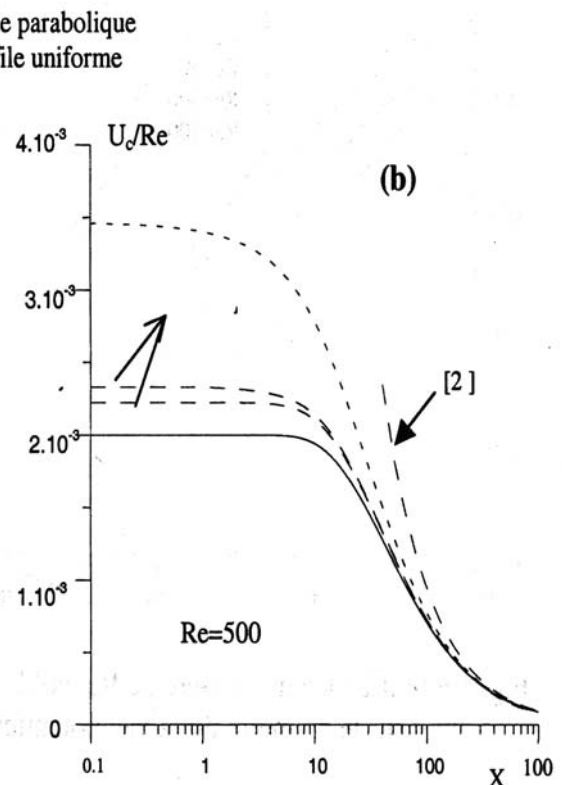


Fig. 2b: Influence des profils d'émission sur l'évolution de la vitesse verticale au centre

Pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, on représente en figure 2a la vitesse verticale au centre modifiée ( $U_c/Re$ ). Cette figure montre que le fluide garde une vitesse constante au voisinage de la buse, c'est la zone du cône potentiel. Par ailleurs, en s'éloignant et pour des distances très grandes de la buse les profils se confondent et on atteint la région du régime établi. La relation proposée par Fonade [2] dans cette zone est la suivante :

$$\frac{U_c}{Re} = \left(\frac{3}{32}\right) \frac{1}{X}$$

Nous constatons que nos résultats sont en bon accord avec cette corrélation à partir d'une distance  $X$  comprise entre 300 et 500 pour les valeurs du nombre de Reynolds considérées.

En pratique, tous les profils expérimentaux sont situés entre les deux cas extrêmes : profils paraboliques et uniformes. On a donc considéré deux profils au 1/7 pour examiner l'influence des conditions d'injection sur le comportement de l'écoulement. Nous avons donc représenté la vitesse au centre modifiée ( $U_c/Re$ ) pour différents profils d'émission : uniformes, paraboliques ou intermédiaires sur la figure 2b pour  $Re = 500$ .

Le premier profil est obtenu en supposant que la vitesse est constante sur la moitié de la buse :

$$X = 0 \quad \begin{cases} 0 \leq Y \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} < Y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{U} = \sqrt{\frac{288}{233}} \\ \bar{U} = \sqrt{\frac{288}{233}} \left[ 4 \left( \frac{1}{2} - Y \right) \right]^{1/7} \end{cases} \quad (8)$$

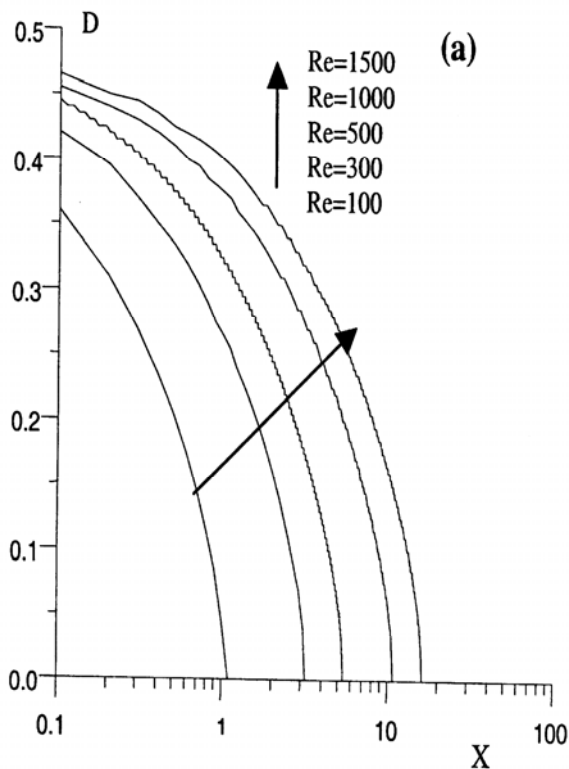


Fig. 3a: Influence du nombre de Reynolds sur le diamètre du noyau potentiel

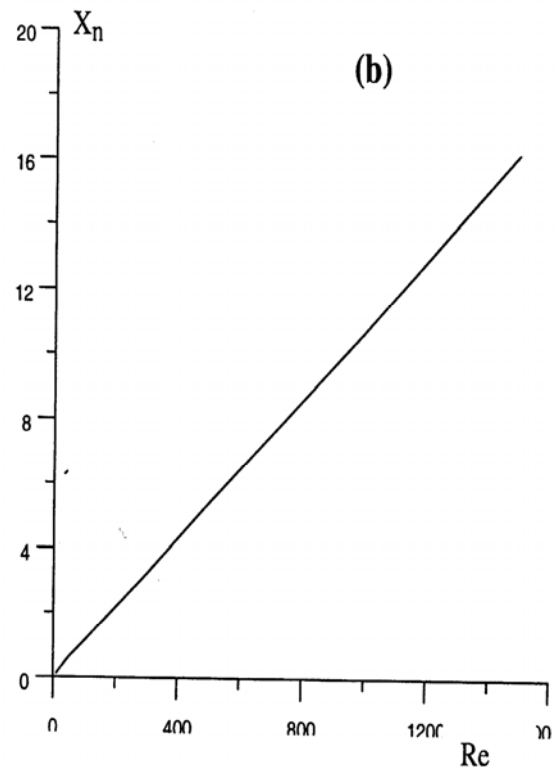


Fig. 3b: Evolution de la longueur du noyau potentiel en fonction du nombre de Reynolds

Le second en prenant une vitesse uniforme uniquement sur le  $\frac{1}{4}$  de la buse:

$$X = 0 \quad \begin{cases} 0 \leq Y \leq \frac{1}{8} & \bar{U} = \sqrt{\frac{384}{283}} \\ \frac{1}{8} < Y \leq \frac{1}{2} & \bar{U} = \sqrt{\frac{384}{283}} \left[ \frac{8}{4} \left( \frac{1}{2} - Y \right) \right]^{1/7} \end{cases} \quad (9)$$

Nous remarquons sur cette figure que pour les deux profils au 1/7, la longueur du cône potentiel est légèrement inférieure à celle obtenue avec un profil initial uniforme. Cette différence s'accompagne d'une augmentation de la zone de transition. Le régime établi est atteint pour tous les profils d'émission à la même distance de la buse. Elle permet enfin de confirmer que la zone du jet établi commence environ à partir de  $X$  entre 300 et 500 pour toutes les conditions d'émission considérées.

Cette figure montre aussi que tous les profils expérimentaux sont situés entre les deux cas extrêmes (uniforme et parabolique). Nous allons donc utiliser ces derniers dans la suite de ce travail.

On a aussi déterminé le diamètre  $D$  du noyau potentiel, en prenant pour chaque hauteur  $X$  l'ordonnée pour laquelle  $U(Y) < 0,999$ . La figure 3a permet de constater que le jet s'étale d'autant moins que le nombre de Reynolds  $Re$  est grand. La longueur du noyau potentiel  $X_n$  est obtenue pour  $D = 0$ . Cette grandeur est représentée sur la figure 3b, et on remarque qu'elle suit une loi linéaire :  $X_n = 0,0108 Re$ .

En figure 4, nous remarquons que la demi-épaisseur dynamique du jet (ordonnée pour laquelle la vitesse  $U = U_c/2$ ) demeure constante au voisinage de la buse pour augmenter ensuite de façon pratiquement linéaire. Elle est comparée à la corrélation donnée par Fonade [2] dans la région du régime établi :  $Y_{0,5u} Re = 5,945 X$  : un accord satisfaisant est constaté à partir d'une hauteur  $X$  comprise entre 300 et 500 pour les nombres de Reynolds considérés.

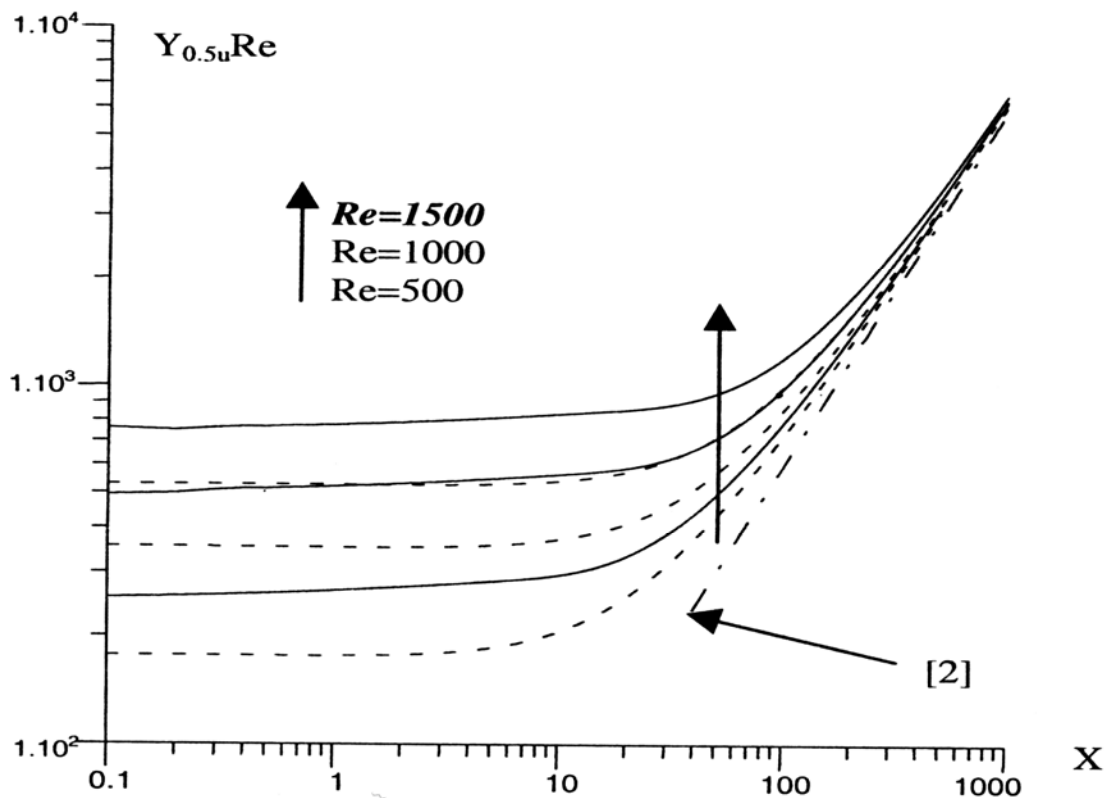


Fig. 4: Evolution de la demi-épaisseur dynamique du jet pour différentes valeurs du nombre Reynolds

Nous pouvons donc déduire de ces résultats que la région du régime établi pour ce jet axisymétrique isotherme est située à une distance de la buse supérieure à  $X = 300$ , dans cette zone nos résultats concordent avec les corrélations proposées par d'autres auteurs dans la région du régime établi.

### 3.1.2 Etude du jet anisotherme

Dans le cas d'un jet circulaire laminaire anisotherme, on présente sur la figure 5a, la vitesse longitudinale au centre du jet pour une valeur du nombre de Grashof égal à  $10^5$  et pour trois valeurs du nombre de Reynolds.

Pour des hauteurs très élevées de  $X$  ( $X > 200$ ), l'évolution de la vitesse au centre est identique quel que soit le profil de la vitesse initiale : c'est la région de panache où les forces de flottabilité sont très grandes devant les forces d'inertie. Dans cette région les conditions initiales n'ont plus d'effet sur l'écoulement. La zone du jet est reliée à la zone de panache par une région intermédiaire dans laquelle les résultats obtenus pour des conditions d'injection uniformes sont différents de ceux établis pour des conditions paraboliques. Dans cette région, les forces de flottabilité sont du même ordre de grandeur que les forces d'inertie.

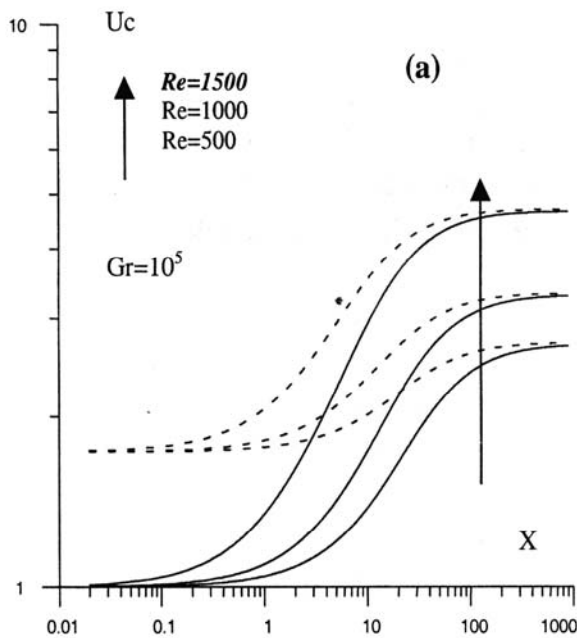


Fig. 5a: Evolution de la vitesse verticale au centre pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et pour  $Gr = 10^5$

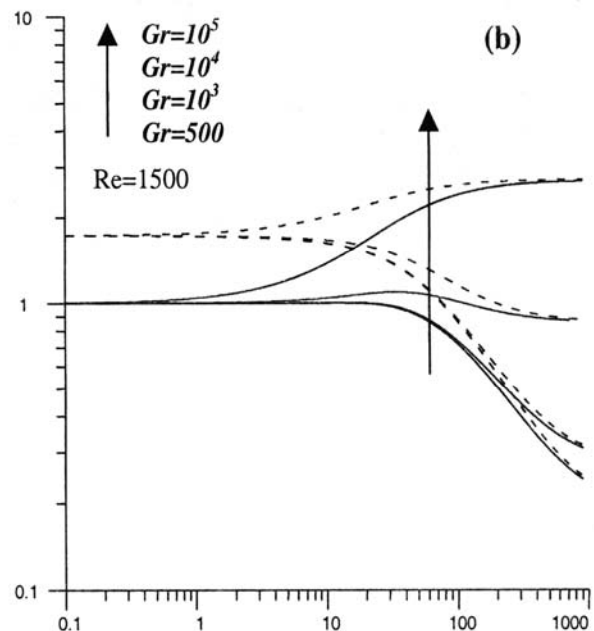


Fig. 5b: Evolution de la vitesse verticale au centre pour différentes valeurs du nombre de Grashof et pour  $Re = 1500$

Sur la figure 5b, on a aussi représenté la vitesse au centre mais pour une valeur du nombre de Reynolds fixe ( $Re = 1500$ ) et différentes valeurs du nombre de Grashof. Sur cette figure, des constatations identiques aux précédentes peuvent être faites.

On remarque, que cette grandeur reste constante dans une région proche de la buse. Cette zone où les forces d'inertie sont prépondérantes, est appelée zone du jet.

On constate que pour des faibles valeurs du nombre de Grashof l'écoulement est similaire à un écoulement de type jet isotherme et il faut aller très en aval de la buse pour que les forces de flottabilité puissent influencer de façon significative sur l'écoulement et pour que la vitesse au centre augmente.



Sur la figure 6, on représente la température au centre pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Les observations effectuées à propos de la vitesse au centre sont aussi valables pour la température, c'est-à-dire que les résultats obtenus pour un profil initial uniforme ne coïncident avec ceux obtenus pour un profil initial parabolique que dans la zone de panache.

Nous avons aussi cherché à valider nos résultats dans le cas du jet laminaire chauffé bien que la plupart des travaux effectués dans ce cas soient d'origine analytique.

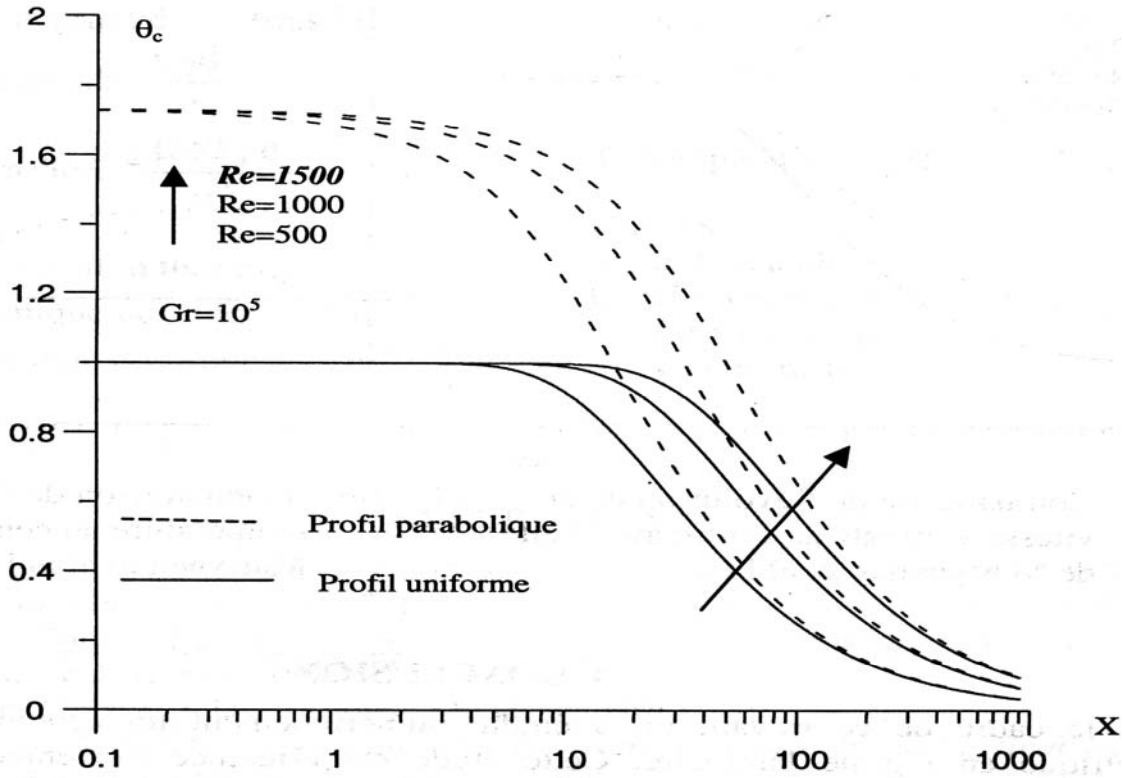


Fig. 6: Evolution de la température au centre pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et pour  $Gr=10^5$

En effet, Martynenko et al [11] ont étudié analytiquement le cas du jet chauffé et ils ont proposé des corrélations valables pour différents nombres de Prandtl (2 ; 6,7 ; 10 ; 20)

$$\left\{ \begin{array}{l} U_c = \left( \frac{3}{32} \right) Re \frac{1}{X} \left( 1 + 4C_2 \frac{Gr}{Re^3} X^2 \right)^{1/2} \\ \theta_c = \left( \frac{1}{8} \right) \left( \frac{Re}{X} \right) \left( \frac{2Pr + 1}{4} \right) \frac{1 + \frac{3Pr + 4}{2Pr + 1} \left( 4 \frac{Gr}{Re^3} X \right)}{1 + \frac{11Pr + 10}{8Pr} \left( 4 \frac{Gr}{Re^3} X \right)} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\text{Avec : } C_2 = \frac{110Pr(13Pr + 28)}{9(20Pr + 167Pr + 18)}$$

Afin de comparer nos résultats à ceux de ces auteurs, nous avons utilisé un nombre de Prandtl égal à 2 et nous avons porté les résultats en figure 7.

Martynenko et al [1] ont proposé une corrélation valable dans la zone de panache, nos résultats coïncident avec ceux de ces auteurs à partir de  $X=300$ , ce qui nous amène à penser que cette zone commence à partir de cette distance.

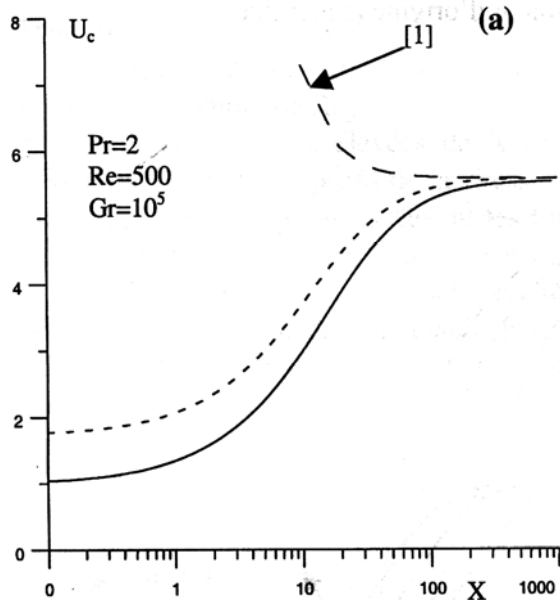


Fig. 7a: Comparaison de l'évolution de la vitesse verticale au centre avec celle de Martynenko et al. [1]

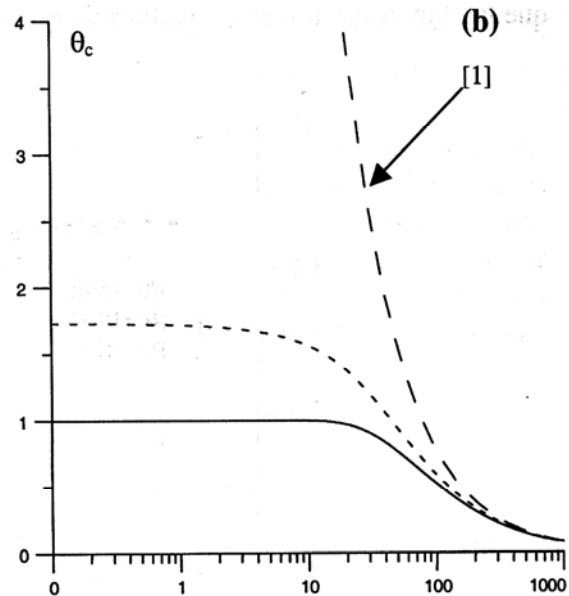


Fig. 7b: Comparaison de l'évolution de la température au centre avec celle de Martynenko et al. [1]

#### 4. CONCLUSION

Dans le cadre de ce travail, on a étudié numériquement un écoulement de type jet axisymétrique en régime laminaire. Cette étude est effectuée moyennant une procédure numérique basée sur une méthode aux différences finies permettant de descendre très bas dans le jet.

La discussion porte essentiellement, en premier lieu, sur la présentation des différentes caractéristiques d'un écoulement de type jet axisymétrique pour différentes valeurs des nombres de Reynolds et de Grashof pour décrire l'écoulement dans les trois régions du jet. Elle porte ensuite sur l'influence des différents types de conditions d'émission à la sortie de la buse : profils de vitesse et de température uniformes ou paraboliques.

La comparaison entre nos résultats et ceux des travaux antérieurs, conduit à un accord satisfaisant pour des valeurs élevées de la coordonnée axiale (région auto-similaire).

Pour un écoulement de type jet axisymétrique isotherme nous avons montré que la région auto-similaire (région de régime établi) commence à une distance  $X$  située entre 300 et 500. Dans cette zone les conditions d'émission n'affectent plus l'écoulement. Par contre, l'influence des conditions initiales à la sortie de la buse reste importante dans les régions du noyau potentiel et de transition.

Pour la convection mixte, dans la région de panache où les forces de flottabilité sont prépondérantes, le choix des conditions initiales n'influe plus sur l'écoulement et les résultats obtenus pour le cas d'un profil initial uniforme coïncident avec ceux obtenus pour le cas d'un profil parabolique. D'après nos résultats, la distance à la buse de cette région auto-similaire dépend du nombre de Grashof et de Reynolds.

## NOMENCLATURE

<p><math>u, v</math> : Composantes de la vitesse selon les directions longitudinale <math>x</math> et transversale <math>y</math>, respectivement <span style="float: right;">(m.s<sup>-1</sup>)</span></p> <p><math>x, y</math> : Coordonnées longitudinale et transversale <span style="float: right;">(m)</span></p> <p><math>Y_{0.5u}, Y_{0.5T}</math> : Demi-épaisseur dynamique et thermique correspondant respectivement aux ordonnées <math>u_c/2</math> et <math>\Delta T_c/2</math> <span style="float: right;">(m)</span></p> <p><math>g</math> : Accélération de la gravité (m.s<sup>-2</sup>) <span style="float: right;">d : Diamètre de la buse (m)</span></p> <p>Re : Nombre de Reynolds, <math>\frac{u_0 d}{\nu}</math> <span style="float: right;">Pr : Nombre de Prandtl, <math>\frac{\nu}{\alpha}</math></span></p> <p>Gr : Nombre de Grashof, <math>\frac{g \beta \Delta T_0 d^3}{\nu^2}</math> <span style="float: right;">T : Température du jet, <math>\Delta T = T - T_\infty</math> (K)</span></p>	
--	--

### Symbôles grecs

$\beta$  : Coefficient de dilatation thermique (K<sup>-1</sup>)  
 $\alpha$  : Diffusivité thermique du fluide (m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)  
 $\nu$  : Viscosité cinématique (m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)

### Indices

$\infty$  : milieu ambiant  
 0 : à la sortie de la buse  
 c : sur l'axe du jet  
 m : valeur maximale

## REFERENCES

- [1] O.G. Martynenko, V.N. Korovkn and A. Sokovishin, 'The Class of Self-similar Solutions for Laminar Buoyant Jets', Int. J. Heat Mass Trans. 32, (12), pp. 2297-2307, 1989.
- [2] C. Fonade, 'Cours - Etude des Jets - Application à la Fluidique', Institut National Polytechnique de Toulouse, 1967.
- [3] H. Schlichting, 'Boundary Layer Theory', Mc Graw. Hill, 1979.
- [4] S.B. Savage and G.K Chan, 'The Buoyant Two Dimensional Laminar Vertical Jets', Q. I. Mech. Appl. Math., 23, pp. 413-430, 1970.
- [5] J.C. Mallendorf and B. Gebhart, 'Thermal Buoyancy Round Laminar Vertical Jets', Int. J. Heat Mass Trans., 16, pp. 735-745, 1973.
- [6] J.W. Yang and R.D Pattel, 'Effect of Buoyancy Forced Convection in a Two Dimensional Wall Jet Along a Vertical Wall', J. Heat Trans., 95, pp. 121-123, 1973.
- [7] R.S. Corla, 'Combined Natural and Forced Convection in a Laminar Wall Jet a long Vertical Plate with Uniform Surface Heat Flux', Appl. Scient. Res., 31, pp. 455-465, 1976.
- [8] G. Wilks and R Hunt, 'The Two Dimensional Laminar Certical Jet with Positive or Adverse Buoyancy', Numerical Heat Trans., 8, pp. 449-468, 1985.
- [9] V.N Krovokin and Yu. A. Sokovishin, 'Laminar Swirled Jet with Allowance for Buoyancy Forces', Izv. Mech. Zhidk. Gaza 4, pp. 29-34, 1983.
- [10] N. Afzal, 'Mixed Convection Plume Above a Point Heat Source in a Vertical Free Stream', Int. J. Heat Mass Transfer, 28, pp. 2043-2047, 1985.
- [11] C.S. Yih, 'Free Convection due to a Point Source of Heat', Proc. Ist U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., pp. 941-947, 1951.
- [12] N. Afzal, 'Mixed Convection in a Axisymmetric Buoyant Plume', J. Heat Mass Transfer, 26, pp. 381-388, 1983.

- [13] K.V. Rao, B.F. Arnaly and T.S. Chen, '*Mixed Convection Plumes Arising from a Thermal Point Source*', J. Heat Transfer, 107 (3), pp. 196-198, 1985.
- [14] D.S. Riley and D.G. Drake, '*Mixed Convection in an Axisymmetric Buoyant Plume*', Q. J. Mech. Appl. Math., 36 (1), pp. 43-54, 1983.
- [15] H. Mhiri, S. El Golli, G. Le Palec et P. Bournot, '*Influence des Conditions d'Emission sur un Ecoulement de Type Jet Plan Laminaire ou Chauffé*', Revue Gén. Therm., 10, pp. 898-910, 1998.