

## Simulation numérique de la convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée remplie d'air

N. Godbane, Y. Benserai, F. Ouarhlent et A. Soudani

Laboratoire de Physique Energétique Appliquée, Département de Physique  
Faculté des Sciences de la Matière, Université Batna 1, 05000 Batna, Algérie

(reçu le 15 Juin 2019 - accepté 25 Juin 2019)

**Résumé** - Ce travail consiste à étudier la simulation numérique de la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et permanente dans une cavité carrée différentiellement chauffée remplie d'air. Les parois verticales soumises à des températures constantes, alors que les parois horizontales sont considérées comme adiabatiques. Le modèle mathématique utilisé décrivant notre problème a été développé en se basant sur les approximations de Boussinesq. Les équations de Navier Stokes et d'énergie ont été résolues à l'aide du code de calcul commercialisé (Fluent) par la méthode des volumes finis. L'étude effectuée est caractérisée par la visualisation graphique des contours de fonction de courant, des isothermes, des profils de vitesse suivant  $x$  et  $y$  et des profils de température en fonction de la variation du nombre de Rayleigh pour la convection naturelle pure. La variation du nombre de Rayleigh est effectuée dans la gamme de  $10^3$  à  $10^6$  pour différentes valeurs du rapport de forme et pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.72$ . Les résultats obtenus indiquent que l'augmentation du nombre de Nusselt est proportionnelle à l'augmentation du nombre de Rayleigh, par ailleurs, la convection naturelle est évidemment très sensible à la variation du rapport de forme. En effet, les résultats montrent que la configuration de la cavité verticale donne un meilleur transfert de chaleur. Le nombre de Nusselt moyen est une fonction décroissante du rapport d'aspect de la cavité.

**Abstract** - This work consists in studying the numerical simulation of two-dimensional laminar and permanent natural convection in a differentially heated square cavity filled with air. The vertical walls subjected to constant temperatures, while the horizontal walls are considered adiabatic. The mathematical model used to describe our problem was developed based on the Boussinesq approximations. The Navier Stokes and energy equations were solved using the commercialized calculation code (Fluent) by the finite volume method. The study carried out is characterized by graphical visualization of current function contours, isotherms, velocity profiles along  $x$  and  $y$  and temperature profiles as a function of Rayleigh number variation for pure natural convection. The variation of the Rayleigh number is performed in the range of  $10^2$  to  $10^6$  for different values of the aspect ratio and for a number of Prandtl  $Pr = 0.72$ . The results obtained indicate that the Nusselt number increase is proportional to the increase in Rayleigh number; moreover, the natural convection is obviously very sensitive to the variation of the aspect ratio. Indeed, the results show that the configuration of the vertical cavity gives a better heat transfer. The average Nusselt number is a decreasing function of the cavity aspect ratio.

**Mots clés:** Transfert de chaleur - Convection naturelle - Cavité - Parois différentiellement chauffées.

### 1. INTRODUCTION

Le transfert de chaleur par convection naturelle dans les enceintes fermées est un sujet d'intérêt considérable dans le domaine l'industrie. Les applications sont nombreuses, la conception thermique dans le domaine des bâtiments, le stockage cryogénique, la conception des fours, des réacteurs nucléaires, des collecteurs d'énergie solaire, etc. La convection naturelle dans les cavités ayant diverses formes et à différents types de conditions aux limites a été largement étudiée.

De Vahl Davis *et al.* (1983) [2] ont présenté une solution numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Les parois horizontales sont maintenues adiabatiques, tandis que les parois verticales sont maintenues à deux températures différentes. Ce problème est généralement utilisé comme une situation de référence pour la validation des codes informatiques.

Laaroussi *et al.* (2005) [3] ont étudié la résistance thermique d'un mur constitué de blocs de matériaux alvéolaires de forme simple, séparant deux ambiances à températures différentes. L'étude est réalisée numériquement en tenant compte de la périodicité permettant de limiter les simulations à un élément représentatif constitué par une cavité parallélépipédique fermée. En se basant sur l'approximation de Boussinesq, les équations de Navier Stokes et d'énergie ont été résolues à l'aide du code de calcul commercialisé (Fluent) par la méthode des volumes finis avec un décentrement du second ordre des termes de transport (Schéma Quick) utilisant l'algorithme itératif SIMPLE pour traiter le couplage vitesse-pression.

Nawaf Saeid *et al.* (2006) [4] ont étudié la convection laminaire dans une cavité carrée bidimensionnelle remplie d'air. Ils ont supposé que la paroi verticale est chauffée à des variations sinusoidales spatiales de la température par rapport à une valeur moyenne constante, qui est plus élevée que la température froide de la paroi latérale, alors que les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont trouvé que le nombre de Nusselt moyen basé sur la température de la paroi chaude augmente avec l'augmentation de l'amplitude pour une gamme du nombre de Rayleigh variant de  $10^2$  à  $10^6$ .

Ould Said *et al.* (2007) [5], leur travail a pour objectif la modélisation du comportement de l'écoulement naturel convectif d'un fluide visqueux incompressible dans une cavité confinée en forme de pyramide horizontale chauffée par le bas et refroidie par les parois inclinées supérieures. Des résultats sont obtenus pour plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh variant entre  $10^2$  et  $10^6$  pour différentes valeurs du rapport de forme de la pyramide et pour un nombre de Prandtl  $Pr = 0.7$ . Les résultats obtenus montrent que la convection naturelle est évidemment très sensible à la variation du rapport de forme. Ils ont montré que le rapport de forme est inversement proportionnel à l'augmentation du nombre de Nusselt moyen le long de la paroi chaude.

Guellal *et al.* (2008) [6] ont étudié la convection naturelle dans un réservoir cylindrique, les équations qui gouvernent la convection sont résolues à l'aide de la méthode ADI (Alternating Direction Implicite Method), l'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode des différences finies. L'influence du nombre de Rayleigh sur la température et la vitesse du fluide est particulièrement étudiée. L'étude a montré que les variations de température et de vitesse dépendent particulièrement de la géométrie de l'enceinte.

Mezrhab *et al.* (2010) [7] ont analysé les effets de l'échange de rayonnement à l'intérieur d'une serre chaude dans des conditions climatiques d'hiver, selon le nombre de tubes de chauffage carrés utilisés, dont ces derniers sont chauds et isothermes et sont équidistants à l'intérieur de la serre. Les résultats sont rapportés en termes d'isothermes, des lignes de courants et du nombre de Nusselt moyen pour un nombre de Rayleigh variant de  $10^2$  à  $10^6$ . Les lignes de courants prouvent que les effets radiatifs sont notables près des parois de la serre, et deviennent de plus en plus importants quand le nombre de Rayleigh augmente. En conséquence, l'élévation du nombre de Rayleigh entraîne une augmentation du transfert thermique global dans la serre.

Bekraoui *et al.* (2017) [8], ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité rectangulaire portant des ailettes adiabatiques décalées et montées sur les

parois chaude et froide. Pour cela, un modèle numérique basé sur la méthode des volumes finis est utilisé dans cette étude. Le couplage pression-vitesse est assuré par l'algorithme Simplé. Ils s'intéressent à la structure de l'écoulement et au transfert de chaleur pour  $Pr = 0.71$ ,  $10^2 \leq Ra \leq 10^6$ , et pour différentes valeurs de facteur d'aspect, de la hauteur relative des ailettes et de leur espacement. Les résultats sont présentés en termes du nombre de Nusselt local et moyen, des lignes du courant et des isothermes. Ils ont conclu que l'espacement entre les ailettes et leur hauteur relative sont des paramètres important affectant le transfert de chaleur. En augmentant l'espacement entre les ailettes la convection devient visiblement dominante. Le transfert de chaleur se réduit en augmentant la hauteur relative des ailettes.

Ouarhrent *et al.* (2018) [9, 10], leur travail porte sur une simulation numérique de la convection naturelle, dans une enceinte de forme cubique. L'enceinte est partiellement poreuse homogène et isotrope. Les parois horizontales de l'enceinte sont adiabatiques imperméables. Les parois verticales de la cavité sont soumises à des températures constantes (des conditions aux limites de type Dirichlet), et le fluide était de l'air. L'écoulement dans le milieu poreux est modélisé par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer. La méthode numérique des volumes finis est utilisée pour la résolution des équations gouvernantes du problème. Les résultats obtenus indiquent que l'augmentation de Nu est proportionnelle à l'augmentation du nombre de Rayleigh et de Darcy, et inversement proportionnelle à l'épaisseur adimensionnelle de la couche poreuse.

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

La géométrie du problème considéré est illustrée dans la figure 1. Il s'agit d'une cavité carrée remplie d'air de hauteur H, avec des parois horizontales adiabatiques et des parois verticales soumises à des températures constantes respectivement ( $T_c$  et  $T_f$ ) dans le cas d'un écoulement de convection naturelle pure (sans rayonnement).

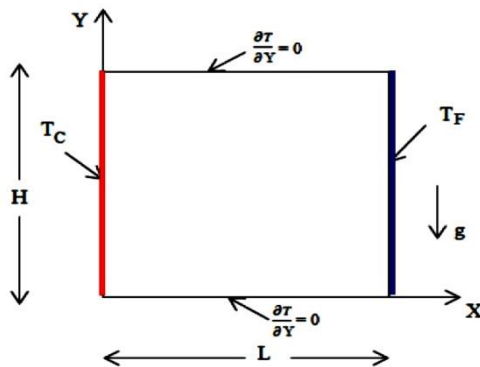


Fig. 1: Géométrie du problème

Pour une formulation simple du modèle mathématique, nous considérons les approximations suivantes : L'écoulement est stationnaire et bidimensionnel, le fluide est Newtonien et incompressible et l'écoulement engendré est laminaire. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable et les propriétés physiques du fluide sont constantes hormis la masse volumique qui obéit à l'approximation de Boussinesq dans le terme de la poussée d'Archimède. Compte tenu des hypothèses émises précédemment, les équations classiques de conservation sont les suivantes,

Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Equation de quantité de mouvement suivant la direction X

$$\rho_1(0) (\partial/\partial x(uu) + \partial/\partial y(vu)) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

Equation de quantité de mouvement suivant la direction Y

$$\rho_0 (\partial/\partial x(uv) + \partial/\partial y(vv)) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho_0 g \beta (T - T_0) \quad (3)$$

Equation d'énergie

$$\rho_0 C_p \left( \frac{\partial}{\partial x}(ut) + \frac{\partial}{\partial y}(vt) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

L'opération d'adimensionner les équations consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'ils seront normalisés par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres et facilite beaucoup les comparaisons entre les résultats numériques, analytique et expérimentaux.

Ainsi nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes,

$$X = \frac{x}{L} ; Y = \frac{y}{L} ; U = \frac{x}{\left( \frac{\alpha}{L} \right)} ; V = \frac{v}{\left( \frac{\alpha}{L} \right)} ; \theta = \frac{T - T_F}{T_C - T_F} ; P = \frac{p}{\rho_0 \left( \frac{\alpha}{L} \right)^2}$$

Donc les équations adimensionnelles deviennent alors;

Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

Equation de quantité de mouvement suivant la direction X

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right) \quad (6)$$

Equation de quantité de mouvement suivant la direction Y

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right) + \text{RaPr}\theta A \quad (7)$$

Equation d'énergie

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\theta}{\partial X} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\theta}{\partial Y} \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \quad (8)$$

Ces équations conduisent à faire apparaître des nombres adimensionnels suivants, Le nombre de Prandtl  $\text{Pr} = \nu / \alpha$  ; le nombre de Rayleigh  $\text{Ra} = (g \beta (T_c - T_F) H^2) / \nu \alpha$  ; le nombre de Nusselt  $\text{Nu} = hL/\lambda$  et le rapport d'aspect de la cavité  $A = L/H$ .

Les conditions aux limites relatives à ce problème sont résumées au **Tableau 1**.

**Tableau 1.** Conditions aux limites pour un écoulement dans une cavité carrée

$x = 0$	$0 \leq y \leq H$	$u = 0$	$v = 0$	$T = T_c = T_f + \Delta T$
$x = L$	$0 \leq y \leq H$	$u = 0$	$v = 0$	$T = T_f$
$y = 0$	$0 \leq x \leq L$	$u = 0$	$v = 0$	$q = 0$
$y = H$	$0 \leq x \leq L$	$u = 0$	$v = 0$	$q = 0$

### 3. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Il faut définir et créer le domaine d'étude (surface ou volume) et de le mailler suivant le bon vouloir de l'utilisateur. Pour plus de détails sur Gambit et son utilisation, on invite le lecteur à s'orienter vers la référence [11]. Dans cette étude, nous avons une configuration de cavité, construite par Gambit montrée sur la figure 2.

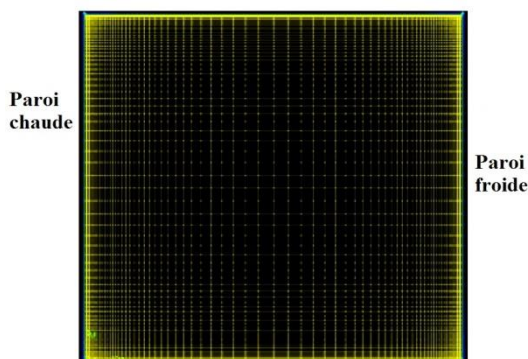


Fig. 2: Géométrie et maillage construit sur Gambit

Pour vérifier l'effet du maillage sur les résultats numériques, plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante, une cavité carrée dont les parois verticales sont différentiellement chauffées et les deux parois horizontales sont maintenues adiabatiques. Des essais numériques ont été nécessaires pour optimiser le temps et la précision des calculs. Le **Tableau 2** présente la valeur du nombre de Nusselt moyen pour différents maillages testés.

**Tableau 2.** Effet du maillage sur le Nusselt moyen

<b>Ra</b>	<b>10<sup>5</sup></b>			
Maillage	70 * 70	80 * 80	90 * 90	100 * 100
<b>Nu moy</b>	4.5600	4.5623	4.5641	4.5724
Ecart relatif (%)	0.05 %	...	0.039 %	0.22 %

Le **Tableau 3** présente les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude obtenues dans notre travail et comparées à celles de De Vahl Davis [2] pour deux cas de maillage. On peut remarquer que les résultats obtenus montrent un bon accord avec les résultats de De Vahl Davis [2], l'écart relatif maximal dans les deux cas du nombre de Ra n'atteint pas 2 %.

Alors on peut choisir un maillage qui ne prend pas beaucoup de temps pour analyser le maximum des cas dans notre étude. Donc notre choix a été orienté vers le maillage des 6400 nœuds. D'après les résultats obtenus on retient le maillage (80 \* 80) pour simuler les distributions d'écoulement et de température dans une cavité carrée uniforme. On utilise dans les calculs un nombre de Prandtl de l'air  $Pr = 0.72$ , lors de nos simulations tests.

**Tableau 3.** Comparaison des nombres de Nusselt moyen

	Ra	10 <sup>5</sup>	10 <sup>6</sup>
	Maillage	40 * 41	80 * 80
Résultats de Davis [2]	Nu moy	4.523	8.798
Nos résultats	Nu moy	4.552	8.938
Ecart relatif (%)	Nos résultats - Résultats de [2]	0.637 %	1.594 %

**3.1 Influence du nombre de Rayleigh**

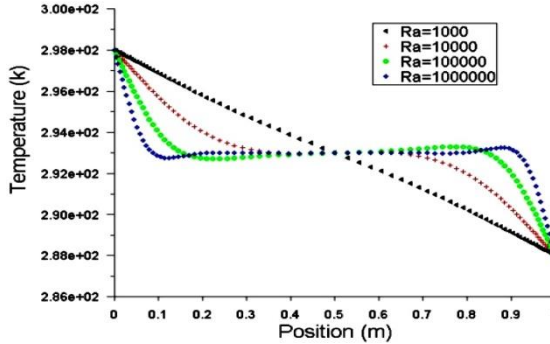
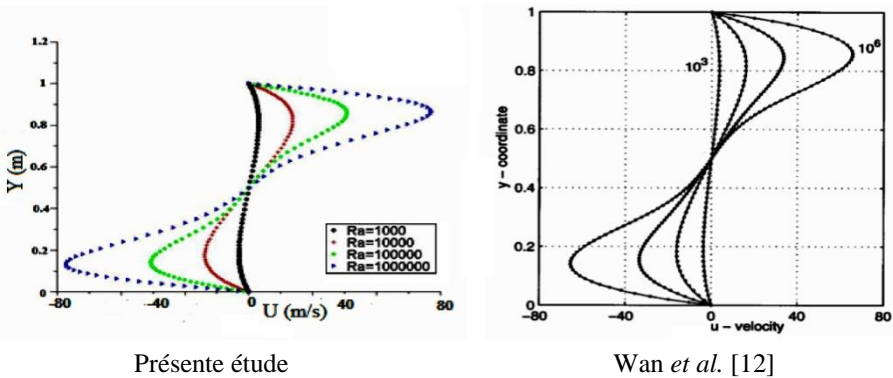


Fig. 3: Variation de température pour différents nombres de Rayleigh

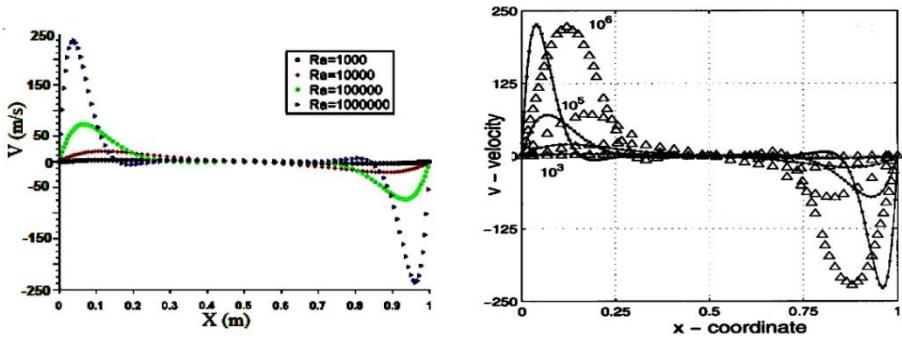


**-a-** Distribution de la composante U au point  $x = L/2$  en fonction de  $y$

D’après la figure 3, les pentes de la température dans la zone étudiée indiquent un accroissement du champ thermique en fonction de l’augmentation du nombre de Rayleigh  $Ra = 10^2$ . L’augmentation du nombre de Rayleigh traduit donc une intensification de la convection naturelle.

Tandis que les faibles valeurs du nombre de Rayleigh montrent une stratification thermique verticale due à un transfert de chaleur uniquement par conduction qui ne génère aucun écoulement convectif.

Pour la figure 4, qui représente la variation des composantes de la vitesse (U, V) pour différents nombres de Rayleigh. La figure 4.a montre que le profil de la vitesse U est symétrique par rapport au centre de la cavité. Pour les petites valeurs du nombre de Rayleigh ( $Ra = 10^2$ ), la vitesse est presque nulle.



Présente étude

Wan *et al.* [12]

-b- distribution de la composante V au point  $x = L/2$  en fonction de x  
 Fig. 4: Variation des composantes de la vitesse (U, V) pour différents nombres de Rayleigh

Avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, on observe l'apparition des valeurs maximales et minimales de la vitesse U près des parois adiabatiques horizontales.

Mais pour la vitesse V, la figure 4.b montre aussi un profil symétrique par rapport au centre de la cavité et on remarque une augmentation du gradient de la vitesse près des parois verticales avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Par contre au milieu de l'enceinte, la vitesse est nulle lorsque  $Ra = 10^2$ .

Nous pouvons conclure que l'augmentation du nombre de Rayleigh engendre une augmentation progressive des vitesses. Les profils de vitesse présentent un bon accord entre les présents résultats et ceux de Wan *et al.* [12].

### 3.2 Influence du rapport d'aspect

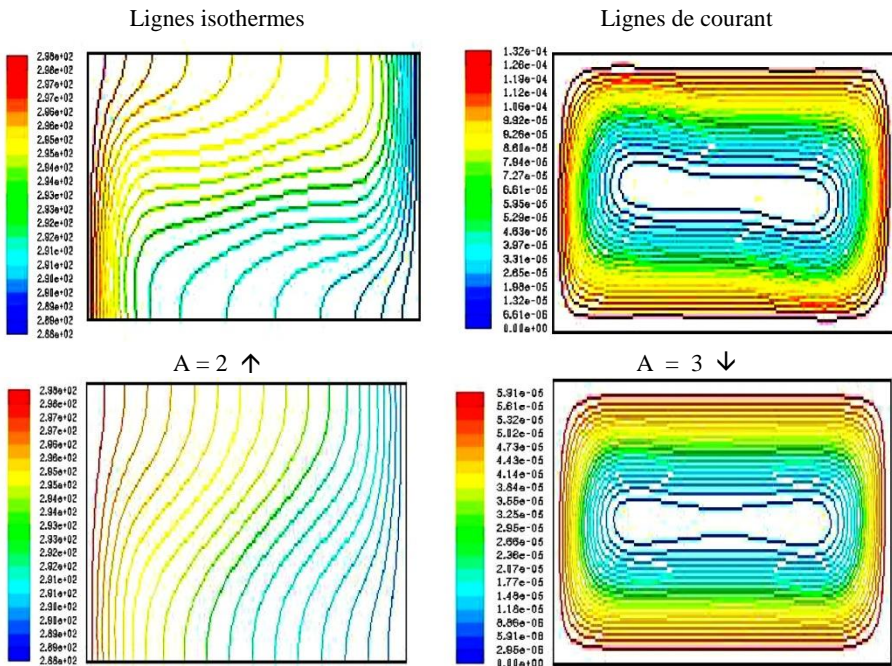


Fig. 5: Lignes de courants et Isothermes dans une cavité, pour  $A = 2$  et  $3$ , et pour  $Ra = 10^5$

La configuration de la cavité a une influence majeure sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur. Le cœur de la cavité subit un grand changement lorsqu'on change la configuration de la cavité. Les lignes de courants près des parois latérales sont très serrées pour toutes les configurations étudiées, indiquant que l'écoulement est accéléré dans ces zones. Les isothermes deviennent parallèles aux parois horizontales donnant un état de stratification thermique pour le fluide dans le cœur de la cavité.

**3.3 Variation du nombre de Nusselt moyen**

La figure 6 montre la variation des nombres de Nusselt moyens sur la paroi chaude pour  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$  et  $10^6$ . On remarque que le nombre de Nusselt moyen, sur la paroi chaude augmente avec le nombre de Rayleigh. Le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction pour des nombres de Rayleigh  $Ra \leq 1000$ , pour les plus grandes valeurs du nombre de Rayleigh le transfert devient purement convectif. Le résultat obtenu est comparable à celui Boughaba [1].

La figure 7 représente le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du rapport de forme A. On peut constater que, la configuration verticale est plus efficace que la configuration horizontale, du point de vue transfert de chaleur, puisque les valeurs maximales du nombre de Nusselt moyen sont atteintes dans la configuration verticale.

Le rapport de forme  $A = 1/4$  de la cavité, correspond à une valeur maximale de Nusselt moyen sur la paroi chaude. Le nombre de Nusselt moyen est obtenu comme une fonction décroissante du rapport de forme de la cavité selon la corrélation  $Nu = 16.974 e^{-1.089 A}$ . Ce résultat est en bon accord avec celui obtenu par Boughaba [1].

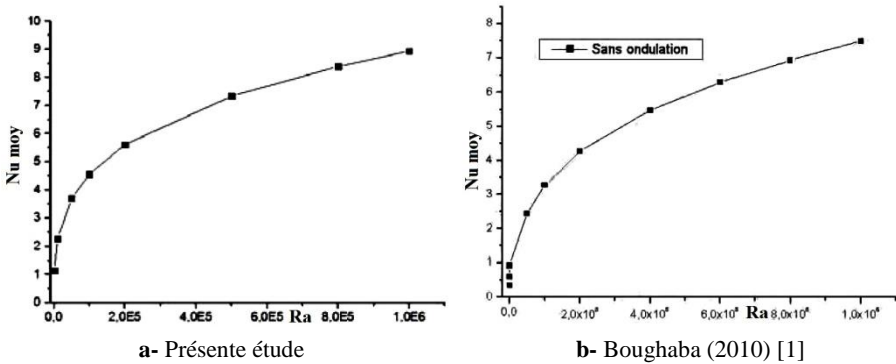


Fig. 6: Nusselt moyen sur la paroi chaude, fonction du nombre de Rayleigh

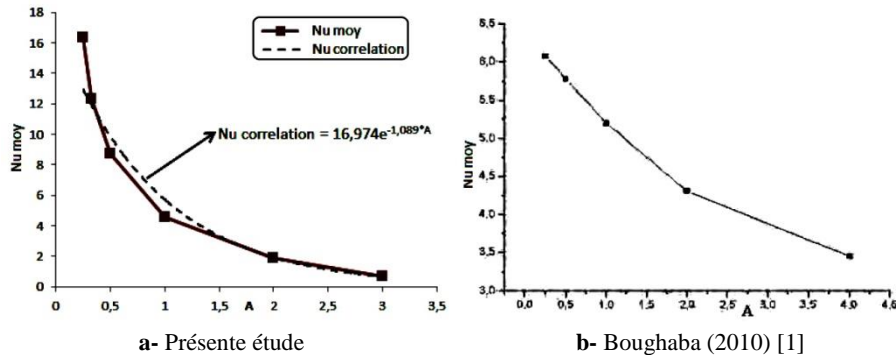


Fig. 7: Nusselt moyen sur la paroi chaude, fonction de rapport de forme ou  $Ra = 10^5$



#### 4. CONCLUSION

Dans le présent travail, on a étudié l'influence de la variation du nombre de Rayleigh, du rapport d'aspect de la cavité sur les champs de température et des lignes de courant, ainsi que sur le nombre de Nusselt.

Pour montrer l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et sur le transfert de chaleur par convection, on a fait varier le nombre de Rayleigh de  $10^3$  jusqu'à  $10^6$ . Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du nombre de Rayleigh fait accélérer l'écoulement dans la cavité et le transfert de chaleur passe du mode conductif  $Ra = 10^3$  au mode convectif, et par conséquent le nombre de Nusselt augmente.

Par la suite, on a fait varier le rapport d'aspect de l'enceinte afin d'examiner son effet sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité, et on a tracé le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du rapport d'aspect. Le résultat obtenu montre que la configuration de la cavité verticale donne un meilleur transfert de chaleur et le nombre de Nusselt moyen varie comme une fonction décroissante du rapport d'aspect.

#### REFERENCES

- [1] H. Boughaba, '*Simulation numérique de la convection naturelle dans une enceinte à paroi verticale irrégulière*', Mémoire de Magister en Physique Energétique, Université Mentouri Constantine, Algérie, 2010.
- [2] G. De Vahl Davis and I.P. Jones, '*Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Comparison Exercise*', International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, N°3, pp. 227 - 248, 1983.
- [3] N. Laaroussi, G. Lauriat and X. Nicolas, '*Etude numérique des transferts de chaleur couplés dans une paroi alvéolaire*', 12<sup>èmes</sup> Journées Internationales de Thermique, Tanger, Maroc, Tome 1, pp. 251 - 254, 15-17 Novembre 2005.
- [4] H. Nawaf Saeid and Y. Yusli, '*Natural convection in a square cavity with spatial side-wall temperature variation*', Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 49, pp. 683 – 697, 2006.
- [5] B. Ould Said et N. Retiel, '*Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité pyramide*', 13<sup>èmes</sup> Journées Internationales de Thermique, Albi, France, 2007.
- [6] M. Guellal and H. Abdesselam, '*Alternating Direction Implicit Method for Free Convection Simulation in a Cylindrical Enclosure*', Contemporary Engineering Sciences, Vol. 1, N°2, pp. 51 – 62, 2008.
- [7] A. Mezrhab, L. El farh, H. Naji and D. Lemonnier, '*Computation of surface radiation and natural convection in a heated horticultural greenhouse*', Applied Energy, Vol. 87, pp. 894 – 900, 2010.
- [8] S. Bekraoui et M. Bakkas, '*Convection naturelle dans une cavité rectangulaire: effet de l'espacement et de la hauteur relatives des ailettes adiabatiques*', 13<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, 11 - 14 Avril 2017 (Meknès, Maroc).
- [9]
- [10] F. Ouahrhent et A.Soudani, '*Etude numérique de la convection thermique dans un milieu poreux*', Revue des Energies Renouvelables Vol. 21 N°4 (2018) 495 – 504.

- [11] B. Olivie, '*Etude de la convection naturelle dans une cavité carrée en 2D et 3D sous Fluent et Gambit*', Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, France.
- [12] D.C. Wan, B.S.V. Patnaik and G.W. Wei, '*A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convection*', Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 40, pp. 199 - 228, 2010.