

Evaluation du flux des Distributions de Pression Autour des Profils d'Aubes: Etude Comparative

A. Harhad**, O. Guerri* , K. Ameer* et L. Labraga***

*Centre de Développement des Energies Renouvelables
BP 62, 16340 Bouzaréah, Alger, Algérie

**Institut de Mécanique, Université des Sciences et Techniques de Blida
Route de Soumâa, B.P. 270, 09000, Blida, Algérie

*** Laboratoire de Mécanique et d'Energétique, Université de Valenciennes
59304 Valenciennes cedex, France

(Accepté le 15. 05.99)

Résumé — *On se propose de présenter les résultats d'une étude comparative de différentes méthodes de détermination des distributions de pression autour des profils d'aubes. Cette étude est effectuée d'une part, à l'aide de la théorie de l'écoulement potentiel et d'autre part, par la résolution des équations de Navier-Stokes. L'écoulement potentiel est déterminé par la méthode des transformations conformes, par la méthode des singularités ou par la méthode des différences finies. Pour cette dernière méthode, un maillage en \mathbf{O} est généré autour du profil. Pour chacune de ces méthodes, un programme de calcul a été développé. Les équations de Navier-Stokes sont résolues par la méthode des volumes finis, à l'aide du code PHOENICS, la turbulence étant représentée par le modèle $k-\varepsilon$.*

Cette étude est appliquée à différents types de profils d'aubes de rotors éoliens. Les coefficients de pression sont calculés pour différentes valeurs de l'angle d'attaque. Les comparaisons entre les résultats obtenus par les différentes méthodes montrent qu'il y a une bonne concordance avec les valeurs publiées.

Abstract — *The paper presents a comparative study of different methods to compute the surface pressure distribution over blades of arbitrary shape into two different procedures. The first approach consists in the application of the potential flow theory and the second approach by solving the full Navier Stokes equations. In the first way the inviscid flow is determined by three different methods: the method of conformal mapping of Theodorsen, the method of singularities and the method of finite differences. A computer program has been written and validated for each of these numerical techniques. In the second approach, the governing partial differential equations have been solved by adapting the computer code PHOENICS. The $k-\varepsilon$ model is utilized to describe turbulent flow.*

This study is applied to different type of wind turbines blade profiles. Pressure coefficients are calculated for different values of the angle of attack. Comparisons made between the numerical results obtained by these different methods show that there is a good correlation with the published values.

Mots-clés: Ecoulement autour des aubes - Transformations conformes - Méthode des singularités - Différences finies - Génération de maillage - Volume finis - Modèle de turbulence $k-\varepsilon$ - Code PHOENICS.

1. INTRODUCTION

La détermination des distributions de pressions autour des profils d'aubes permettra une meilleure compréhension des phénomènes régissant les écoulements autour des aubes ou des grilles d'aubes. Ainsi, les caractéristiques aérodynamiques des profils d'aubes seront évaluées. Cette étude servira donc à la conception, à l'évaluation des performances ainsi qu'à l'analyse du comportement dynamique des turbomachines en général, et des rotors éoliens en particulier.

Les méthodes généralement développées sont basées soit sur la théorie de l'écoulement potentiel combinée avec les effets de la couche limite, soit sur la résolution des équations complètes de Navier-Stokes. L'écoulement potentiel peut être simulé soit par la résolution de

l'équation de Laplace par une méthode analytique, semi-analytique ou numérique, soit par la résolution des équations d'Euler par une méthode numérique telle que la méthode des différences finies [1]. Pour la résolution des équations de Navier-Stokes qui gouvernent l'écoulement réel autour de profils d'aubes, différentes méthodes numériques ont été également appliquées: la méthode des éléments finis [2], la méthode des différences finies [3, 4] et la méthode des volumes finis [5 à 7].

Dans cette étude, nous nous sommes proposés d'évaluer les distributions de pressions autour de profils d'aubes suivant deux approches différentes:

- Dans la première approche, c'est la théorie de l'écoulement potentiel qui est appliquée. Le problème est étudié en appliquant trois méthodes basées sur la résolution de l'équation de Laplace: la méthode des transformations conformes développée par *Theodorsen* [8 à 11], la méthode des singularités qui consiste à transformer le contour de l'aube en segments de singularités [2] et [8 à 11] et la méthode des différences finies [2, 11]. Pour l'application de cette dernière méthode, un maillage en \mathbf{O} est généré autour du profil. Pour chacune de ces méthodes utilisées, un programme de calcul est développé.
- Dans la seconde approche, les équations complètes de Navier-Stokes sont résolues. Nous avons retenu la méthode des volumes finis, la turbulence étant représentée par le modèle $k-\varepsilon$. Les calculs sont effectués à l'aide du code *PHOENICS* (version 1.4).

L'application de ces différentes techniques pour la résolution des problèmes aérodynamiques est bien connue, toutefois une telle étude comparative nous a paru originale. Par ailleurs, à notre connaissance, le code *PHOENICS* n'a pas été vraiment utilisé pour la résolution d'un problème tel que celui qui est étudié.

Les différentes méthodes développées ainsi que les résultats obtenus sont présentés dans ce qui suit. Nous avons considéré les profils d'ailes isolées, placés dans un écoulement incompressible, dans le cas permanent et bi-dimensionnel.

2. METHODE DES TRANSFORMATIONS CONFORMES

Depuis son premier développement par *Theodorsen* en 1933 [9], cette méthode a été appliquée pour l'étude d'autres problèmes plus complexes tels que celui de l'écoulement dans un domaine contenant deux profils d'aubes. Les profils sont alors transformés en deux cylindres concentriques. Le domaine d'études est donc transformé en un anneau délimité par les profils cylindriques [14]. Dans le cas de l'étude de l'écoulement autour d'une aile isolée, c'est la méthode classique de *Theodorsen* qui est appliquée. Cette méthode consiste en premier lieu à transformer le profil d'aube en un cercle irrégulier par la transformation inverse de *Joukowski* et ensuite en un cercle régulier par une série de transformations de *Theodorsen*. L'écoulement potentiel autour du cercle exact étant connu, la répartition des vitesses et des pressions autour du profil sont déduites. Les principales étapes de cette transformation sont représentées sur la figure 1.

3. METHODE DES SINGULARITES

Dans la méthode des singularités, il est tenu compte de la nature linéaire de l'équation de Laplace qui régit les écoulements potentiels et qui permet donc de superposer différents écoulements élémentaires. Les différents développements de cette méthode se distinguent principalement par le type de singularités retenu (source, doublets, tourbillon ou combinaison de ces deux ou trois types) et par le mode de distribution de ces singularités (continue ou discrète) [2, 12, 15, 16]. Cette méthode a été appliquée pour l'étude des caractéristiques des

ailes fixes [2, 11, 12], des cascades [12] ou des ailes en mouvement avec sillage [13]. Par ailleurs, il ressort de l'étude de certains articles que, pour un même nombre de panneaux, le choix d'une distribution continue de singularités conduit à une meilleure validation du problème étudié.

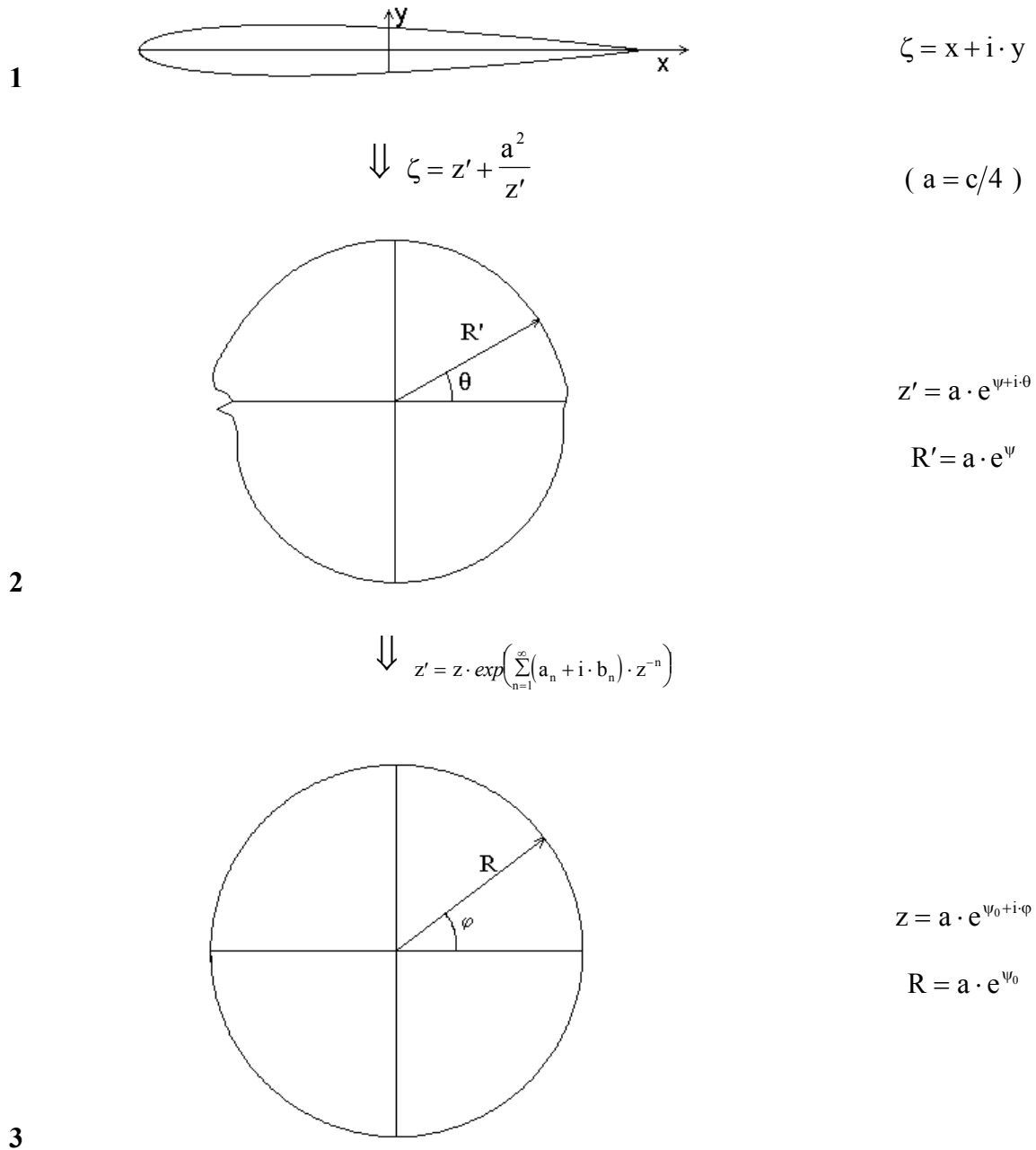


Fig.1. Transformation du profil d'aube en un pseudo-cercle puis en cercle exact

Dans ce qui suit, l'écoulement autour d'un profil d'aile isolée est donc représenté par la superposition d'un écoulement uniforme avec une distribution linéaire, par morceaux, de singularités sources-tourbillons sur le profil. La méthode consiste alors à déterminer les vitesses induites par ces singularités en chaque point du contour. Ces dernières sont déterminées par l'application de la condition de non adhérence à la paroi avec la condition de

Kutta au bord de fuite. L'équation du potentiel vitesse induit en chaque point du profil (x_k, y_k) est alors donnée par [11]:

$$\phi(x_k, y_k) = u_\infty \cdot x_k + v_\infty \cdot y_k - \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \int_0^{S_j} \gamma(s_j) \cdot \tan^{-1} \left(\frac{yc_k - yc_j}{xc_k - xc_j} \right) \cdot ds_j \quad (3.1)$$

Les densités de singularités sources-tourbillons sont déterminées par l'application de la condition de vitesse nulle à la paroi:

$$Q_k^n = \frac{\partial \phi_k}{\partial n_k} = \text{grad} \phi \cdot \bar{n}_k = 0 \quad (3.2)$$

et par l'application de la condition de Kutta au bord de fuite :

$$Q_1^t = \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} = -Q_{n+1}^t = -\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial t_{n+1}} \quad (3.3)$$

Ces deux conditions constituent un système d'équations linéaires qui sera résolu par la méthode de Gauss. Les composantes u et v du vecteur vitesse sont finalement déduites avec:

$$\begin{aligned} u(x_k, y_k) &= u_\infty \cdot \cos \alpha_0 + Q_k^t \cos \beta_k \\ v(x_k, y_k) &= v_\infty \cdot \sin \alpha_0 + Q_k^t \sin \beta_k \end{aligned} \quad (3.4)$$

4. METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Pour l'étude de l'écoulement potentiel par la méthode des différences finies, un maillage est généré autour du profil et l'équation de Laplace qui régit cet écoulement est discrétisée. Le système d'équations obtenu est résolu par méthode numérique itérative.

4.1. Génération de maillage

Parmi les méthodes de génération de maillage dont une synthèse peut être trouvée dans [17 à 19], nous pouvons citer les méthodes algébriques [20, 21] et les méthodes basées sur la résolution d'un système d'équations différentielles appliquées dans [7, 22 à 24]. Dans ce qui suit, nous avons retenu la résolution d'un système d'équations différentielles donné par les équations de Poisson [23]:

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi\eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi\eta) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec les conditions fixées par les limites du domaine d'études, $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$ étant des fonctions de contrôle du maillage. Ces relations sont ramenées au système d'équations elliptiques suivant:

$$\alpha \cdot x_{\xi\xi} - 2 \cdot \beta \cdot x_{\xi\eta} + \gamma \cdot x_{\eta\eta} = -J^2 \cdot (x_\xi \cdot P + x_\eta \cdot Q) \quad (4.2.a)$$

$$\alpha \cdot y_{\xi\xi} - 2 \cdot \beta \cdot y_{\xi\eta} + \gamma \cdot y_{\eta\eta} = -J^2 \cdot (y_\xi \cdot P + y_\eta \cdot Q) \quad (4.2.b)$$

où α , β et γ sont les coefficients métriques, \mathbf{J} est le Jacobien de la transformation dont les expressions sont données par:

$$\begin{cases} \alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{J} = x_{\xi} \cdot y_{\eta} - x_{\eta} \cdot y_{\xi} \quad (4.4)$$

avec les conditions limites suivantes:

- sur la surface du profil:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\xi, \eta_1) \\ f_2(\xi, \eta_1) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

f_1 et f_2 désignant la répartition des noeuds sur la surface du profil (voir section 6.Résultats)

- sur la surface externe du domaine d'études:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\xi, \eta_2) \\ g_2(\xi, \eta_2) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

g_1 et g_2 désignant la répartition des noeuds sur la frontière externe du domaines d'études. A ces conditions limites s'ajoute une condition de continuité à la frontière commune (domaine physique).

Dans ce qui suit, le maillage est généré est un maillage en \mathbf{O} , sans fonctions de contrôle . La discrétisation du système d'équations (4.2) est effectuée par différences centrées. Avec $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, nous obtenons les équations algébriques non-linéaires suivantes [11]:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} \cdot (x_{i-1,j} - 2 \cdot x_{i,j} + x_{i+1,j}) + 0.5\beta_{i,j} \cdot (x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1} - x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}) \\ + \gamma_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - 2 \cdot x_{i,j} + x_{i,j-1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} \cdot (y_{i-1,j} - 2 \cdot y_{i,j} + y_{i+1,j}) + 0.5\beta_{i,j} \cdot (y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1} - y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}) \\ + \gamma_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - 2 \cdot y_{i,j} + y_{i,j-1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

où $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ et $\gamma_{i,j}$ sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= 0.25 \left[(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2 \right] \\ \beta_{i,j} &= 0.25 \left[(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right] \\ \gamma_{i,j} &= 0.25 \left[(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec: $i = 2, N_x$
 $j = 2, N_y - 1$

La condition de continuité étant exprimée par [11]:

$$\begin{cases} f(1, J) = f(N_x, J) \\ f(2, J) = f(N_x + 1, J) \end{cases} \quad (4.10)$$

Ce système d'équations est résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel (méthode de sur-relaxation successive). Les conditions initiales sont déterminées par interpolation de *Lagrange* de premier ordre avec:

$$\begin{cases} x_{i,j}^0 = r_1 \cdot x_{i,1} + r_2 \cdot x_{i,N_y} \\ y_{i,j}^0 = r_1 \cdot y_{i,1} + r_2 \cdot y_{i,N_y} \end{cases} \quad (4.11)$$

où :

$$\begin{cases} r_1 = (N_y - J)/(N_y - 1) \\ r_2 = (J - 1)/(N_y - 1) \end{cases}$$

$(x_{i,1}, y_{i,1})$ et (x_{i,N_y}, y_{i,N_y}) sont les coordonnées du profil et de la surface externe du domaine d'études, respectivement

Pour les différents cas testés, cette méthode d'interpolation des conditions initiales s'est montrée suffisante pour assurer la convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

4.2. Méthode des différences finies

L'équation de Laplace décrivant l'écoulement potentiel, exprimée en fonction des coordonnées curvilignes est donnée par, dans le cas d'un maillage généré sans fonctions de contrôle [11]:

$$\alpha \cdot \Psi_{\xi\xi} - 2\beta \cdot \Psi_{\xi\eta} + \gamma \cdot \Psi_{\eta\eta} = 0 \quad (4.12)$$

avec les conditions aux limites:

- $\Psi(\xi, \eta_1) = \Psi_0$, sur la paroi du profil
- $\Psi(\xi, \eta_2) = y(\xi, \eta_2) \cdot \cos \alpha_0 - x(\xi, \eta_2) \cdot \sin \alpha_0$, sur la surface externe du domaine d'étude.

η_1 et η_2 correspondant à la valeur de l'ordonnée curviligne η du profil et de la surface externe du domaine d'étude, respectivement. Comme précédemment, la discrétisation de l'équation à résoudre se fera par différences centrées. Le système d'équations obtenu sera résolu par la méthode itérative de Gauss-Seidel. Le critère d'arrêt des itérations sera la condition de Kutta au bord de fuite [11]. La détermination de la fonction de courant ψ nous permettra de déterminer les composantes du vecteur vitesse dont les expressions dans le plan transformé sont données par [23]:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{x_\xi \Psi_\eta}{J} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{y_\xi \Psi_\eta}{J} \end{cases} \quad (4.13)$$

$\Psi_\xi \equiv 0$, à la surface du profil.

D'où l'expression du coefficient de pression :

$$C_p = 1 - \left(\frac{u^2 + v^2}{u_\infty^2} \right) = 1 - \frac{\gamma}{J^2} \cdot \Psi_\eta^2 \quad (4.14)$$

5. METHODE DES VOLUMES FINIS

La résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis a été largement appliquée et les codes de calcul généralement développés se distinguent principalement par le type de maillage généré, par le mode de discrétisation appliqué, par l'algorithme de résolution retenu, ... [24], par le choix des vitesses calculées (composantes cartésiennes ou curvilignes) ou par le choix de variables centrées ou décalées (staggered & non staggered grid) [25, 26]. Les codes développés se distinguent également par le choix du modèle retenu pour représenter la turbulence. Ainsi, nous pouvons citer le modèle algébrique de Baldwin Lomax [27], le modèle k-ε [7], le modèle des équations de transport aux tensions de Reynolds [5] ou le modèle k-ω de Wilcox [28].

Dans ce qui suit, le code PHOENICS, dont une description peut être trouvée dans les références [29 à 31], est donc appliqué. Le schéma de discrétisation utilisé est le schéma hybride. L'algorithme SIMPLEST est appliqué pour la résolution du problème de couplage vitesse-pression. Dans le cas d'un écoulement monophasique et permanent, l'équation générale résolue par PHOENICS est de la forme [29]:

$$\text{div}(\rho \cdot \vec{V} \cdot \varphi - \Gamma_{\varphi} \cdot \text{grad } \varphi) = S_{\varphi} \quad (5.1)$$

Lorsque les équations résolues sont les équations de Navier Stokes et que la turbulence est représentée par le modèle k-ε nous avons [29, 30]:

- pour l'équation de continuité:

$$\varphi = 1 \quad (5.2)$$

- pour les équations de quantité de mouvement:

- suivant l'axe horizontal:

$$\varphi = u \quad (5.3.a)$$

$$\Gamma_U = \mu_l + \mu_t \quad (5.3.b)$$

$$S_U = -\partial P / \partial x \quad (5.3.c)$$

- suivant l'axe vertical:

$$\varphi = v \quad (5.4.a)$$

$$\Gamma_V = \mu_l + \mu_t \quad (5.4.b)$$

$$S_V = -\partial P / \partial y \quad (5.4.c)$$

- pour l'équation relative à l'énergie cinétique de turbulence (k) :

$$\varphi = k \quad (5.5.a)$$

$$\Gamma_k = \mu_l + \mu_t / \sigma_k \quad (5.5.b)$$

$$S_k = \mu_t \cdot G - \rho \cdot \varepsilon \quad (5.5.c)$$

- pour l'équation relative au taux de dissipation de la turbulence (ε) :

$$\varphi = \varepsilon \quad (5.6.a)$$

$$\Gamma_{\varepsilon} = \mu_l + \mu_t / \sigma_{\varepsilon} \quad (5.6.b)$$

$$S_{\varepsilon} = (C_1 \cdot \mu_t \cdot G - C_2 \cdot \rho \cdot \varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{k} \quad (5.6.c)$$

G représente le taux de production de l'énergie cinétique turbulente dont l'expression, en notation tensorielle, est donnée par (dans un système de coordonnées cartésiennes):

$$G = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (5.7)$$

μ_T , le coefficient de viscosité dynamique turbulente est donné par :

$$\mu_T = \rho \cdot C_\mu \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.8)$$

les valeurs des constantes étant

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 1.44 \\ C_2 = 1.92 \\ \sigma_k = 1.0 \\ \sigma_\varepsilon = 1.3 \\ C_\mu = 0.09 \end{array} \right.$$

Vu la nature elliptique des équations, les conditions aux limites sont nécessaires sur toutes les frontières du domaine de calcul. Les conditions appliquées dans notre cas sont:

- à l'amont: $u = u_\infty$, (5.9.a)
 $v = 0$, (5.9.b)
 $\dot{m}/\text{par unité de surface} = \rho \cdot u_\infty$, (5.9.c)
 (double condition permise dans PHOENICS pour la continuité du débit à la sortie)
 k_∞ et ε_∞ connues à partir des valeurs expérimentales (taux de turbulence de l'écoulement externe de 1%, nombre de Reynolds turbulent, ...)
- sur la surface du profil: $u = 0$, (5.9.d)
 $v = 0$, (5.9.e)

Au voisinage de la paroi, le modèle k - ε n'est plus valable car les effets de viscosité peuvent dominer ceux de la turbulence. Alors dans PHOENICS, il suffit d'introduire la condition $\partial k / \partial n = 0$ (gradient normal) pour faire activer les lois de paroi qui sont valables dans cette zone.

- à l'aval :Le gradient de toutes les propriétés transportables (φ) est nul (sortie assez éloignée)
- sur les frontières externes, nord et sud, du domaine d'études: aucune valeur n'est fixée. Les flux (de convection et diffusion) normaux à ces surfaces sont nuls (valeurs prises par défaut dans PHOENICS).

Les conditions initiales appliquées sont celles de l'écoulement externe.

Pour la génération du maillage autour du profil nous avons choisi un domaine en **H**. Les coordonnées du domaine d'études ainsi que celles du profil sont d'abord introduites. Le domaine d'études est ensuite subdivisé en 6 régions et dans chacune de ces régions une interpolation bi-linéaire est effectuée.

6. RESULTATS OBTENUS

Cette étude est appliquée à différents types de profils utilisés dans la construction des rotors éoliens et dont le choix a été dicté par les références disponibles: un profil type NACA

0012 placé sous un angle d'incidence nul, un profil NACA 0015 placé sous les angles d'attaque de 10° et 12° et un profil type NACA 4412 placé sous un angle d'attaque de 13.87° . Pour tous les cas étudiés, nous avons adopté une distribution de nœuds non uniforme et concentrée dans les zones à fort gradient de pression (i.e. bord d'attaque et bord de fuite), distribution donnée par l'expression:

$$x = 0.5 (1 - \cos \theta),$$

avec θ variant de zéro à π . L'influence du nombre de nœuds, du nombre d'itérations et du champ initial a été étudiée afin de s'assurer de la convergence de la solution. Le maillage retenu pour chacune des méthodes utilisées ainsi que le temps d'exécution sont indiqués dans le tableau 1. Tous les calculs sont effectués sur un PC avec co-processeur *Pentium*, Ram 16 Mo, 120 MHz.

Tableau 1 : Temps d'exécution et nombre de noeuds optimum

| Méthode de calcul | Nombre de noeuds | Temps d'exécution (sec) |
|--|------------------|-------------------------|
| 1. Transformations conformes | 360 | 9 |
| 2. Méthode des singularités | 120 | 1.4 |
| 3. Méthode des différences finies (y compris génération de maillage) | 45 x 40 | # 25 |
| 4. Code Phoenics | 60 x 82 | 90 |

6.1. NACA 0012 - $\alpha = 0^\circ$

Les résultats obtenus par les différentes méthodes sont représentés sur les figures 2, 3, 5 et 7 pour un profil NACA 0012 placé sous un angle d'incidence nul. Ces résultats sont en concordance avec les valeurs publiées en [8], valeurs obtenues par la méthode de *Theodorsen* ainsi qu'avec les valeurs expérimentales publiées en [7], valeurs obtenues pour un nombre de Reynolds de $2.8 \cdot 10^6$. Il est à noter que la méthode des singularités nécessite une distribution de points 3 fois moins importante que la méthode des transformations conformes. Si les équations sont résolues par la méthode de Gauss, le temps de calcul est alors de l'ordre de 1 seconde. Toutefois, si le nombre de nœuds augmente, le temps de calcul devient plus important. Ainsi, pour une distribution de 360 points autour du profil, la durée d'exécution est de 28 secondes environ alors que pour la méthode des transformations conformes elle est de 9 secondes.

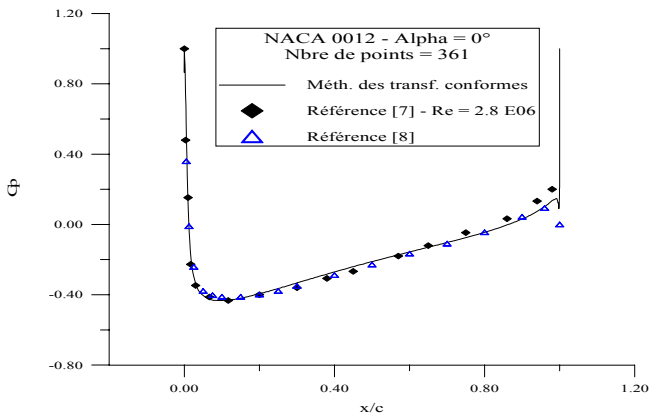


Fig.2 Distribution de pression autour d'un profil d'aube type NACA 0012, placé sous une incidence nulle, calculé par la méthode des transformations conformes

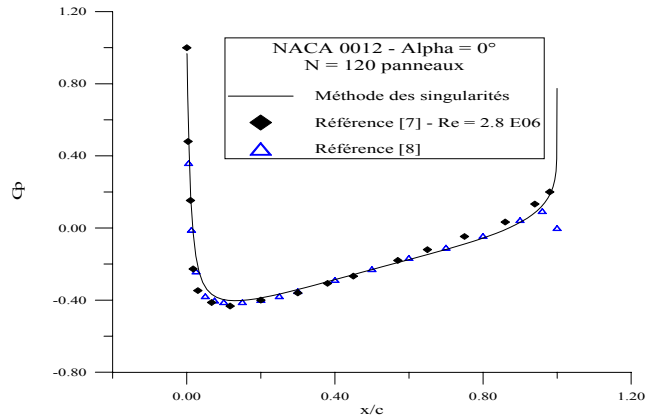


Fig. 3. Distribution de pression autour d'un profil d'aube type NACA 0012, placé sous une incidence nulle, calculé par la méthode des singularités

Pour l'application de la méthode des différences finies, le domaine d'études est un domaine en \mathbf{O} dans lequel est placé le profil (figure 4) et le maillage est généré sans fonctions de contrôle. Pour les écoulements potentiels, les effets de la viscosité n'étant pas pris en considération, les maillages ainsi obtenus peuvent être utilisés tels que. Lorsque les équations à résoudre sont les équations de Navier-Stokes ou celles de la couche limite, les maillages doivent être plus fins au voisinage de la paroi du profil. L'utilisation de fonctions de contrôle est alors recommandée afin de resserrer les lignes dans ces zones.

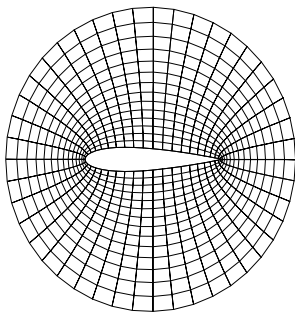


Fig.4 Maillage en \mathbf{O} généré autour d'un profil d'aube type NACA 0012 pour le calcul des distributions de pression par la méthode des différences finies

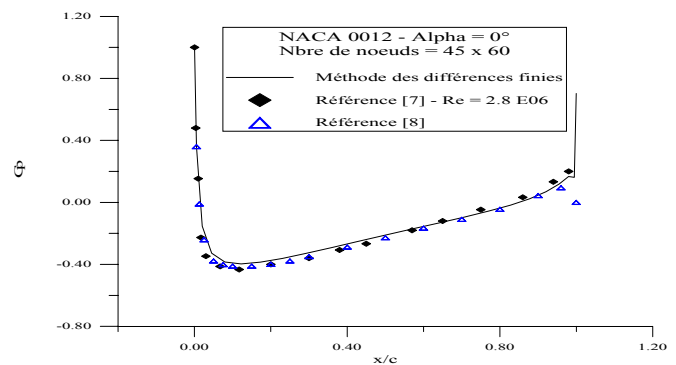


Fig.5 Distribution de pression autour d'un profil d'aube type NACA 0012, placé sous une incidence nulle, calculé par la méthode des différences finies

Pour les calculs effectués à l'aide du code PHOENICS, un maillage en H de 82 x 60 noeuds a été retenu, les dimensions externes du domaine d'études variant de $-1.0*c$ à $3.0*c$ suivant l'axe horizontal et de $-1.0*c$ à $1.0*c$ suivant l'axe vertical, le bord d'attaque du profil étant situé au point de coordonnées $(0., 0.)$ (figure 6). Le code a été appliqué dans un premier cas en supposant que l'écoulement est potentiel (en introduisant un coefficient de viscosité nul) puis dans un second cas pour un écoulement réel. Les courbes de l'écoulement réel sont pratiquement confondues avec celles de l'écoulement potentiel. Ce résultat est prévisible: la théorie de l'écoulement potentiel est applicable aux profils minces placés sous une faible valeur de l'angle d'incidence.

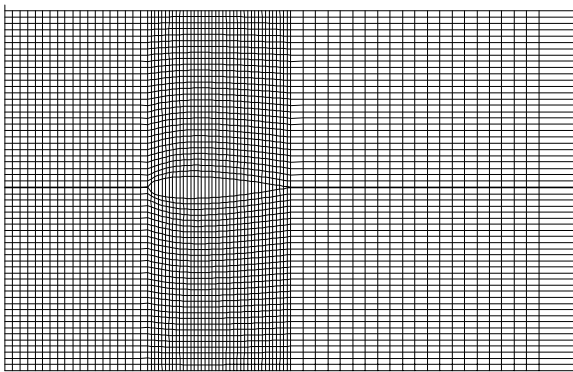


Fig.6. Maillage en **H** généré autour d'un profil d'aube type NACA 0012 à l'aide du code PHOENICS

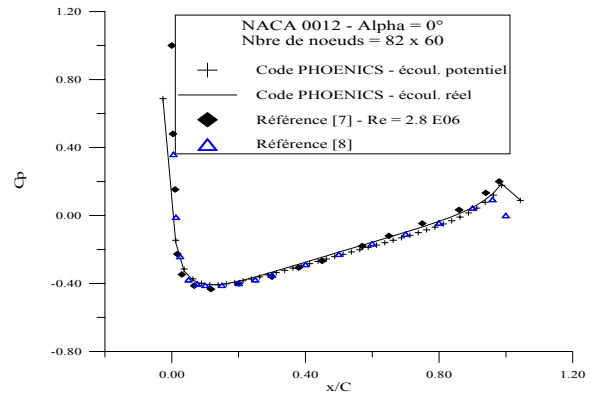


Figure 7. Distribution de pression autour d'un profil NACA 0012 placé sous un angle d'attaque de 0° , calculée à l'aide du code PHOENICS

6.2. NACA 0015 - $\alpha = 10^\circ$ et $\alpha = 12^\circ$

Les distributions de pression autour d'un profil symétrique type NACA 0015 placé sous un angle d'attaque de 10° et 12° , le nombre de Reynolds étant égal à $2.0 \cdot 10^5$, sont représentées, comparées aux valeurs expérimentales publiées dans [32], sur les figures 8 et 9 respectivement. Le maillage en **H** généré à l'aide du code PHOENICS est analogue à celui du cas précédent. Les figures 8 et 9 montrent que plus l'angle d'incidence augmente, plus les effets de la viscosité sont apparents. Les résultats obtenus à l'aide du code PHOENICS sont alors plus appropriés.

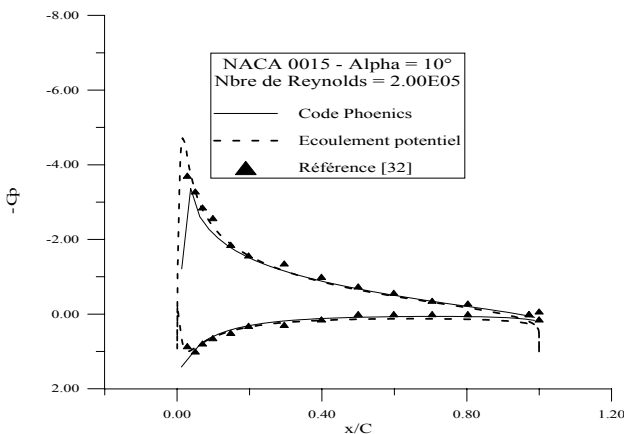


Fig.8. Distribution de pression autour d'un profil d'aile type NACA 0015, placé sous un angle d'attaque de 10°

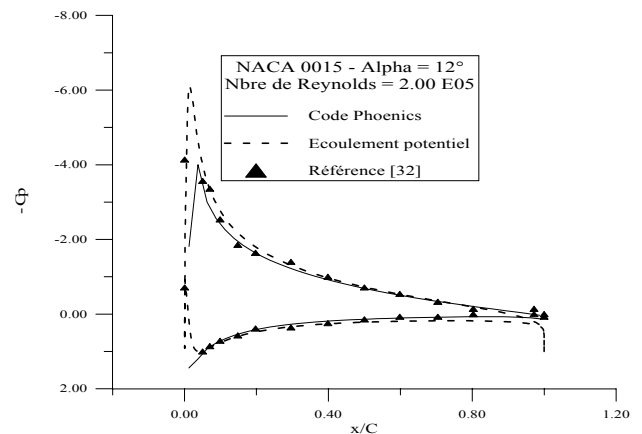


Fig.9. Distribution de pression autour d'un profil d'aile type NACA 0015, placé sous un angle d'attaque de 12°

6.3. NACA 4412 - $\alpha = 13.87^\circ$

Pour le dernier cas considéré, un profil d'aube type NACA 4412 placé sous un angle d'attaque de 13.87° , le maillage retenu est composé de 60×30 noeuds, les dimensions externes du domaine d'études variant de $-1.0 \cdot c$ à $2.5 \cdot c$ suivant l'axe horizontal et de $-1.5 \cdot c$ à $2.0 \cdot c$ suivant l'axe vertical (figure 10). Les résultats obtenus pour un nombre de Reynolds égal à $1.5 \cdot 10^6$ sont comparés aux valeurs expérimentales publiées en [7] (figure 11).

Une bonne concordance des résultats est observée, notamment en dehors des régions du bord d'attaque et du bord de fuite. Toutefois, étant limités par la version du code PHOENICS disponible (version 1.4 E.O.), nous n'avons pas pu utilisé d'autres modèles pour représenter la turbulence tels que le modèle $k-\omega$ de Wilcox recommandé par certains auteurs [4].

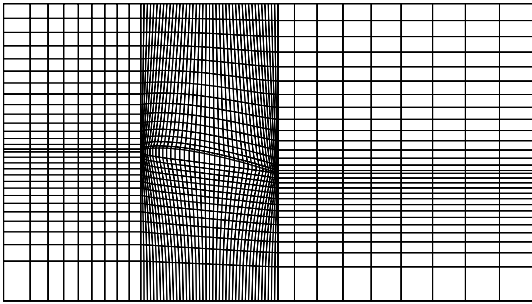


Fig.10. Maillage en H généré avec PHOENICS autour d'un profil d'aile type NACA 4412, placé sous un angle d'attaque de 13.87°

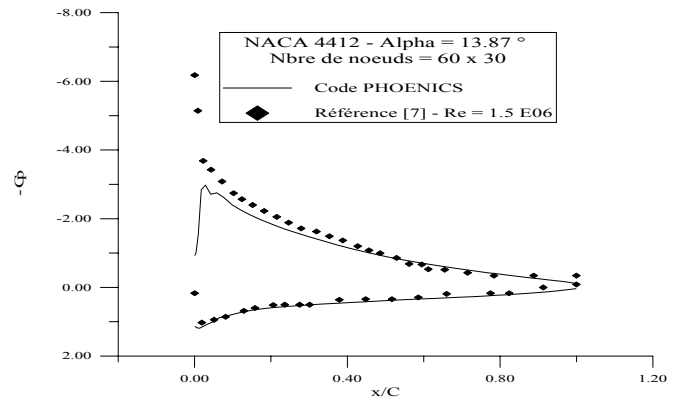


Fig.11. Distribution de pression autour d'un profil NACA 4412, placé sous un angle d'attaque de 13.87° , calculée à l'aide du code PHOENICS

7. CONCLUSION

Les différentes méthodes développées pour l'application de la théorie de l'écoulement potentiel donnent pratiquement les mêmes résultats. Si une méthode doit être recommandée, ce sera la méthode des singularités, cette méthode étant la plus rapide, de plus elle peut être étendue au cas tri-dimensionnel ainsi qu'à l'étude des ailes en mouvement avec sillage. Bien que limitée au cas bi-dimensionnel, la méthode des transformations conformes est intéressante si l'on doit augmenter le nombre de nœuds vu que le temps de calcul est faible (de l'ordre de 9 secondes pour 361 points). Elle peut être réservée aux profils longs pour lesquels les effets d'extrémités peuvent être négligés. Comme il est prévisible, la méthode des différences finies est la moins rapide. Toutefois, la théorie des écoulements potentiels étant limitée aux profils minces placés dans un écoulement uniforme à faible incidence, les résultats obtenus par cette méthode peuvent être utilisés comme conditions initiales si l'on veut étudier l'écoulement réel autour du profil d'aube dans les autres cas (aux grandes valeurs de l'angle d'incidence).

Quant à la précision des résultats, plus l'angle d'incidence est important, plus les effets de la viscosité sont apparents. En effet, pour de faibles valeurs de l'angle d'attaque, les résultats obtenus par la théorie de l'écoulement potentiel sont presque identiques à ceux de l'écoulement réel. Par contre, lorsque l'angle d'incidence augmente, les résultats obtenus à l'aide du code PHOENICS sont plus appropriés, notamment lorsque l'écoulement est laminaire.

NOMENCLATURE

1. Méthode des transformations conformes

| | |
|------------|--|
| a | Constante utilisée dans la transformation de Joukowski |
| a_n, b_n | Coefficients de la transformation de Theodorsen |
| z | Coordonnée complexe dans le plan du cercle exact |
| z' | Coordonnée complexe dans le plan du pseudo cercle |
| ψ | $R' = a \cdot e^{\psi}$, rayon du pseudo cercle |

| | |
|-----------|--|
| ψ_0 | Valeur moyenne de ψ ($R = a \cdot e^{\psi_0}$, rayon du cercle exact) |
| ζ | Coordonnée complexe, dans le plan du profil |
| φ | Coordonnée angulaire de z |
| θ | Coordonnée angulaire de z' |

2. Méthode des singularités

| | |
|--------------------|---|
| n | Vecteur unitaire normal à la surface du profil |
| Q_k^n et Q_k^t | Composantes normales et tangentielles du vecteur vitesse |
| s_j | Segment (ou panneau) |
| t | Vecteur unitaire tangentiel à la surface du profil |
| x_k, y_k | Coordonnées d'un point du profil |
| x_{c_j}, y_{c_j} | Coordonnées d'un point du segment s_j |
| β_k | Angle formé par la tangente en un point du profil avec l'axe horizontal |
| $\gamma(s_j)$ | Densité de singularité linéaire |
| ϕ | Potentiel vitesse |

3. Génération de maillage et méthode des différences finies

| | |
|-------------------------|---|
| J | Jacobien de la transformation |
| N_x, N_y | Nombre de points suivant les directions (x) et (y) respectivement |
| P, Q | Fonctions de contrôle |
| x, y | Coordonnées cartésiennes |
| α, β, γ | Coefficients métriques de transformation |
| Ψ | Fonction de courant |
| ξ, η | Coordonnées curvilignes |
| C_p | Coefficient de pression |

4. Méthode des volumes finis

| | |
|------------------|---|
| k | Energie cinétique turbulente |
| \dot{m} | Débit massique |
| \vec{V} | Vecteur vitesse |
| S_φ | Terme source relatif à la variable φ |
| ε | Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente |
| ρ | Densité |
| φ | Variable dépendante par unité de masse (quantité de mouvement par unité de masse, énergie cinétique turbulente par unité de masse, ...) |
| Γ_φ | Coefficient de diffusion |
| μ | Coefficient de viscosité dynamique |
| l et t | Indices référant les grandeurs laminaire et turbulente respectivement |

5. Variables communes

| | |
|----------------------|---|
| C | Corde du profil |
| u, v | Composantes du vecteur vitesse |
| u_∞, v_∞ | composantes du vecteur vitesse de l'écoulement non perturbé |
| α_0 | angle d'attaque |

REFERENCES

[1] E.L.HOUGHTON, "*Further aerodynamics for engineering students*", Edward Arnold

publishers, London

- [2] C.A.J.FLETCHER, "*Computational techniques for fluids dynamics*", Vol. 1 & 2, Springer-Verlag, Second edition, 1991.
- [3] S.L.YANG, Y.L.CHANG and O.ARICI, "*Incompressible Navier-Stokes Computation of the NREL Airfoils using a symmetric total variational diminishing scheme*", Trans. ASME, J. Solar Energy Engineering, vol. 116, nov. 94, pp. 174-182
- [4] S.L.YANG, Y.L.CHANG and O.ARICI, "*Navier-Stokes Computation of the NREL Airfoils using a $k-\omega$ turbulent model at high angles of attack*", Trans. ASME, J. Solar Energy Engineering, vol. 117, nov. 95, pp. 304-310
- [5] L.DAVIDSON, "*Prediction of the Flow Around an Airfoil Using a Reynolds Stress Transport Model*", Trans. ASME J. Fluid Eng., march 1995, vol. 117, pp. 50 - 57
- [6] S.W.KIM, K.B.M.Q.ZAMAN and J.PANDA, "*Numerical Investigation of Unsteady Transitional Flow Over Oscillating Airfoil*", Trans. ASME, J. Fluids Eng., Vol. 117, march 1997, pp. 10 - 16
- [7] C.RHIE and W.L.CHOW, "*Numerical study of turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation*", AIAA journal, Vol.21, N° 11, pp. 1525-1532, 1983
- [8] I.H.ABBOT and A.E. VON DOENHOFF, "*Theory of wing sections*", Dover publications, New York, 1959.
- [9] T.THEODORSEN, "*Theory of wing sections of arbitrary shape*", NACA report N°411, (1933)
- [10] M.HARHAD and O.GUERRI, "*Evaluation des caractéristiques aérodynamiques des profils d'aubes par la méthode des transformations conformes*", COMHYD'95, premier colloque maghrébin sur l'hydraulique, 16 & 17 mai 1995, Sidi Fredj (Algérie).
- [11] AMEUR K., "*Etude numérique d'un écoulement visqueux incompressible autour de profils d'ailes*", Mémoire de Magister, UST de Blida (Algérie), 1997
- [12] J.L.HESS and A.M.O.SMITH, "*Calculation of potential flow about arbitrary bodies*", Douglas aircraft, California
- [13] S.LAIN, J.A.GARCIA and R.ALIOD, "*Development of a lifting surface-2D panel method to compute the three-dimensionnal pressure distribution over the blade of a horizontal-axis wind turbine*", Wind Engineering, Vol. 19, N°1, pp.21-40
- [14] D.C.IVES, "*A modern look at conformal mapping, including doubly connected regions*", A.I.A.A. Journal, Vol. 14 (1974)
- [15] J.L.HESS, "*Review of Integral-Equation Techniques for Solving Potential-Flow Problems with Emphasis on the Surface Method*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 5, 1975, pp. 145 - 196
- [16] T.SARPKAYA, "*Computational Methods With Vortices - The 1988 Freeman Scholar Lecture*", Trans. ASME J. Fluid Eng., march 1989, vol. 111, pp. 5 - 52
- [17] J.F.THOMPSON, "*A survey of grid generation techniques in computational fluid dynamics*", AIAA paper N° 83-0447, 1983
- [18] J.F.THOMPSON, Z.U.A.WARSI and C.W.MASTIN, "*Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations - A review*", Journal of Computational Physics, Vol. 47 (1982)
- [19] J.F.THOMPSON, Z.U.A.WARSI and C.W.MASTIN, "*Numerical Grid Generation - Foundations and Applications*", Copyright 1997, Joe F. Thompson
- [20] J.P.MARUSZEWSKI and R.S.AMANO, "*Grid generation and its application to separated flows*", Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 21, pp. 183-197, 1992
- [21] E. STEINTHORSSON, T.I-P. SHIH and R.J. ROELKE, "*Enhancing control of Grid Distribution in Algebraic Grid Generation*", Int. J. Num. Meth. In Fluids, Vol.15, (1992), pp. 297 - 311

- [22] J.F.THOMPSON, Z.U.A. WARSI and C.W. MASTIN, "*Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies*", Mississippi State Univ., Mississippi State Dept. of Aerophysics and Aerospace Eng., NASA CR-2729, 1977
- [23] F.C.THAMES, J.F.THOMPSON, C.W. MASTIN and R.L. WALKER, "*Numerical solution for viscous and potential flow about arbitrary two-dimensional bodies using body-fitted coordinates*", J. Comp. Phys., vol. 24, pp. 245-273, 1977
- [24] W.RODI, S.MAJUMBAR and B.SCHÖNUNG, "*Finite volume methods for two-dimensional incompressible flows with complex boundaries*", Comp. Meth. in Applied Mech. And Eng., Vol. 75, pp. 369-392, 1989.
- [25] M.C.MELAAEN, "*Calculation of fluid flows with staggered and nonstaggered curvilinear nonorthogonal grids - The theory*", Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 21, pp. 1-19, 1992
- [26] M.C.MELAAEN, "*Calculation of fluid flows with staggered and nonstaggered curvilinear nonorthogonal grids - A comparison*", Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 21, pp. 21-39, 1992
- [27] A.ARNONE and R.C.SWANSON, "*A Navier-Stokes solver for turbomachinery applications*", Trans. Of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 115, pp. 305-313, April 1993
- [28] M.ZIJLEMA, "*Computational Modeling of Turbulent Flow in General Domain*", PhD thesis, Department of Technical Mathematics and Informatics, Technische Universiteit Delft, 1996
- [29] H.I.ROSTEN and D.Brian SPALDING, "*The PHOENICS Beginner's Guide*", CHAM TR/100, 1987
- [30] H.I.ROSTEN and D.Brian SPALDING, "*The PHOENICS Reference manual*", CHAM TR/200, 1987
- [31] D.B. SPALDING, "*A general purpose computer program for multi-dimensional one- and two-phase flow*", Mathematics and Computers in Simulation, Vol. XXIII, pp. 267-276, North Holland, Amsterdam, 1981
- [32] J. COUSTEIX, "*Couche limite laminaire*", Cepadus-Edition, 1989