Linguistique et mathématiques

Mostefa Harkat (Alger)

1. Les rapports de la langue et des objets mathématiques ne datent pas d'aujourd'hui. Dès que les hommes furent contraints de compter et de mesurer, on vit se côtoyer des activités de communication semblables et différentes. Compter et ordonner ne pouvaient que s'intégrer dans l'activité langagière des êtres humains. Le champ lexical du nombre est restreint. Il est une petite partie des significations dont se saisit le langage. Le nombre est nommé, il a une forme sonore. Il s'intègre dans la syntaxe en prenant généralement la position de déterminant : Un homme, deux hommes, Les deux hommes. Il est aussi une marque : singulier, duel, pluriel.

Puis le nombre devient abstrait. Un, deux, trois deviennent des objets, des noms. Il en est de même des nombres ordinaux : Le premier, le second, le troisième.

2. Cette abstraction prend son sens lorsque le nombre est confronté à l'écriture. Ce qui est également le cas de la langue. Les paroles sont gravées sur un support. Ils durent et voyagent. Exigence de nouvelles formes de communication. Les souverains de pays lointains s'écrivent, font des traités. Les khalifes transmettent des ordres par écrits aux généraux. Les échanges commerciaux exigent aussi l'écriture des quantités. On pèse, mesure, compte et note.

3. Après les notations archaïques des nombres, à l'aide de barres ou d'entailles dans du bois, le nombre connait la symbolisation. D'abord à l'aide du système additionnel des Romains, puis du système positionnel des Arabes. Lequel constitue une véritable révolution car outre qu'il simplifie la représentation, il est une théorie du nombre se trouve et la base de l'algorithmique servant aux opérations fondamentales : additions, multiplication, soustraction, division.

L'écriture de la langue va être également une théorie de la langue. La notion de phonème y est présente. Une seule lettre représente toutes les réalisations sonores qu'elles soient individuelles ou régionale et lorsque deux sons n'apparaissent pas dans un même contexte un symbole unique les représente. Voir le ra arabe tantôt muraqqaq, tantôt mufakham / emphatique.

De plus, au niveau des unités signifiantes, les mots sont indiqués par une mise entre deux blancs et parfois en arabe par des réalisations différentes d'un graphème : voir l'écriture du 3aïn selon sa place dans le mot.

Des indications sur la syntaxe peuvent être également fournis par l'écriture voir le TA' maftuhat ou marbuta, la permanence de l'article AL même s'il n'a qu'une présence partielle dans la prononciation.

Langues et nombres à l'épreuve de l'écriture s'enrichissent, deviennent abstraction, théorie.

Mais langue et nombre vont connaitre le plan. C'est dans le plan qu'on écrit. Qu'on dessine. La géométrie va s'épanouir au contact de la feuille. Elle s'invente des objets. Des objets abstraits idéalisés. Points, droites, cercles, triangles, quadrilatères, pentagones, octogones. Qui ne sont dans la réalité que des attributs, des adjectifs de véritables objets. Un livre en forme de rectangle, une table ronde, une femme rondelette, une route droite.

La langue elle, reste à une dimension, dans la page l'écriture s'invente un sens et des lignes. Le texte, s'il va au-delà de la phrase, reste linéaire. Il ne pouvait en être autrement.

Mais la géométrie elle aussi va se linéariser. Ne dit-on pas que la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. Ce qui se passe dans le plan est lentement occupé par les nombres, car en géométrie on mesure. Puis le raisonnement prend le pas sur les déductions faites d'après la figure. Cette dernière n'atteste plus la validité des propositions. Elle est simplement un appui, une visualisation. Et bientôt un ornement.

4. Car un certain Euclide est là. Il crée une théorie. Les propositions qu'on peut établir se font par déduction à partir d'un certain nombre de postulats ou axiomes. Parmi ces postulats, le plus célèbre est certainement celui des droites parallèles. Par un point donné on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée est l'une des formulations de ce postulat. Beaucoup crurent le démontrer mais les propositions utilisées ne furent en vérité que des formulations synonymes du fameux postulat.

Vinrent alors Lobatchevsky et Riemann qui remplacèrent le postulat par deux autres postulats absolument différents :

Il existe une infinité de droites parallèles à une droite donnée et passant par un point pour l'un.

Il n'en existe aucune ^pour l'autre.

Cela conduit à la création d'autres géométries qu'on ne peut pas aisément représenter.

L'icône qu'est la figure va donc laisser place aux chaines de déductions qui elles, se déroulent dans le temps et sont linéaires. Elles s'écrivent en faisant appel au langage naturel et à des symboles spécifiques.

La langue dans le monde arabe va connaître son Euclide. Il s'appelle : Al Khalil Ibn Ahmad. Celui-ci va révolutionner l'écriture, définir le système phonologique de l'arabe, déterminer la classification des mots dans le lexique, codifier la morphologie, la syntaxe, la métrique. Et se servie allégrement des permutations. Déjà un embryon de probabilités.

Mais alors que les mathématiciens de tous bords et de toute nationalité, manipulant un langage universel par excellence, inventent théorie sur théorie, se dotent de moyens de démonstrations puissants, généralisent les concepts, redéfinissent les éléments premiers comme la notion de nombre, formalisent d'avantage, les théories de la langue piétinent et n'aboutissent qu'à des résultats très maigres.

Les raisons de cette différence des avancées des deux domaines est dû au fait que la langue est un objet d'une extrême complexité et cette complexité provient du rapport forme et sens très difficile à formaliser et du type de communication établie entre les acteurs de l'acte de parole et qui font intervenir des domaines des sciences humaines fort différents et parfois d'intérêts différents. Qu'on songe un peu aux ordinateurs d'aujourd'hui capables d'accomplir des prouesses inimaginables dans les domaines du calcul mais souvent incapables de différentier un nom d'un verbe. Lorsque j'écris la phrase : 'Je les porte' mon correcteur orthogram phique me conseils de mettre un s à porte.

Les mathématiques se soucient du monde de la déduction alors que la langue se charge d'exprimer les pensées, les sensations, les sentiments en face du monde dans sa complexité et de transmettre tout cela à quelqu'un d'autre qui peut-être nous-même.

D'un autre côté, nous vivons constamment avec la langue mais plus rarement avec les mathématiques, bien qu'en vérité la logique qui sous-tend celle-ci, déduction, négation, équivalence, est constamment présentes dans notre pensée et nos discours.

5. L'universalisation du langage des mathématiques est très ancienne. Qu'on songe à l'intérêt des arabes pour la mathématique grecque. Même s'ils parlent une langue différente de la langue hellénique, et utilisent un autre alphabet, au fond ils manipulent le même langage. Comme eux ils démontrent le théorème de Pythagore et comme eux ils s'intéressent au postulat des parallèles d'Euclide et lui donnent une autre formulation. Et il n'est pas étonnant que l'Occident ai découvert la science grecque par l'intermédiaire des Arabes, car la langue naturelle est ici non pertinente. Cela, d'un autre point de vue, signifie que la traduction d'un texte mathématique est nécessairement biunivoque contrairement à celle d'un texte littéraire qui peut admettre des dizaines de traductions parfois aussi inacceptables l'une que l'autre.

En face de l'universalisation du langage mathématique, l'universalisation de la théorie linguistique est assez récente. Ce n'est que récemment qu'on découvert que les langues fonctionnaient de la même manière. Elles sont toutes des systèmes de communication, basées sur l'association arbitraire du signifiant et du signifié, utilisant la double articulation. Elles possèdent toutes des phonèmes, des morphèmes et basent la phrase sur l'association du sujet et du prédicat.

Cette universalisation du discours linguistique va s'accompagner d'une plus grande rigueur, les Sciences du Langage tentent de mériter le label Science par tous les moyens et la formalisation devient souvent un but et prend le pas sur la simple description ou sur les procédés de classification.

6. Où se situent alors les différences entre Linguistique et Mathématique ?

Ces différences sont souvent nombreuses. On pense souvent à la difficile axiomatisation de certains domaines de la linguistique. Cette axiomatisation doit passer par la détermination des objets de la linguistique.

Je dis détermination et non définition car les mathématiciens ont par exemple manipulés les nombres sans les définir, cela ne les a pas empêché de travailler.

En linguistique définition et détermination sont souvent entachés d'ambiguïté. N'a-t-on pas dit qu'il y a autant de linguistiques que de linguistes ? Prenons pour illustrer notre propos deux termes célèbres de la linguistique : Système et structure.

Proposition 0 : La langue est un système.

Si la langue est un objet premier il n'est pas nécessaire de le définir. Autrement, il faut définir le mot système.

Si nous cherchons les domaines où ce mot est utilisé nous allons trouver ceci : Système politique, économique, système de mesure, système de numération, système d'équations. Et dans chacun de ces domaines le mot a des acceptions diverses, parfois précises mais souvent vagues.

Le mot système est donc un de ces mots qui ne veulent pas dire grand-chose. Voyons ce qu'en disent les linguistes.

Proposition 1 : La notion de système appliquée à la langue s'oppose à une conception ancienne du langage considéré comme une liste de mot, une nomenclature.

Une telle proposition est une définition de la négation, c'est-à-dire de ce qui n'est pas système. Or quel linguiste sérieux pourrait croire par exemple que Sibawayh s'est contenté dans sa grammaire d'analyser des mots isolés ? Ce qui signifie en gros qu'on ne possède pas de définition de ce qui n'est pas un système.

Proposition 2 : Le langage est semblable au jeu d'échec.

Définition métaphorique. Or la comparaison présente de nombreux inconvénient car comparé et comparant ont des différences fondamentales. Dans la communication linguistique il y a émetteur et récepteur, dans le jeu d'échec il y a deux adversaires. De plus cette métaphore a servi à illustrer d'autres concepts comme l'étude diachronique et l'étude synchronique, la non pertinence de la forme des pièces. Enfin, le recours à la métaphore n'est-il pas l'aveu qu'on ne peut définir CE par quoi la langue est un système.

Proposition 3 : Le langage est un tout organisé.

Cette proposition peut être considérée comme équivalence à la proposition suivante :

Proposition 3 : Le langage est une organisation.

Mais alors on tombe dans le travers de la proposition 0. A moins de définir ce qu'est cette organisation. On m'objectera que le travail du linguiste est justement de définir cette organisation. Mais il y a déjà de belles décennies que cette définition a été posée et que les linguistes travaillent sur cette organisation. N'était-il pas temps d'y revenir ?

Passons sur les autres sens beaucoup plus restreints qui ont été donnés à la notion de système et concentrons-nous sur la proposition suivante :

Proposition 4 : Système et structure sont équivalents.

Mais alors qu'est-ce qu'une structure ? La réponse à cette interrogation n'est pas simple et dans les livres de linguistique le problème est presque toujours éludé ou dans le meilleur des cas, la réponse prend la forme d'une pirouette.

7. Le mathématicien lui, par contre sait ce que c'est qu'une structure. Il la définit. Catalogue les structures. Ce sont des groupes des anneaux, des corps. Il en donne des exemples. Il les étudie : les groupes finis, infinis.

Essayons donc de comparer les notions de structure en mathématique et en linguistique. Et commençons par la définition d'une structure très connue : la structure de groupe.

Définition : Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre et un symétrique pour chaque élément.

Analyse : Une loi de composition interne dans un ensemble E est une application de : ExE dans E. En d'autres termes une fonction qui associe un couple d'éléments à un troisième élément.

Exemple : Dans l'ensemble des nombres entiers N, l'addition est une loi de composition interne dans le sens où on associe à deux entiers leur somme.

L'addition dans N est associative, possède un élément neutre qui est 0, mais tout entier ne possède pas de symétrique.

Par contre l'ensemble Z des entiers positifs et négatif est un groupe car tout a appartenant à Z possède un symétrique –a de telle façon que l'addition des symétriques donne l'élément neutre zéro.

8. On peut alors se demander si on trouve la structure de groupe dans la langue.

Pour cela il faudrait chercher la loi de composition interne. Or la loi de composition interne qu'on connait est la concaténation.

La concaténation est la simple adjonction d'un élément à un autre.

En grammaire formelle on parle d'alphabet, par exemple {a,b}. La concaténation nous donne :

L = {a, b, aa, ab, bb, ba, aaa, aab, aba, abb, baa, bba,bbb,...}

Les éléments concaténés sont appelés des mots et l'ensemble L est dit un **Langage**.

Si on adjoint à L le mot vide V, tel que Vx= xV pour tout mot x on voit que L muni de la concaténation est semblable à l'ensemble N, l'opération de concaténation est associative, possède un élément neutre, mais tout mot n'a pas de symétrique.

L n'est pas donc un groupe mais un **monoïde ou semi groupe**.

Hormis la concaténation, il n'y a pas d'autre loi où peut apparaitre une structuration au sens exposé plus haut.

9. Il faut voir dans l'idée de structure employée par les linguistes plutôt la notion de **relation** entre éléments.

En mathématique une relation R est disons un lien entre deux éléments d'un ensemble, cela s'exprime en général par une proposition logique ouverte :

...égale ...

...plus grand que ...

… parallèle à …

…est inclus dans …

…est le frère de …

L'égalité est réflexive : $x = x$

Symétrique :Si $x=y$ alors $y= x$.

Transitive : Si $x = y$ et $y = z$ alors $x = z$

On dit que c'est une **relation d'équivalence**.

Ces relations sont importantes en ce sens qu'elles induisent des classes d'équivalence.

Ainsi un nombre rationnel peut être défini comme une classe d'équivalence de fractions. Le nombre1/2 par exemple représente la classe des fractions : 1/2, 2/4, 3/6, 4/8 …

La relation '… inférieur ou égal à …' elle, est une relation d'ordre.

Les relations mises en exergue par les linguistiques sont de deux sortes :

Celles concernant l'axe des substitutions et qui est de type équivalence, elle permet de déterminer des classes de signifiants ou paradigmes.

Celles concernant l'axe de composition est qui est grosso modo une relation de type concaténation bien qu'en vérité les éléments de l'axe de la composition vont au-delà de la simple juxtaposition.

Une équation telle que :

$x + 1/2 = 1/3$

se comporte comme une phrase de la langue :

D'une part on peut substituer aux fractions toutes celles qui lui sont équivalente et d'autre part dans l'axe de la composition les règles d'assemblage sont parfaitement codifiées.

Il faut enfin voir dans l'idée de structure cette autre type de relation qui est la hiérarchisation et qui permet de passer d'un niveau à un autre ; ce qui tend à montrer que la notion de structure est souvent évocatrice d'image. Une maison qu'on bâtit. C'est là un vecteur métaphorique où il ferait bon de mettre de l'ordre.

Il faut voir dans cet exposé non pas une critique de la **pensée linguistique** face à la **pensée mathématique**. Cette dernière jouit d'un prestige dû à sa méthode mais dû aussi au fait que c'est elle-même qui construit son objet indépendamment du réel. Un objet qu'elle maitrise forcément et qui est idéal et soumis aux lois de la logique.

La linguistique ne peut s'imposer son objet d'étude qui est le langage et qui est loin s'en faut d'être régulier, idéal et soumis aux lois de la déduction.

Cependant pensée linguistique et pensée mathématique peuvent s'enrichir mutuellement et cela par de nombreuses confrontations et recherches communes.