# استخدام انحدار المكونات الرئيسية في حالة وجود مشكلة التعدد الخطي

## دراسة تطبيقية على محددات التضخم في الجزائر

ساوس الشيخ

أستاذ محاضر بكلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

جامعة أدرار - الجزائر

**ملخص:**

تهدف هذه الورقة البحثية لاستخدام انحدار المكونات الرئيسية في التقدير كأحد طرق التقدير المستخدمة التي تعالج مشكلة التعدد الخطي والتي تحدث في كثير من النماذج القياسية، وجوهر هذا الطريقة انها تستبدل المتغيرات المستقلة والتي تعاني من مشكلة التعدد الخطي بمكونات رئيسية تعبر عنها لتوفيق نموذج الانحدار في حالة التعدد الخطي.

**الكلمات المفتاحية:** التعدد الخطي؛ انحدار المكونات الرئيسية؛ التقدير.

**رموز (jel):** C13+ C39

**Abstract :**

*This paper aims to use the principle components regression method to overcome the problem of multicollinearity which appears in many estimated models. The core of this method is replacing the independence variables that suffer from the multicollinearity problem with principal components to solve this problem.*

***Key Words:*** Multicollinearity; principle components regression; estimation.

***(jel) Classification:*** C13+ C39

**تمهيد:**

الكثير من النماذج القياسية متغيراتها المعتمدة تشرح بواسطة مجموعة من المتغيرات المستقلة من بينها ظاهرت التضخم والتي يحاول الكثير من الباحثين تقدير محدداتها لإيجاد تفسيرات أكثر، اغلب تلك الطرق في التقدير بالرغم من أنها تتميز بالخصائص المرغوبة في المقدرات الجيدة مثل عدم التحيز واقل تباين، غير أنها تصطدم بالمشاكل القياسية المعروفة منها التعدد الخطي.

مشكلة التعدد الخطي والخاصة بالنماذج الانحدارية المتعددة هي مشكلة تنشأ من تعدد العلاقات الخطية بين المتغيرات المستقلة والتي تتسبب في تضخم تباين مقدرات النموذج وينتج عنها تفسيرات مضللة لدى وجب البحث عن طرق تقدير تتخطى هذا المشاكل القياسية وهي عديدة. ومن بين النماذج التي تحاول هذا الورقة إلقاء الضوء عليها هي طريقة المكونات الرئيسية والتي تبحث في معالجة مشاكل التعدد الخطي وهي تضخم تباين المقدرات بحيث تسعى إلى إيجاد مكونات جديدة بديلة للمتغيرات التفسيرية لتنوب عنها بحيث ينخفض تباين المقدرات إلى أدنى قدر ممكن.

من هنا تتبلور مشكلة البحث في السؤال الرئيسي التالي:

كيف يتم تقدير انحدار المكونات الرئيسية لدالة محددات التضخم في الجزائر؟

للإجابة على الإشكالية المطروحة يتم تناول الموضوع في ثلاث محاور رئيسية وهي :

أولاً. التعدد الخطي المتعدد؛

ثانياً. انحدار المكونات الرئيسية؛

ثالثاً. الدراسة التطبيقية.

## أولاً: التعدد الخطي المتعدد:

التعدد الخطي مصطلح استخدم لأول مرة في أدبيات القياس الاقتصادي من قبل الإحصائي النرويجي RAGNAR FRISCH سنة 1934 في كتابه الإحصائي التحليل الالتقائي Confluence Analysis[1]. ويعتبر من الشروط اللازم توفرها لاستخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معلمات نموذج الانحدار عدم وجود ارتباط أو تداخل خطي بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المفسرة في نموذج الانحدار[2].

### 1. طبيعة التعدد الخطي المتعدد:

التعدد الخطي المتعدد وهو ترجمة للمصطلح الانجليزي Multicolinearity مصطلح مركب من ثلاث مقاطع؛ Multi والتي يقصد بها التعدد، CO والتي تعني التلازم أو الاشتراك أو التعدد أو التبادل، linearity والتي يقصد بها الخطية، وقد اختلفت الترجمات العربية لهذا المصطلح فمنهم من أطلق عليه التعدد الخطي وأخر يسميه التعدد الخطي وهناك من يسميه الارتباط الخطي المتعدد وأخر يسميه الازدواج الخطي[3]. رياضياً شرط الاستقلالية بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_n$ يتوفر إذا تحقق الشرط في العلاقة الخطية بينهما التالي :

$$C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n = \underline{0}$$

حيث أن الثوابت $C_1, C_2, ..., C_n$ لا تساوي جميعها الصفر، وفي اغلب حالات الانحدار الخطي فانه من غير المحتمل أن تكون العلاقة تامة، فإذا كان :

$$C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n \approx \underline{0}$$

أي مساوياً للصفر تقريباً، فإننا نقول أن متجهات المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_n$ متداخلة خطياً.[4]

التعدد الخطي هو بين المتغيرات التفسيرية بعضها البعض مثنى مثنى وليس بين المتغير التفسيرية والتابع، وبالتالي فان التعدد الخطي يحدث فقط في حالة وجود متغيرين تفسيرين أو أكثر لهذا فان التعدد الخطي المتعدد لا يتحقق في حالة نموذج الانحدار الخطي البسيط وإنما يتحقق فقط في حالة نموذج الانحدار الخطي المتعدد، كما أن هناك من يلاحظ أن مشكلة التعدد الخطي مشكلة ملازمة للعينة، ذلك أنها قد تحدث على مستوى العينة ولا تحدث على مستوى الظاهرة (المجتمع)، وبالتالي فإن مشكلة التعدد الخطي تدعى بمشكلة العينة[5]. وهناك من يلاحظ أن مشكلة التعدد الخطي المتعدد توجد فقط اذا كانت هناك علاقة خطية بين المتغيرات التفسيرية والمتغير التابع، أما إذا كان هناك علاقة غير خطية فإن مشكلة التعدد الخطي لا تظهر ولا يترتب عليها آثار سيئة، ومن أمثلة ذلك دوال الانحدار كثيرات الحدود[6].

تكون مشكلة التعدد الخطي المتعدد في حدها الأقصى إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين التفسيرين مساوي للواحد الصحيح ويدعى ارتباط خطي تام، وتنعدم مشكلة التعدد الخطي إذا كان معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين التفسيرين مساوي للصفر ويسمى المتغيرين التفسيرين في هذه الحالة بالمتغيرات المتعامدة، وفي الواقع العملي لا تقع مثل هذه الحالتين السابقتين[7]، وبالتالي فإنه مشكلة التعدد الخطي تحدث عندما يكون هناك ارتباط معتدل أو شديد بين متغيرين تفسيرين أو أكثر[8].

## 2. أسباب حدوث مشكلة التعدد الخطي :

هناك العديد من مصادر التعدد الخطي في العلاقات الخطية ومن أهم تلك المصادر ما يلي[9]:-

- ✓ اتجاه بعض المتغيرات للتغير سوياً عبر الزمن، فمثلاً نجد أن متغيرات دخل الموظف وسنوات خبرته وعمره ومرتبته الوظيفية غالباً ما تتغير سوياً ويكون بينهما ارتباط قوي؛
- ✓ استخدام المتغيرات المتباطئة زمنياً مثل الاستهلاك الحالي في السنة t يعتمد على الاستهلاك السابق في السنة t-1؛
- ✓ إدراج متغيرات مستقلة ذات تباينات صغيرة أو تشتت أقل؛
- ✓ أساليب المعاينة يظهر هذا المصدر من خلال معرفة أو عدم معرفة صاحب التجربة بأنه يأخذ بعض المتغيرات المستقلة وهذه المتغيرات تعرف واحد أو أكثر من معادلات الارتباطات الخطية، ويظهر هذا المصدر في المجالات الصناعية، فعلى سبيل المثال عندما يرغب الباحث بالتنبؤ بالأرباح من خلال دراسة ( الدخل – تكاليف العمل ) وبتحليل هذا النوع من البيانات تظهر علاقة خطية قوية بين الدخل وتكاليف العمل حيث أن زيادة تكاليف العمل سوف تؤذي إلى زيادة الدخل.
- ✓ القيود الفيزيائية في النموذج أو المجتمع، يظهر هذا المصدر كثيرا في التحليلات الكيماوية حيث أن تكوين مركب ما يعتمد على إضافة مجموعة من العناصر بأوزان ثابتة، في بعض الأحيان يكون من الصعب معرفة القيود الفيزيائية في النموذج التي تكون السبب في التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة.
- ✓ يؤدي صغر حجم العينة بحيث يصبح عدد المشاهدات قريبا من عدد المتغيرات التفسيرية إلى ظهور مشكلة الازدواج الخطي؛
- ✓ عدم إمكانية التحكم في بيانات المشاهدات لأنها لا تخضع للسيطرة والتجارب.

## 3. الكشف عن مشكلة التعدد الخطي:

هناك العديد من الأساليب المستخدمة للكشف عن مشكلة التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة من أهمها :-

### 1.3. مصفوفة معاملات الارتباط الجزئي :

يعتبر هذا الأسلوب سهل وبسيط للكشف عن التعدد الخطي بين المتغيرات التفسيرية حيث يتم فحص المعاملات غير القطرية في مصفوفة معاملات الارتباط الجزئي $(X'X)$ التي تمثل قيم الارتباط البسيط بين المتغيرات التفسيرية، فإذا كان $\left|r\left(X_i, X_j\right)\right| \approx 1$ معنى ذلك وجود علاقة خطية بين $X_i, X_j$ ، وهناك من يقترح الكشف عن مشكلة التعدد الخطي إذا كان $\left|r\left(X_i, X_j\right)\right| > 0.7$ وذلك من خلال رسم الشكل الانتشاري $X_i, X_j$ فإذا أمكن التعبير عن الشكل الانتشاري بخط مستقيم معنى ذلك انه هناك ازدواج خطي بين المتغيرين $X_i, X_j$ .

### 2.3. معامل تضخم التباين:

يمكن كتابة عناصر قطر المصفوفة $C = (X'X)^{-1}$ كما يلي[10]:

$$C_{jj} = \frac{1}{\left(1 - R_j^2\right)} \quad j = 1,2,\dots,k$$

حيث $R_j^2$ يمثل معامل تحديد المتعدد لانحدار $X_j$ على باقي المتغيرات المستقلة $k-1$، فإذا كان المتغير $X_j$ متعامد تقريباً مع المتغيرات المتبقية فان $R_j^2$ سيكون صغيراً وبالتالي فان $C_{jj}$ سيكون قريبا من 1، وإذا كان $X_j$ مرتبطا خطيا مع بعض المتغيرات الأخرى فان $R_j^2$ سيكون قريبا من 1 وبالتالي $C_{jj}$ سيكون كبير جداً، وحيث أن تباين معامل الانحدار للمتغير $X_j$ يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$V\left(\hat{B}_j\right) = \sigma^2 C_{jj}$$

وعليه فان $C_{jj}$ عامل مهم في زيادة تباين $\hat{B}_j$ إذا كان هناك ازدواج خطي بين المتغيرات المستقلة، وبالتالي فان معامل تضخم التباين $VIF_j = C_{JJ}$ لكل متغير في نموذج الانحدار يقيس تأثير العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة على تباينات معلمات الانحدار.[11]

اقترح المقياس VIF من قبل Glauber & Farrar عام 1967 وسماه Marguardt في عام 1970 معامل تضخم التباين variance inflation factor. وحدد[12] Gunst & Mason, 1980 انه إذا كان $C_{JJ} \geq 4$ فان ذلك دليلا كافياً على أن $X_j$ مرتبطا مع بقية المتغيرات.

### 3.3. القيم الذاتية:

إيجاد القيم الذاتية للمصفوفة $X'X$ حيث أن :

$$L = V'(X'X)V$$

حيث $L$ مصفوفة قطرية ذات بعد $P \times P$ عناصر قطرها الرئيسي عبارة عن القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ لمصفوفة الارتباط $X'X$ ، $V$ مصفوفة لها خاصية التعامد المعياري. فإذا كان هناك قيمة ذاتية قريبة من الصفر $\lambda_i \approx 0$ دل ذلك على وجود ارتباط خطي شبه تام. وإذا كانت القيمة الذاتية تساوي الصفر $\lambda_i = 0$ دل ذلك على وجود ارتباط خطي تام. وتساعد القيم الذاتية في حساب نوعين من الإحصاءات التي تساهم في الكشف عن وجود ازدواج خطي هما :

- مؤشر الحالة :

$$CI = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_j}} \quad j = 1,2,\dots,p$$

حيث:

$\lambda_{\max}$ : اكبر قيمة ذاتية. $\lambda_j$ : القيمة الذاتي في الحالة $j$

- رقم الحالة :

$$CN = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}$$

إذا كانت $10 < CN < 30$ يدل ذلك على وجود تعدد خطي معتدل، إذا كانت $CN > 30$ يدل على وجود تعدد خطي حاد.[13]

## 4. العواقب النظرية لمشكلة التعدد الخطي :

إن وجود تعدد خطي معتدل أو قوي بين المتغيرات التفسيرية يترتب عليه العواقب النظرية التالية[14]:

- ✓ الحصول على مقدرات غير متحيزة لها تباين وتباين مشترك كبير؛
- ✓ اتساع مجالات الثقة لمعاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد كنتيجة للعاقبة الأولى؛
- ✓ صغر (عدم معنوية) مؤشر ستودنت المحسوبة لمعاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد نتيجة كبر الانحراف المعياري لتلك المقدرات وبالتالي الميل لقبول الفرض العدمي الذي ينص على عدم معنوية معالم نموذج الانحدار الخطي المتعدد؛
- ✓معامل التحديد الذي يمثل مؤشر جودة التوفيق سيكون مرتفعاً جداً ؛
- ✓ مقدرات المربعات الصغرى وانحرافاتها المعيارية ستكون حساسة جداً لأي تغير بسيط في البيانات.

## 4. معالجة مشكلة التعدد الخطي :

اهتم العديد من الباحثين في إيجاد الحلول المناسبة لمعالجة مشكلة التعدد الخطي والتي يمكن تصنيفها لقسمين رئيسين وهما كما يلي :

### 1.4. معالجة مشكلة التعدد الخطي المستندة الى المقدرات غير المتحيز:

وهي كل الطرق المقترحة التي تحاول معالجة مشكلة التعدد الخطي والتي تعتمد على مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية الغير متحيزة

### 2.4. معالجة مشكلة التعدد الخطي المستندة إلى المقدرات المتحيز:

بخلاف طريقة المربعات الصغرى غير المتحيزة يتم استخدام طرق تقدير أخرى ولكنها متحيزة، في معالجة مشكلة التعدد الخطي، والتي يمكن أن تكون أكثر دقة، ومن أهمها[15]:-

**1.2.4. انحدار الحرف :** اقترحها لأول مرة Horel في عام 1962 بعد ذلك طورت من طرف كل من Horel & Kennard في عام 1970 والتي تتضمن إضافة الثابت $k$ إلى عناصر قطر المصفوفة $(X'X)$ قبل اخذ معكوسها.

**2.2.4. انحدار المكونات الرئيسية :** اقترحها وطورها كل من kendal & hotelling, 1967 وتهدف هذه الطريقة إلى تحويل المتغيرات المرتبطة خطياً إلى متغيرات جديدة غير مرتبطة خطياً. وسيتم تناوله بشكل مفصل لاحقاً.[16]

## ثانياً: انحدار المكونات الرئيسية

## 1. تحليل المكونات الرئيسية:

أول من وصف تقنية تحليل المكونات الرئيسية في شكل مبسط هو Karl Pearson, 1901 غير أن الإجراءات العامة المعروفة حالياً تعود لأعمال Harold Hotelling سنة 1933. وساعد في تطور هذه التقنية تطور أنظمة التشغيل الحاسوبية[17]. يهتم تحليل المكونات الرئيسية بشرح وتفسير هيكل تباينات والتباينات المشتركة للمتغيرات الأصلية باستخدام توليفات خطية قليلة من المتغيرات[18]، وتهدف هذا الطريقة أساسا إلى تخفيض البيانات ومن ثم إتاحة إيجاد تفسيرات جديدة.

## 1.1. تحليل المكونات الرئيسية للمجتمع :

تعتبر المكونات الرئيسية للمجتمع توليفات خطية من المتغيرات الأصلية $x_1, x_2, \ldots, x_P$ . تعتمد المكونات الرئيسية على مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة فقط والتي يرمز لها بالرمز $\sum$ (أو على مصفوفة الارتباط $\rho$) للمتغيرات العشوائية $x_1, x_2, \ldots, x_P$ . اشتقاق المكونات الرئيسية لا يشترط افتراض التوزيع الطبيعي للمتغيرات المتعددة ولكن المكونات الرئيسية للمجتمعات الطبيعية المتعددة المتغيرات لها تفسيرات مفيدة. يمكن كذلك استخدام المكونات الرئيسية للعينة في الاستدلال عندما يكون مجتمع المتغيرات المتعددة يتبع التوزيع الطبيعي. بافتراض أن مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة للمتجه العشوائي $X^t = (x_1, x_2, \ldots, x_P)$ هي $\sum$ وبافتراض التوليفات الخطية التالية[19]:

$$Y_1 = V_1^t X = v_{11}x_1 + v_{21}x_2 + \ldots + v_{P1}x_P$$
$$Y_2 = V_2^t X = v_{12}x_1 + v_{22}x_2 + \ldots + v_{P2}x_P$$
$$\vdots$$
$$Y_P = V_1^t X = v_{1P}x_1 + v_{2P}x_2 + \ldots + v_{PP}x_P$$

المكونات الرئيسية هي تلك التوليفات الخطية $Y_1, Y_2, \ldots, Y_P$ التي لا ترتبط خطياً مع بعضها البعض ويكون مجموع تبايناتها أكبر ما يمكن. المكون الرئيسي الأول هو تلك التوليفة الخطية $V_1^t X$ التي تعظم تباين $Y_1$ بحيث يتحقق شرط التعامد القياسي $V_1^t V_1 = 1$ المكون الرئيسي الثاني هو التوليفة الخطية $V_2^t X$ التي تعظم تباين $Y_2$ بحيث يتحقق شرط التعامد القياسي $V_2^t V_2 = 1$. والذي يؤدي لتحقق شرط الاستقلالية أي أن $COV(Y_1, Y_2) = 0$ .

يمكن الحصول على التحويلات الخطية التي تعطي أكبر تباين للمتغير $Y_i$ باستخدام القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة $\sum$. إذا كانت الثنائيات $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \ldots (\lambda_P, e_P)$ هي القيم والأشعة الذاتية حيث أن: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_P$ ، فان المكون الرئيسي دو الرتبة $i$ هو :

$$Y_i = e_i^t X = e_{1i}x_1 + e_{2i}x_2 + \ldots + ev_{Pi}x_P$$

بهذا الاختيار فقد تم إثبات أن :

$$Var(Y_i) = \lambda_i \quad , \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{P}$$
$$\mathrm{Cov}(\mathrm{Y_i}, \mathrm{Y_k}) = 0 \quad , \mathrm{i} \neq 0$$

التباين الكلي للمجتمع :

$$tr(\Sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{P} Var(X_i)$$
$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_P$$
$$= \sum_{i=1}^{P} Var(Y_i)$$

وبالتالي فان نسبة التباين الكلي المفسرة للمكون الرئيسي رقم $i$ هي :

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_P}, \quad i = 1,2,\ldots,P$$

إذا كان عدد المتغيرات الأصلية كبير وكان من الممكن إرجاع الجزء الأكبر من التباين الكلي للمجتمع (من80 إلى 90 في المائة إلى المكونات الرئيسية الثلاثة الأولى مثلاً) فان هذا المكونات تحل محل المتغيرات الأصلية دون فقد الكثير من المعلومات.

### 2.1. تحليل المكونات الرئيسية للمتغيرات القياسية :

إذا كانت المتغيرات الأصلية $(x_1, x_2, \ldots, x_P)$ تتميز بوحدات قياس مختلفة وتشت أو مدى هذا المتغيرات الأصلية مختلف يتم تحويل المتغيرات الأصلية إلى متغيرات قياسية $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_P)$ وذلك للتخلص من وحدات القياس والحصول على متغيرات قياسية لها متوسط 0 وتباينات مساوية للواحد الصحيح. يمكن الحصول على المكونات الرئيسية للمتغيرات القياسية كالتالي[20]:

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}$$
$$Z_2 = \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$
$$\vdots$$
$$Z_P = \frac{x_P - \mu_P}{\sigma_P}$$

يمكن الحصول على المكونات الرئيسية للمتجه العشوائي $Z' = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_P)$ وذلك باستخدام القيم والأشعة الذاتية لمصفوفة معاملات الارتباط $\rho$ للمتجه العشوائي $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_P)$ . حيث :

$$Y_i = e_i' Z \quad i = 1,2,\ldots,P$$
$$\sum_{i=1}^{P} V(Y_i) = \sum_{i=1}^{P} \underbrace{V(Z_i)}_{=1} = P$$

كما يمكن كتابة مصفوفة معاملات الارتباط ما بين المكونات الرئيسية $Y_i$ والمتغيرات $Z_i$ كما يلي :

$$\rho_{Y_i, Z_k} = e_{ki}\sqrt{\lambda_i} \quad i = 1,2,\ldots,P / k = 1,2,\ldots,P$$

حيث أن :

$$(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \ldots, (\lambda_P, e_P)$$

تمثل التوليفات القيم والأشعة الذاتية لمصفوفة المعاملات $\rho$ حيث : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_i \quad i = 1,2,\ldots,P$

وبما أن :

$$\sum_{i=1}^{P} V(Z_i) = tr(\rho) = P$$

وعليه يمكن القول أن نسبة تفسير المكون الرئيسي $k$ للتباين الكلي لمجتمع المتغيرات القياسية هو:

$$\frac{\lambda_k}{P}, \qquad k = 1,2,\ldots,P$$

## 3.1. تحليل المكونات الرئيسية للعينة :

تحليل المكونات الرئيسية من العينة يهتم بدراسة مشكلة تلخيص التغير الناتج من $n$ من القياسات المأخوذة لـ $P$ من المتغيرات باستخدام عدد قليل من التراكيب الخطية، بفرض البيانات $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تمثل $n$ من المشاهدات المستقلة والمأخوذة من مجتمع في فضاء ذي $P$ بعد حيث $\mu$ يمثل شعاع المتوسطات و $\sum$ تمثل مصفوفة تباينات والتباينات المشتركة للمجتمع وباستخدام هذا البيانات يمكن الحصول على شعاع متوسطات العينة $\bar{x}$ ومصفوفة تباينات والتباينات المشتركة العينة $S$ ومصفوفة معاملات الارتباط $R$.

تستخدم المعلومات السابقة في الحصول على التراكيب الخطية المستقلة للمتغيرات التي تم قياسها بحيث تفسر هذا المكونات الجزء الأعظم من الاختلافات الموجودة في العينة والتي تدعى بالمكونات الرئيسية للعينة، حيث:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1P} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{P1} & s_{P2} & \cdots & s_{PP} \end{pmatrix}$$

ومصفوفة معاملات الارتباط هي:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1P} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_{P1} & r_{P2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

كما تم معالجتها في تحليل المكونات الرئيسية للمجتمع فانه سيتم الاقتصار على أشعة المعاملات $V_i$ التي تحقق الشرط $V_i^t V_i = 1$ وعليه فان:

المكون الرئيسي الأول من العينة هو تلك التركيبة الخطية $V_1^t X_j$ التي تعظم تباين العينة الخاصة بها بحيث يتحقق شرط التعامد القياسي $V_1^t V_1 = 1$.

المكون الرئيسي الثاني من العينة هو تلك التركيبة الخطية $V_2^t X_j$ التي تعظم تباين العينة الخاصة بها بحيث يتحقق شرط التعامد القياسي $V_2^t V_2 = 1$.

وهكذا تباعاً فان في الخطوة رقم $i$ فان : المكون الرئيسي رقم $i$ هو تلك التوليفة الخطية $V_i^t X_j$ التي تعظم تباين العينة الخاصة بها بحيث يتحقق شرط التعامد القياسي $V_1^t V_1 = 1$.

حيث أن التباينات المشتركة من العينة لجميع الثنائيات $\left(V_i^t X_j, V_k^t X_j\right)$ مساوياً للصفر حيث $k < i$.

وبالتالي إذا كانت $S$ مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة ذات البعد $P \times P$ وكانت :

$$\left(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1\right), \left(\hat{\lambda}_2, \hat{e}_2\right), \ldots, \left(\hat{\lambda}_p, \hat{e}_p\right)$$

هي ثنائيات القيم الذاتية والأشعة الذاتية لهذه المصفوفة فان المكون الرئيسي رقم $i$ للعينة هو :

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= \hat{e}_i' x \\ &= \hat{e}_{1i}' x_1 + \hat{e}_{2i}' x_2 + \ldots + \hat{e}_{pi}' x_p \qquad / i = 1,2,\ldots,\mathrm{P} \end{aligned}$$

حيث $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \hat{\lambda}_3,\ldots,\geq \hat{\lambda}_p \geq 0$ ، وحيث $x$ تعبر عن مشاهدات المتغيرات العشوائية $x_1, x_2,\ldots, x_p$

تباين العينة للمكون الرئيسي $\hat{y}_k$ هو $\hat{\lambda}_k, k=1,2,\ldots, p$

التباين المشترك للمكونين $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ يساوي الصفر، $i \neq k$

التباين الكلي للعينة هو : $\sum_{i=1}^{P} S_{ii} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \ldots + \hat{\lambda}_p$

ويعطى معامل الارتباط بين المتغير رقم $k$ والمكون الرئيسي رقم $i$ هو:

$$r_{\hat{y}_i, x_k} = \frac{\hat{e}_{ki}\sqrt{\hat{\lambda}_i}}{\sqrt{S_{kk}}} \quad \mathrm{i, k} = 1,2,\ldots,\mathrm{P}$$

ويعبر على المكونات الرئيسية للعينة بالرموز $\hat{y}_1, \hat{y}_2,\ldots, \hat{y}_k$ سواء تم الحصول على هذه المكونات باستخدام مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة أو مصفوفة معاملات الارتباط والناتج عنهما مختلف سواء المكونات الرئيسية الناتجة من مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة أو مصفوفة معاملات الارتباط.

## 2. انحدار المكونات الرئيسية:

### 1.2. نبذة عن استخدام انحدار المكونات الرئيسية :

استخدمت طريقة المكونات الرئيسية في توفيق نموذج الانحدار في عام 1933 من قبل الباحث Hoteling ثم طورت بعد ذلك عام 1975 من قبل Kendall حيث قام بدراسات عديدة حول هذا الموضوع لتي تهدف إلى تحويل المتغيرات المرتبطة إلى متغيرات جديدة مستقلة استخدمها Jeffers في توفق نموذج الانحدار الخطي[21]، طريقة المكونات الرئيسية واحدة من النماذج الخطية المتحيزة الواسعة الاستخدام لتخطي مشكلة التعدد الخطي التي كثيرا ما يعاني منها نموذج الانحدار الخطي المتعدد في الواقع التطبيقي. تقوم طريقة المكونات الرئيسية على تحويل المتغيرات التفسيرية الأصلية المرتبطة دون حذف أي منها إلى متغيرات جديدة متعامدة تسمى بالمكونات الرئيسية، وكل مركب رئيسي عبارة عن تركيب خطي في المتغيرات المستقلة الأصلية. وتعتبر عملية إيجاد المكونات الرئيسية خطوة مهمة لإزالة أثر التعدد الخطي تمهيدا لاستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معالم نموذج الانحدار الخطي الأصلية للمتغيرات التفسيرية[22].

### 2.2. مقدرات انحدار المكونات الرئيسية :

الشكل المصفوفي لعبارة مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية تكتب بالشكل التالي:

$$\hat{B}_{LS} = (X'X)^{-1} X'Y$$

ويعرف تباين هذا المقدرات بالشكل المصفوفي كذلك كما يلي:

$$Var(\hat{B}_{LS}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

حيث تباين $\hat{B}_{iLS}$ هو العنصر رقم $i$ في قطر المصفوفة $\sigma^2 (X'X)^{-1}$ والتباين الكلي يساوي :

$$\sum_{i=1}^{P} Var(\hat{B}_{LS}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{P} \frac{1}{\lambda_i}$$

حيث تمثل $\frac{1}{\lambda_i}$ القيمة الذاتية $i$ للمصفوفة $(X'X)^{-1}$ حيث إذا كانت إحدى القيم الذاتية $\lambda_i$ صغيرة أقل من الواحد الصحيح وتقترب من الصفر فان التباين الكلي لقيم $\hat{B}_{LS}$ سيكون كبيراً، وبالتالي فان صغر تلك القيم الذاتية $\lambda_i$ دلالة على التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة.

وعليه يمكن الاستفادة من هدف تحليل المكونات الرئيسية في الانحدار للتعبير عن مقدرات $\hat{B}_{LS}$ بعدد قليل من المكونات الرئيسية والتي يمكن أن تفسر قدر كبير من التباين الكلي بحيث لا تكون مرتبطة.

بافتراض أن:

$$
\begin{aligned}
Z &= e'X \\
Z &= Xe \\
Ze^{-1} &= Xee^{-1} \\
Ze' &= X \\
X &= Ze'
\end{aligned}
$$

بالتعويض في نموذج الانحدار الخطي نجد:

$$
\begin{aligned}
Y = XB + \varepsilon &= Ze'B + \varepsilon \\
&= Z\alpha + \varepsilon
\end{aligned}
$$

حيث : $\alpha = e'B$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى يتم حذف المكونات الرئيسية والاحتفاظ بالمكونات الرئيسية التي تفسر أكبر قدر ممكن من تباين الكلي للمتغيرات المستقلة كلها للحصول على مقدرات طريقة المكونات الرئيسية. وحيث أن :

$$\hat{\alpha} = (Z'Z)^{-1}Z'Y$$

ومنه مصفوفة التباينات :

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 (Z'Z)^{-1} &= \sigma^2 (e'X'Xe)^{-1} \\
&= \sigma^2 D^{-1}
\end{aligned}
$$

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_P} \end{pmatrix}$$

$$V(\hat{\alpha}_i) = \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{P}$$

وبالتالي هناك علاقة عكسية بين القيم الذاتية وتباين المقدرات وبالاستناد إلى تحليل المكونات الرئيسية وان الاحتفاظ بالمكونات الرئيسية التي تفسر الجزء الأكبر من شأنه تخفيض التباين للمقدرات والاحتفاظ بنسبة تفسير كبيرة. حسب Morrison يمكن الاحتفاظ بعدد $k$ من المكونات الرئيسية التي تفسر على الأقل 75% من تباين المجتمع لقيم المتغيرات المستقلة والتي عددها $P$ وهذا النسبة يمكن الحصول عليها من خلال العلاقة التالية23:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i / \sum_{i=1}^{P}\lambda_i$$

**ثالثاً: الدراسة التطبيقية :**

الدراسة التطبيقية تهدف إلى تقدير نموذج يعاني من مشكلة التعدد الخطي حتى يبرر استخدام طريقة انحدار المكونات الرئيسية من خلال تحديد النموذج، يليه استكشاف مشكلة التعدد الخطي والقيم الشاذة بعد ذلك مرحلة التقدير.

**1. النموذج :**

في هذا الدراسة تم الاعتماد على بيانات دراسة[24] مسعود ميهوب ويوسف بركان، 2017 وهي دراسة تحتوي على بيانات حديثة لمحددات التضخم، واستخدمت الدراسة طريقة المربعات الصغرى للحصول على كل النتائج المقدرة بالرغم من وجود مشاكل قياسية كثيرة وهو ما سيتم معالجته في هذا الدراسة من خلال إسقاط ما تم التطرق له سابقاً في الجانب النظري حول طريقة التقدير باستخدام طريقة انحدار المركبات الرئيسية.

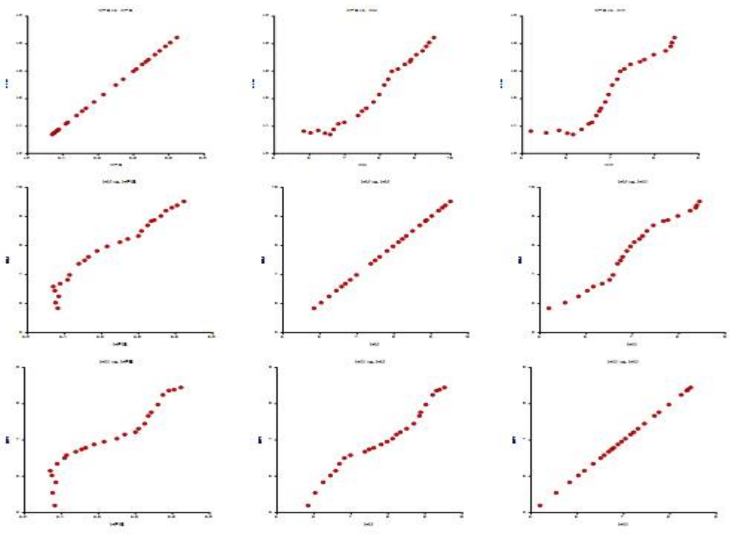
لدى فان هذا الدراسة تهدف إلى تقدير النموذج التالي :

$$Ipc_t = A.(PIB)_t^{\beta_1}(M)_t^{\beta_2}(W)_t^{\beta_3}\varepsilon_t$$

**2. اكتشاف مشكلة التعدد الخطي :**

المرحلة الأولى تتعلق بتشخيص النموذج خاصة محاولة اكتشاف تعدد خطي لأي نموذج مراد تقديره لتبرير استخدام طريقة التقدير التي تعالج مشكلة التعدد الخطي ولغرض ذلك سيتم التأكد من عدم وجود قيم شاده من خلال شكل Scatter Plot Matrix.

**الشكل رقم : شكل Scatter Plot Matrix للمتغيرات المستقلة في النموذج**



**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

واضح جلياً من الشكل الخاص بـ Scatter Plot Matrix غياب القيم الشاذة بين المتغيرات المستقلة وبالتالي فان مشكلة التعدد الخطي في النموذج واضحة من خلال تعدد العلاقات الخطية بين المتغيرات المستقلة المختلفة بعضها البعض، وللتأكد من ذلك يمكن توضيح ذلك من خلال مصفوفة الارتباطات الجزئية ما بين المتغيرات المستقلة الموضحة في الجدول التالي :

**الجدول رقم: مصفوفة الارتباطات الجزئية بين المتغيرات المستقلة للنموذج**

| | lnPIB | lnM | lnW |
|---|---|---|---|
| lnPIB | 1 | 0.977975 | 0.951528 |
| lnM | 0.977975 | 1 | 0.982642 |
| lnW | 0.951528 | 0.982642 | 1 |

**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

مصفوفة الارتباط الجزائية بين المتغيرات المستقلة توضح ارتفاع كل قيم الارتباط الجزئي بين المتغيرات المستقلة وهي تتعدى 0.95 مما يؤكد قوة مشكلة التعدد الخطي والموضحة في شكل Scatter Plot Matrix ، وكدليل إضافي يمكن توضيح ذلك من خلال القيم الذاتية باعتماد مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة للمتغيرات المستقلة في النموذج.

**الجدول رقم : القيم الذاتية للمكونات الرئيسية المقابلة للمتغيرات الأصلية للنموذج**

| الرقم | القيم الذاتية | نسبة التفسير | نسبة تفسير التراكمية | Scree Plot |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.699143 | 98.95 | 98.95 | \|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\| |
| 2 | 0.016413 | 0.96 | 99.91 | \| |
| 3 | 0.00163 | 0.09 | 100 | \| |

**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

الجدول أعلاه يوضح القيم الذاتية للمكونات الرئيسية المقابلة للمتغيرات الأصلية والتي فيها قيم ذاتيه تقترب من الصفر ونسبة التفسير أو نسبة التفسير التراكمية للمكون الرئيسي الأول توضح نسبة اقتربت قيمتها من 99% هي عالية جداً مما يعني انه يمكن تقليص المكونات الرئيسية لمكون واحد وهذا دليل على أن النموذج يعاني من مشكلة تعدد خطي بشكل كبير وواضح.

كما يمكن توضيح اكتشاف مشكلة التعدد الخطي من خلال الجدول الخاص بعامل تضخم التباين Variance Inflation والموضح في الجدول التالي :

**الجدول رقم : القيم الذاتية للمكونات الرئيسية المقابلة للمتغيرات الأصلية للنموذج**

| المتغير المستقل | عامل تضخم التباين VIF | معامل التحديد المقابل للمتغيرات المستقلة | مؤشر Tolerance |
|---|---|---|---|
| lnPIB | 24.415 | 0.959 | 0.041 |
| lnM | 67.1075 | 0.9851 | 0.0149 |
| lnW | 30.9059 | 0.9676 | 0.0324 |

**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

من خلال الجدول يتضح أن اصغر عامل تضخم للتباين هو 24.415 والمقابل للمتغير lnPIB وهي قيمة أعلى بكثير من قيمة 10 القيمة الحدية لعامل تضخم التباين للاستدلال بوجود مشكلة تعدد خطي كما يلاحظ أن ارتفاع هذا القيمة يؤثر في ارتفاع قيمة معامل التحديد بالإضافة لذلك انخفاض قيم مؤشر Tolerance والتي تقترب من الصفر وهذا دليل على وجود مشكلة التعدد الخطي.

**3. تقديرات طريقة انحدار المكونات الرئيسية :**

من خلال اعتماد النموذج الموضح سابقاً ومعالجته باستخدام برنامج NCSS الذي يتيح تقدير نموذج انحدار المكونات الرئيسية تم التوصل إلى النتائج التالية :

**الجدول رقم : المكونات الرئيسية مقابل المربعات الصغرى مقارنة بعد حذف 2 من المكونات**

| المكونات الرئيسية | معاملات المكونات الرئيسية | معامل التحديد الخاص | القيمة الذاتية |
|---|---|---|---|
| PC1 | -0.2874 | 0.8057 | 2.941494 |
| PC2 | -0.8423 | 0.1144 | 0.048658 |
| PC3 | -1.114 | 0.0405 | 0.009849 |

**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

يوضح الجدول أعلاه المكونات الرئيسية المقابلة للمتغيرات المستقلة الأصلية والتي توضح ارتفاع معامل التحديد الخاص بالمكون الرئيسي الأول وارتفاع القيمة الذاتية المقابلة له بينما العكس في المكونات الرئيسية الثاني والثالث وبالتالي يتم حذف المكون الرئيسي الثاني والثالث.

**الجدول رقم : المكونات الرئيسية مقابل المربعات الصغرى مقارنة بعد حذف 2 من المكونات**

| المتغيرات المستقلة | معاملات المكونات الاعتيادية | معاملات المربعات الصغرى الاعتيادية | الانحراف المعياري لمعاملات المكونات | الانحراف المعياري للمربعات الصغرى | الخطأ المعياري للمكونات | الخطأ المعياري للمربعات الصغرى |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الثابت | -1.762688 | 14.73997 | - | - | - | - |
| lnPIB | 0.6733678 | -3.484393 | 0.3009 | -1.5571 | 0.07216797 | 0.4787984 |
| lnM | 0.1463681 | 0.9803116 | 0.3041 | 2.0369 | 0.01568695 | 0.1707234 |
| lnW | 0.1844923 | 0.2497206 | 0.3014 | 0.408 | 0.0197729 | 0.1473546 |

**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

يوضح الجدول أعلاه مقارنة بين مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية ومقدرات المكونات الرئيسية الاعتيادية والذي يوضح أن بعض الإشارات في تقديرات المربعات الصغرى التي تتوافق مع النظرية تختلف عن تقديرات المكونات الرئيسية المخالفة للنظرية بينما الانحراف المعياري لتقديرات المربعات الصغرى اكبر من الانحرافات المعيارية لتقديرات المكونات الرئيسية نفس الأمر بالنسبة للأخطاء المعيارية لتقديرات المكونات الرئيسية اقل من الأخطاء المعيارية لتقديرات المربعات الصغرى والتي تبين جودة تقديرات المكونات الرئيسية.

**الجدول رقم : معاملات الانحدار بعد حذف المكونين الرئيسين**

| المتغيرات المستقلة | معاملات الانحدار | الخطأ المعياري | معاملات الانحدار القياسية | عامل تضخم التباين |
|---|---|---|---|---|
| الثابت | -1.762688 | - | - | - |
| lnPIB | 0.6733678 | 0.07216797 | 0.3009 | 0.1124 |
| lnM | 0.1463681 | 0.01568695 | 0.3041 | 0.1148 |
| lnW | 0.1844923 | 0.0197729 | 0.3014 | 0.1128 |

**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

يوضح الجدول أعلاه تقديرات طريقة انحدار المكونات الرئيسية بعد حذف المكونين والتي تبين أن عامل تضخم التباين سجل قيم صغيرة جداً تبين معالجة مشكلة التعدد الخطي وانحراف معياري لمعاملات الانحدار كذلك صغير وبالتالي معنوية المعاملات على أساس الحصول على قيم توزيع ستودنت مناسبة. غير أن النموذج يخالف النموذج المقدر بطريقة المربعات الصغرى من الناحية الاقتصادية على أساس أن إشارات المعاملات كلها موجبة وهو مخالف للنظرية.

**الجدول رقم : جدول تحليل التباين**

| المصدر | درجة الحرية | مجموع المربعات | متوسط مجموع المربعات | مؤشر فيشر | القيمة الاحتمالية |
|---|---|---|---|---|---|
| **الثابت** | 1 | 502,4345 | 502,4345 | 29,0198 | 0.000 |
| **النموذج** | 3 | 5,832569 | 1,94419 | | |
| **الخطأ** | 21 | 1,406901 | 0,06699528 | | |
| **الكلي** | 24 | 7,23947 | 0,3016446 | | |

**المصدر : إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات NCSS**

الجدول أعلاه يوضح جدول تحليل التباين الخاص بالمعنوية الكلية للنموذج والذي يبن أن النموذج جيد على أساس أن القيمة الاحتمالية سجلت 0.000 اقل من القيمة الاحتمالية الاسمية 0.05 وبالتالي النموذج معنوي.

**خلاصة:**

اغلب الدراسات القياسية تستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية والتي تعطي تقديرات غير متحيزة وتتوافق إشارة مقدرات طريقة المربعات الصغرى مع النظرية إلا أن طبيعة العلاقة بين المتغيرات المستقلة في هذا النماذج لا تتوافق مع فروض GAUSS-Markov والتي تعتبر مشكلة التعدد الخطي من أهم تلك المشاكل التي تحدث بين المتغيرات المستقلة وبالتالي البحث عن الطرق المناسبة للتعامل مع مشكلة التعدد الخطي والتي يمكن استخدام طريقة انحدار المكونات الرئيسية. أهم النتائج المتوصل إليها من خلال هذا الدراسة تتمثل في ما يلي:

- التعامل مع مشكلة التعدد الخطي في نمذجة العلاقات عبر إزالة متغيرات يعتبر غير مناسب لأنه يخالف النظرية ويفقد النموذج تفسيرات قد تكون مفيدة؛
- تقديرات طريقة انحدار المكونات الرئيسية متحيزة؛
- التقديرات المتحيزة لانحدار المكونات الرئيسية تؤدي لفشل الاختبارات الاقتصادية للنموذج؛
- طريقة انحدار المكونات الرئيسية تحافظ على قدر كبير من القدرة التفسيرية للمتغيرات المستقلة.

**الهوامش والمراجع:**

[1] تومي صالح، **مدخل لنظرية القياس الاقتصادي**، الجزء الاول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999، ص 182.

[2] دومينك سلفاتور، **ملخصات شوم نظريات ومسائل في الاحصاء والاقتصاد القياسي**، ترجمة د. سعدية حافظ منتصر، دار ماكجرو هيل للنشر، القاهرة، 1982، ص 210.

[3] وليد اسماعيل السيفو، واخرون، **مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي التنبؤ والاختبارات القياسية من الدرجة الثانية**، الاهلية للنشر والتوزيع، عمان، الاردن، 2006، الطبعة الاولى، ص 93.

[4] Gunst, R. F . and Mason, R. L. **Biased estimation in regression: an evaluation using mean squared error**. J. Amer . Statist. Assoc. 72, 1977. p p 616-628.

[5] وليد اسماعيل السيفو، واخرون، **المرجع السابق**، ص 96.

[6] عبد القادر محمود عبد القادر عطيه، **الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق**، الدار الجامعية، الاسكندرية، مصر، 2005 ص 470.

[7] **نفس المرجع**، ص ص 468- 469.

[8] William Mendenhall and Terry Sincich, **A Second Course in Statistics: Regression Analysis**, (7th Edition) Pearson 2012, P 363.

[9] وليد اسماعيل السيفو، واخرون، **المرجع السابق**، ص 98.

[10] Douglas C. Montgomery, George C. Runger, **Applied Statistics and Probability for Engineers**, John Wiley & Sons, Inc. USA, 2002, p 460.

[11] Edward R. Mansfield, Billy P. Helms, Detecting Multicollinearity, **The American Statistician**, V 36, 3, 1982, p p 158-160.

[12] Gunst, R. F . and Mason, R. L. **Op cit**. p p 616-628.

[13] ساوس الشيخ، معالجة مشكلة الازدواج الخطي باستخدام انحدار الحرف دراسة تطبيقية على دالة الإنفاق الاستهلاكي في الجزائر خلال الفترة 1970 - 2011، **مجلة الحقيقة**، جامعة أدرار، العدد 29، جوان 2014، ص ص 34-55.

[14] damodar n. gujarati, dawn c. porter, **essentials of econometrics**, fourth edition, mcgraw-hill, New York, 2010, pp 251-252.

[15] ساوس الشيخ، **المرجع السابق**، ص ص 34-55.

[16] E. Hoerl and Robert W. Kennard, Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems**,** **Technometrics**, Vol. 42, No. 1, Special 40th Anniversary Issue (Feb., 2000), pp. 80-86.

[17] Jackson, J. E. (1991). *A user's guide to principal components*. John Wiley & Sons.

[18] ريتشارد جونسون، دين وشرن. التحليل الاحصائي للمتغيرات المتعددة من الوجهة التطبيقية، ترجمة عبد المرضي عزام، الرياض: دار المريخ،1997، ص 579.

[19] ريتشارد جونسون، دين وشرن. المرجع السابق، ص 286.

[20] ريتشارد جونسون، دين وشرن. المرجع السابق، ص 590.

[21] ايات عبد عبد المهدي محمود السباح، **مقارنة بين طريقتي انحدار المركبات الرئيسية والجذور الصماء باستخدام اسلوب المحاكاة**، رسالة ماجستير في الرياضيات، كلية العلوم جامعة ال البيت، الاردن، 2008، ص 25.

[22] نفس المرجع، ص 89.

[23] محمد سليمان محمد جبريل، **التعدد الخطي اسبابه تاثيراته والمعالجة بانحدار الحافة وانحدار المركبات الرئيسية مع التطبيق على بيانات افتراضية**، رسالة دكتوراه في الاحصاء، كلية الدراسات العليا، جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا، السودان، 2014، ص .93

[24] مسعود ميهوب، يوسف بركان، محددات التضخم في الجزائر درا قياسية للفترة (1990-2014)، **مجلة دراسات وأبحاث المجلة العربية في العلوم الانسانية والاجتماعية** جامعة الجلفة، العدد 27، جوان 2017، ص ص 29-45.