P-ISSN: 2170-1040

مجلة دفاتر اقتصادية

المجلد: 10– العدد: 01 (2019)، ص: 174-184

E-ISSN: 2602-5426

النمذجة بالمعادلات التفاضلية وتطبيقاتها في العلوم الاقتصادية

Modeling by Using Differential Equations and its application in Economics

محمد بداوي[1]، أبوالقاسم حمدي[2]♦

[1] جامعة عمار ثليجي- الأغواط، الجزائر، badamoh80@yahoo.fr

[2] جامعة عمار ثليجي- الأغواط، الجزائر، Mngment5@gmail.com

تاريخ الاستلام: 2018-12-05 تاريخ القبول: 2019-05-04 تاريخ النشر: 2019-05-31

ملخص:

يناقش هذا البحث كيفية نمذجة بعض المعادلات التفاضلية العادية والجزئية التي تساعد في فهم وتفسير الظواهر الاقتصادية، ويتضمن هذا البحث جزئيتين رئيسيتين، الأولى تتناول المعادلات التفاضلية العادية، مع تطبيق اقتصادي في شرح نماذج "دومار" كمثال لتفسير العلاقة بين الطاقة الانتاجية والطلب الكلي، أما الثانية فتتناول المعادلات التفاضلية الجزئية مع تطبيقاتها الاقتصادية في الأسواق المالية من خلال معادلة "بلاك-شولز" كمثال والمستوحاة من معادلة الحرارة.

وقد تم التوصل إلى أن النمذجة بالمعادلات التفاضلية العادية والجزئية تتيح للباحثين في مجالات الاقتصاد فرصاً لتمثيل الظواهر الاقتصادية في شكل معادلات ومن ثم محاولة إيجاد حلول لها، للوصول أخيراً إلى تفسير وتحليل اقتصادي مبني على نموذج رياضي.

كلمات مفتاحية: معادلات تفاضلية عادية، تفاضل جزئي، معادلة بلاك- شولز، معادلة الحرارة.

تصنيف JEL : B23، C01 ، C52.

Abstract:

This research discusses the modeling by ordinary and differential equations that conclude to understand and explain different economic phenomena, we have divided this research into two parts, the first one focused in the ordinary equations modeling with some examples like explaining the “Domar” model to study the relationship between productive energy and total demand, the second one was about the differential equations modeling and their economic applications in financial markets by using “Black-Scholes” formula as an example.

We have founded that using modeling by partial and ordinary equations offers opportunities for the researchers in Economics to model Economic phenomena in equations, and by trying to solve those equations to reach logic results, to eventually explaining and analyzing those results based on mathematical model.

Keywords: Ordinary differential equations, partial differentiation, equation Black-Scholes, heat equation.

JEL Classification: B23 ; C01 ; C52.

♦المؤلف المرسل

1. مقدمة:

تعتبر العلوم الاقتصادية ضمن مجالات العلوم الاجتماعية عموماً من أهم العلوم التي تهتم بالواقع المعاش والحقيقي للأفراد والمجتمعات، حيث فرضت الكثير من المتغيرات حتمية تطوير المجالات البحثية والدراسية لهذه العلوم، حيث انتقلت من مجرد التحليل المجرد الذي يعطي الفلسفة أهمية كبيرة وتغليباً على الكثير من الأدوات البحثية الأخرى، إلى التحليل المعاصر الذي يعتمد على القواعد الرياضية والإحصائية، والتي تمكن من تكميم العديد من المتغيرات الاقتصادية محل الدراسة من طرف الباحثين.

وعلى إثر النتائج الجيدة التي حققها التوافق بين الاقتصاد والرياضيات عموماً، وبين الاقتصاد والرياضيات التطبيقية خصوصاً، وبعد جني الكثير من الفوائد جرّاء تطوير أدوات التحليل الاقتصادية ذات الطابع الرياضي، برزت هناك بعض الأدوات الرياضية التي أثبتت نجاعتها في تفسير وتحليل كثير من الظواهر الاقتصادية التي يكون فيها المجهول دالةً تحتوي على مشتقة أو مشتقات لها، خاصة تلك التي تعتمد تمثيل المسألة الاقتصادية محل الدراسة والتحليل في شكل معادلات، ومن ثمّ إيجاد حل لتلك المعادلة، وأخيراً بتفسير وتحليل تلك النتائج بناءً على بعض القواعد الاقتصادية الأخرى؛ وقد برزت إلى الساحة الاقتصادية بوجه أكثر وضوحا في بدايات القرن العشرين ما يعرف بالنمذجة بالمعادلات التفاضلية بمختلف درجاتها ورتبها (النمذجة بالمعادلات التفاضلية العادية والجزئية).

1.1. إشكالية البحث:

إشكالية البحث: بناءً على ما تم ذكره سابقا، تتجسد **إشكالية** بحثنا في: **" ما هي مجالات استخدام النمذجة بالمعادلات التفاضلية في ميدان العلوم الاقتصادية؟".**

2.1. فرضية البحث:

فرضية البحث: بناءً الاشكالية السابقة، قمنا بصياغة **الفرضية** التالية: **"تستخدم النمذجة بالمعادلات التفاضلية بنوعيها العادية والجزئية في فهم وتفسير الظواهر الاقتصادية بعد تمثيلها في شكل معادلات مع تفسير لحلولها –المعادلات-".**

3.1. أهداف البحث:

أهداف البحث: تتجلى **أهداف** هذا البحث في العناصر التالية:

- تبيان أهمية تطبيقات الرياضيات التطبيقية في تفسير الظواهر الاقتصادية بمختلف أنواعها؛
- التركيز على تطبيق النمذجة بالمعادلات التفاضلية في بعض الظواهر الاقتصادية وبعض النماذج المقترحة في البحث؛
- إبراز دور النمذجة ليس فقط في تفسير الظواهر الاقتصادية، بل وحتى في إيجاد الحلول لها؛
- تقديم بعض الأمثلة النموذجية لتلك التطبيقات باختيار بعض الحالات المعروفة.

2. ماهية المعادلات التفاضلية:

تعود الجذور التاريخية لتطبيقات المعادلات التفاضلية إلى دراسة الظواهر الفيزيائية، وأول من استخدمها وطبّقها هم كل من: "لورندالمبير" و"ليونهاردأويلر" و"يعقوب برنولي" و"جوزيف فوريي" و"سيمون لابلاس" و"جوزيف لوي لاغرانج". وقد اكتشف "دالمبير" عام (1746) معادلة الموجة أحادية البُعد، وبعد عشر سنين اكتشف "أويلر" معادلة الموجة ثلاثية الأبعاد.

أما تطبيقاتها في الاقتصاد، فقد كان ذلك في بدايات القرن العشرين من طرف كل من "دومار" و"سولو"، حيث طبقا ما يعرف بالمعادلات التفاضلية العادية، وكان ذلك في ميادين التنمية الاقتصادية على وجه الخصوص، أما المعادلات التفاضلية الجزئية فيرجع الفضل إلى "بلاك وشولز" وذلك في ميدان تسعير الخيارات في السوق المالي.

وبشكل عام تساعد النمذجة بالمعادلات التفاضلية في فهم و تفسير الظواهر الاقتصادية وايجاد الحلول المناسبة.

نسمي كل معادلة تفاضلية كل معادلة تحتوي على مشتق واحد على الأقل، فإذا كان $y = f(x)$ تابعا بمتغير حقيقي واحد فأن المعادلة التي تحوي على هذا التابع ومشتقاته تسمى معادلة تفاضلية عادية، وإذا كان $z = f(x,y)$ تابعا لعدة متغيرات(هنا متغيرين x و y) فأن المعادلة التي تحوي على هذا التابع ومشتقاته الجزئية تسمى معادلة تفاضلية جزئية.[1]

1.2. المعادلات التفاضلية العادية وتطبيقاتها في العلوم الاقتصادية:

1.1.2. تعريفها الرياضي: هي معادلة من الشكل $f(x, y, y', y'',...., y^{(n)})$.

2.1.2. مرتبة ودرجة المعادلة التفاضلية: المرتبة (ordre)هي مبنية على عدد الاشتقاقات، والدرجة هي أكبر أسّ لأكبر مشتق يظهر في المعادلة2 ، مثلا:

$y' + y = 5$ من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

$y'' + y'^3 = x$ من المرتبة الثانية والدرجة الأولى.

$y'''^2 + y'^6 = 4$ من المرتبة الثالثة والدرجة الثانية.

3.1.2. تشكيل المعادلة التفاضلية:

تكمن أهمية هذه المعادلات في أنه يمكن التعبير عن معظم الظواهر بمعادلة تفاضلية، وذلك كما يلي:

نشكل أولا المعادلة الجبرية التي تمثل الظاهرة الاقتصادية المراد دراستها ثم نقوم بحذف الثوابت الوسيطية التي تظهر في المعادلة وذلك باشتقاق المعادلة الجبرية عددا من المرات يساوي عدد الثوابت الموجودة في المعادلة الجبرية ونعين الثوابت بدلالة التابع ومشتقاته ونعوضها في المعادلة الجبرية فنحصل على المعادلة التفاضلية التي تمثل هذه الظاهرة.

مثال: ننمذج حركة سهم في بورصة (نفترض أن هذه الحركة تتم وفق قطوع مكافئة)، ما هي المعادلة التفاضلية المعبرة لهذه الحركة؟

أولا: نحدد المعادلة الجبرية وهي: $y=cx^2$ ، ولدينا وسيط واحد (c)، إذن نشتق مرة واحدة لحذفه: $y' = 2cx \Rightarrow c = \frac{y'}{2x} \Rightarrow y = \frac{y'}{2x}x^2 = \frac{1}{2}xy'$ ومنه: $y' = \frac{2}{x}y$ وهي المعادلة التفاضلية المعبرة لهذه لحركة السهم.

النتيجة: عدد الثوابت الوسيطية المختلفة = مرتبة المعادلة التفاضلية الناتجة.

4.1.2. حل المعادلة التفاضلية:

نسمي كل تابع $y = f(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'',...., y^{(n)}) = 0$ حلا لها (أو تكاملا لها أو منحنيا لها) أو تابعا أصليا لها[3].

مثال: $y' = x \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$ هو حل المعادلة لأنه يحققها (منحنى تكاملي لها أي كل حل يقابله منحنى حسب قيم (c).

5.1.2. الحل العام والحل الخاص لمعادلة تفاضلية:

الحل العام: هو الحل الذي يتكون فيه عدد الثوابت = مرتبة المعادلة التفاضلية[4].

الحل الخاص: هو الحل الذي ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت قيما خاصة[5].

مثلا: $y' = x$ حلها العام هو $y = \frac{x^2}{2} + c$ حيث: $x \in IR$ ، و $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $y = \frac{x^2}{2} + 2$, $y = \frac{x^2}{2} + 3$ كلها حلول خاصة.

6.1.2.تصنيف المعادلات التفاضلية العادية

ويمكن تصنيف المعادلات التفاضلية العادية إلى الأنواع الأتية:

أ: المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولىوتنقسم إلى ما يلي:

- المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين وهي من الشكل التالي6:

$$g(y)y' = f(x)$$

- المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى وهي من الشكل التالي[7]:

$$(E): y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

لحل هذه المعادلة ندخل التابع المساعد $x \mapsto t = \dfrac{y}{x}$ ، فيكون لدينا $y = tx$ و $y' = t'x + t$ ، بتعويض y و y' في (E) نحصل على المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة.

- المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى وهي من الشكل التالي[8]:

$(E): \quad y' + a(x)y = f(x)$ معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة (أو بطرف ثاني).

$(E_0): \quad y' + a(x)y = 0$ معادلات تفاضلية خطية متجانسة (أو بدون بطرف ثاني).

- معادلات تفاضلية خاصة نذكر منها يلي:

✓ معادلة برنولي وهي من الشكل التالي[9]: $y' + p(x)y = q(y)y^n \quad ; \quad (n \neq 1)$

✓ معادلة ريكاتي وهي من الشكل التالي[10]: $y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$

ب: المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانيةوتنقسم إلى ما يلي:

- المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة وتكون من الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{ll}(E): & y'' + ay' + by = g \\ (E_0): & y'' + ay' + by = 0\end{array}\right\}$$

لحل المعادلة من الشكل (E) (أي غير متجانسة) نتبع الطريقة الأتية:

أولا نرجع (E) إلى معادلة متجانسة أي من الشكل (E_0)، ثم نستخدم طريقة تغيير الثابت Méthode de variation de constant.

- المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بمعاملات متغيرة:

يمكن أحيانا حل معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية بمعاملات متغيرة بواسطة معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة وذلك بتبديل المتغير، ونأخذ نوع من هذه المعادلات (معادلة أولر) التي تأخذ الشكل الآتي: $(ax+b)^2 y'' + A(ax+b)y' + By = f(x)$، نستخدم التبديل التالي: $ax + b = e^z$ [11]، بعدها نستخدم طريقة المؤثرات(opérateurs) قصد السرعة في إيجاد الحل.

وسنركز على المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة والمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى باعتبار أن لهما تطبيقات في الاقتصاد.

7.1.2.المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرين منفصلين

ليكن J و K مجالين من IR و $f : J \to IR$ ، $g : K \to IR$ تابعين مستمرين ، المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة هي من النمط $y' = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ أو $(E) : g(y)y' = f(x)$ نكتب:

$$\int g(y)dy = \int f(x)\, dx + c$$

إن حل المعادلة (E) يلزم ويكفي أن يوجد ثابت c بحيث: $G(U(x)) = F(x) + c$ مهما يكن $x \in I$.

مثال: نحل المعادلة التفاضلية التالية: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5x}{7y}$.

هنا المتغيران قابلان للفصل: $7y\ dy = 5x\ dx$ إذن: $y^2 = \dfrac{5}{7}x^2 + c$ مع ثابتا اختياريا.

8.1.2.المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى:

$$\left.\begin{aligned} (E):\quad & y' + a(x)y = f(x) \\ (E_0):\quad & y' + a(x)y = 0 \end{aligned}\right\}$$

لحل المعادلة من الشكل (E) (أي غير متجانسة) نتبع الطريقة الأتية:

أولا نرجع (E) إلى معادلة متجانسة أي من الشكل (E_0)، فتصبح معادلة ذات متغيرات منفصلة ومن ثم نستخدم طريقة تغيير الثابت Méthode de variation de constant.

مثال: لنحل المعادلة الأتية: (E)....................$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

نرجع (E) إلى معادلة متجانسة أي من الشكل (E_0).........$y' + 2xy = 0$ ، إنها معادلة ذات متغيرات منفصلة نتبع نفس الطريقة السابقة ونحصل على الحل التالي: $y = Ce^{-x^2}$ بعدها نستخدم طريقة تغيير الثابت ، نبحث عن حلول (E) من الشكل $C(x)e^{-x^2}$ حيث $C(x)$ التابع مجهول وقابل للاشتقاق، ثم نقوم باشتقاق y فيصبح لدينا: $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$ ، بتعويض y و y' في (E) نحصل على: $C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$

ومنه $C'(x) = 2x$ ، بعد المكاملة نجد $C(x) = x^2 + k$ حيث $k \in IR$ ، وبالتالي $y = C(x)e^{-x^2} = (x^2 + k)e^{-x^2}$ هو الحل العام للمعادلة (E).

2.2. تطبيقات اقتصادية باستخدام النمذجة بالمعادلات التفاضلية العادية

يمكن التعبير عن فرضيات النموذج الاقتصادي بمعادلات تفاضلية تكشف لنا حلول بعض التغيرات التي يتميز بها النموذج المقترح، نقترح بعض المعادلات التي طبقت في الميدان الاقتصادي وهي كالاتي:

نموذج دومار:

يوضح هذا النموذج الكيفية التي يصل إليها التوازن في الطلب الكلي وفي الطاقة الانتاجية للاقتصاد، وهذه الطريقة يمكنها أن تحدد المسار الزمني المطلوب تواجده عند وجود شرط توازني معين ويبنى هذا النموذج على الفرضيات الأتية[12]:

أ.اعتبار $K(t)$ رأس المال المستخدم في بلد معين دالة مستمرة بالنسبة للزمن (t) وقابلة للاشتقاق على مجال تغيره ، فاذا رمزنا بـ $I(t)$ للمعدل السنوي للأموال المستثمرة في اللحظة (t) يكون لدينا:

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt}................(1)$$

ونرمز بـ $Y(t)$ لكمية الطلب الكلي السنوي في اللحظة (t) حيث Y بطبيعة الحال تابع لـ t وقابل للاشتقاق في مجال تغيره، وفق شروط الفرضية الأولى في هذا النموذج أن التغير في المعدل السنوي للأموال المستثمرة يؤثر على الطلب الكلي وفق العلاقة التالية[13]:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dY}{dt} S..................(2)$$

حيث S مقدار ثابت (بالنسبة للزمن) حيث يعبر عن النزعة الحدية للادخار.

ب. نسبة الطاقة في البلد إلى رأس المال المستخدم تبقى ثابتة خلال الزمن ونعبر عنها بـ:

$$\frac{E}{K} = P..................(3)$$

نرمز بـ E للطاقة الانتاجية وهي دالة للزمن وبـ P لكمية ثابتة لا تتعلق بالزمن وهي تمثل نسبة الطاقة إلى رأس المال.

ج. يفترض هذا النموذج أن الطاقة الانتاجية مستقلة استقلالا كاملا ، بحيث تتم المساواة في حالة التوازن بين الطلب الكلي والطاقة الانتاجية أي بمعنى أن شرط التوازن هو تساوي الطلب الكلي مع حجم الانتاج الذي يمكن إنتاجه خلال السنة أي $(Y = E)$، وعلى هذا الأساس يكون لدينا: $\frac{dY}{dt} = \frac{dE}{dt}......................(4)$.

وبمقارنة العلاقتين (3) و (4) نستنتج أن: $\frac{dY}{dt} = P\frac{dK}{dt} = PI$

وبتعويض $\frac{dY}{dt}$ بقيمتها في العلاقة (2) نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dI}{dt} = P.I.S................(5)$$

العلاقة التالية تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة، حيث S يعبر عن النزعة الحدية للادخار و P نسبة الطاقة الانتاجية إلى رأس المال المستخدم وهي ثوابت موجبة، أما t و I فتمثلان الزمن والمعدل السنوي للأموال المستثمرة في اللحظة t ولذلك فأن العلاقة (5) يمكن حلها كما يلي:

$$\begin{aligned}
&\frac{dI}{dt} = P.I.S \\
&\therefore \int \frac{dI}{I} = P.S\int dt \\
&\therefore Ln\left|I\right| = P.S.t + c \\
&\therefore I(t) = e^{P.S.t+c} = Ae^{P.S.t}................(6)
\end{aligned}$$

إذا تحققت شروط "دومار" المذكورة سلفا فإن المعدل السنوي للأموال المستثمرة ينمو عبر الزمن بشكل أسي (تصاعدي حسب العلاقة(6).

نتائج:

حتى يتحقق شرط التوازن $\left[\frac{dY}{dt}=\frac{dE}{dt}\right]$ على مدى الزمن فإن الشرط الذي وضعه "دومار" هو أن معدل التدفق الاستثماري $I(t)$ يجب أن ينمو بمعل أسي (أي مقدار يساوي الطاقة إلى رأس المال مضروب في الميل الحدي للادخار)، وهذا يعني أنه كلما زاد معدل النمو الاستثماري كلما كبرت نسبة الطاقة على رأس المال، وكذلك الميل الحدي للادخار.

ولتحديد قيمة الثابت A في العلاقة (6) نضع $t=0$ مع مساواة $I(0)$ بقيمة معينة وهذا ما هو إلا المعدل الابتدائي (في بدء الزمن) السنوي للأموال المستثمرة ومنه نستنتج ما يلي[14]:

$$I=I(0)e^{PSt}\quad\text{..............................}(7)$$

وهناك نماذج أخرى لدومار تطبق فيها المعادلات التفاضلية مثل تمثيل العلاقة بين الدخل الوطني والدين العام ، نموذج "دومار- هارلود" للنمو، نموذج "سولو"،...الخ.

3.2. المعادلات التفاضلية الجزئية

وهي التي تحوي على مشتقة جزئية أو أكثر، و بذلك تتضمن على متغير تابع واحد وأكثر من متغير مستقل ومشتقات المتغير التابع بالنسبة للمتغيرات المستقلة15 ، أي إنها على الصورة التالية :

$$f(x,y,\mu,\mu_x,\mu_y,\mu_{xy},\mu_{xx},\mu_{yy},......)=0 .$$

وتصنف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى ثلاثة أنواع:

1.3.2.القطع الزائدي (hyperbolique) وأبسط أنواعه معادلة الأمواج لـ "دالامبار" ، المعادلة الموجية في الفيزياء هي معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية تصف بشكل عام حركة الأمواج سواء كانت أمواجا صوتية أو ضوئية أو مائية[16].

يمكن صياغة المعادلة الموجية المتجانسة في بعد واحد كالآتي:

$$C^2\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial^2x^2}=\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial^2t^2}$$

هذه الموجة تنتشر في بعد واحد وهو المحور السيني X، والحل العام لهذه المعادلة هو:

$$U(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$$

وهي تتكون من دالتين $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للاشتقاق مرتين ، وفيها يشكل الجمع الأول موجة منتشرة بالسرعة C إلى اليسار ويشكل الجمع الثاني موجة منتشرة بنفس السرعة إلى اليمين.

2.3.2.القطع الناقصي (elliptique) وأبسط أنواعه معادلة "لابلاس"، هي معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية سميت عرفانا للرياضي الفرنسي "بيير لابلاس" الذي يعد أول من درس خواص هذه المعادلة والتي تأخذ الشكل التالي[17]:

$$\frac{\partial^2V(x,y)}{\partial^2x^2}+\frac{\partial^2V(x,y)}{\partial^2y^2}=0$$

الحل يكون كما يلي: $V(x,y)=X_0(x)Y_0(y)+X(x)Y(y)$، حيث:

$$X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)$$
$$X_0(x)=A_0x+B_0$$
$$Y(y)=C\sinh(\lambda y)+D\cosh(\lambda y)$$
$$Y_0(y)=C_0x+D_0$$

3.3.2. القطع المكافئ (parabolique) وأبسط أنواعه معادلة الحرارة، هذه الأخيرة هي التي يتم التركيز عليها لأن لها تطبيقات في الاقتصاد وبالضبط في الأسواق المالية.

تعطى معادلة الحرارة أحادية البعد وهي معادلة تفاضلية جزئية[18] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حيث $a^2 > 0$ ثابت معطى، u دالة حقيقية غير معلومة لمتغيرين حقيقيين x و t، هذه الدالة **$u = u(x; t)$** تمثل درجة الحرارة في ناقل بعده واحد القيمة **$u(x; t)$** تابع للزمن **t** .[19]

مع **$a^2=\lambda/\rho c$**، **λ** كثافة قضيب، **ρ** الكتلة الحجمية و **c** حرارته الخاصة.

سوف نحل هذه المسألة في حالة درجة الحرارة تحت الشروط الاولية **$U(x, 0) = \varphi(x)$**، **φ** هي دالة محدودة وقابلة للتكامل على **IR**. سنفرض **u** قابلة للاشتقاق من الرتبة الثانية (classe **C^2**) بالنسبة لـ **x** و من الرتبة الاولى (C^1 classe) بالنسبة لـ **t** .

إن معادلة انتشار الحرارة لها تطبيقات مهمة في التحليل الاقتصادي، وخاصة في علاج المعادلة الشهيرة **"بلاك – شولز"** وبالضبط في مجال تسعير خيارات البيع والشراء ، وبالفعل فإن هذه المعادلة في ظل شروط معينة **$V=V(t, s)$** (خيار الشراء (call) ، أو البيع (put)) يعتبر معادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة من الرتبة الثانية وهي كالتالي:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rS = 0$$

4.2. الحل التحليلي لمعادلة بلاك - شولز

سنحاول فيما يلي تطبيق معادلة الحرارة المتمثلة في معادلة **بلاك – شولز**[1].

1.4.2. تقييم الصيغة النموذج

نشتق صيغة "بلاك – شولز" السابقة من حيث سعر السهم، فإننا نفترض " شرط مثالي " في السوق للسهم وللخيار.

وقد اقترح "بلاك – شولز" الفرضيات التالية[20]:

- سعر الأساسي يتبع الحركة البراونية الهندسية un mouvement brownien géométrique
- الخيار محل التعاقد من النوع الأوروبي وليس الأمريكي.
- التقلب (la volatilité) هو معروف مسبقا و ثابت.
- من الممكن شراء وبيع الأصول الأساسية في أي وقت وبدون مقابل.
- يسمح للمبيعات على المكشوف من دون قيود.
- لا توجد توزيعات على السهم المعني خلال فترة الخيار (أي حتى تاريخ الاستحقاق).
- معدل الفائدة هو معروف مسبقا ثابت.
- ممارسة الخيار لا يمكن القيام به الا في الموعد المحدد وليس قبل ذلك (الخيار الأوروبي).

[1]- نسبة إلى الرياضي الأمريكي "فيشر بلاك" (1938 - 1995) والخبير الاقتصادي "مايرونشولز" بالإضافة إلى "روبرت ميرتون" ، "شولزوميرتون" تحصلا على جائزة نوبل في الاقتصاد عام (1997) ، أما "فيشر بلاك" فقد توفي قبلها بسنتين (1995).

2.4.2.الترميز: Notations

نرمز**V**قيمة الخيار (سنحدد الخيارات الأوروبية في هذه الدراسة) ، يمكننا أن نميز بين "الشراء**C** "و" والبيع**P** " هما توابع للزمن**t**، حيث**V=V (S, t)**[21]نلاحظ أيضا:

σمعدل تقلب سعر الاصل الضمني.

E سعر تنفيذ الخيارالمالي.

Tمدة حيازة الخيار.

rسعر الفائدة .

5.2. معادلة بلاك – شولز

هي معادلة تفاضلية جزئية تسمح بحساب قيمة الخيار الأوروبي بواسطة تابع للوقت و الاصل المالي.

1.5.2.حالة الخيار الشراء الأوروبي:

نرمز لخيار الشراء الأوربي**C(S,t)**المناظر لقيمة سعر الاصل المالي و**t ϵ [0, T]** ،**T** مدة حيازة الخيار، لدينا المعادلة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}(s,t)+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}(s,t)+rS\dfrac{\partial C}{\partial S}(s,t)-rC(S,t)=0; \quad \forall t\in[0,T],, S\in \square_+ \\ C(s,t)=(S-E)^+=\max(S-E,0) \qquad \forall s\in IR_+ \end{cases} \quad ....(1)$$

وبعد التبسيط:

$$\begin{cases} C(S,t)=SN(d_1)-Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1=\dfrac{Ln\dfrac{S}{E}+(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2=\dfrac{Ln\dfrac{S}{E}+(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \quad ....(10)$$

وبنفس الكيفية مع حالة الخيار الشراء الأوروبي فنتحصل على:

ونتحصل على:

$$\begin{cases} P(S,t)=Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)-SN(-d_1) \\ d_1=\dfrac{Ln\dfrac{S}{E}+(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2=\dfrac{Ln\dfrac{S}{E}+(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \quad ....(11)$$

3. الخلاصة

تؤدي المعادلات التفاضلية بشقيها العادية والجزئية دورا مهما في حل المشكلات التي تعترض الاقتصاديين، وفي بعض الأحيان تكون الجزء الأهم في حل تلك المشكلات؛ ومن خلال ما تم عرضه واستعراضه توصلنا إلى أن للنمذجة بالمعادلات التفاضلية دوراً هاما في المساعدة على تحليل وتفسير الكثير من الظواهر الاقتصادية، وقد قدمنا مجموعة من الأمثلة التطبيقية التي تعتمد على النمذجة سواءٌ تلك المتعلقة بالمعادلات التفاضلية العادية أو الجزئية، منها ما تعلق بالتعامل مع الأزمات المتعلقة بالمخاطر المالية ومشكلات تسعير خيارات البيع والشراء، ومنها ما تعلق بالمسائل الاقتصادية المرتبطة بالاقتصاد الكلي، مثل التوازن في الطلب الكلي والطاقة الانتاجية للاقتصاد.

ولذلك كانت التوصية من خلال هذا البحث في المضي قدما في توظيف الرياضيات التطبيقية في العلوم الاقتصادية عن طريق محاولة البحث عن حلول رياضية منطقية وذات علاقة بالمشكلات الاقتصادية التي لا تكاد تنتهي مشكلة إلا وتخلق مشكلة أخرى، فالعالم اليوم يعيش في ظل تناقضات ومتغيرات متسارعة فرضت من خلالها حتميةً للبحث عن حلول من مختلف العلوم خاصة منها الرياضيات باستلهام بعض أدواتها التي تتعلق بالنمذجة الرياضية عموماً، والنمذجة الرياضية باستخدام المعادلات التفاضلية خصوصاً، وذلك اقتداءً بمثيلاتها في العلوم الفيزيائية.

4. الهوامش والإحالات:

[1]- سعود محمود و بن عيسى لخضر، **التحليل الرياضي**، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2009، ص:67.

[2]- Bronson Richard, costa Gabriel, **differential equation**, 3rd edition, schaum's outlines, McGraw-Hill, New York, USA, p: 1.

[3]- سعود محمود وبن عيسى لخضر، **مرجع سابق**، ص:68.

[4]- Monier jean- marie, **Analyse PCSI-PTSI**, 4ème Edition, Dunod, paris, p:36.

[5]- سعود محمود وبن عيسى لخضر، **مرجع سابق**، ص:69.

[6]- حازيمحمد،**المعادلات التفاضلية العادية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2013، ص:23.

[7]- بابا حامد، **التحليل**،ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2010، ص:74.

[8]- **نفس المرجع**، ص :76.

[9]- إليوتمندلسون،**حساب التفاضل والتكامل**،ترجمة فايز فوق العادة،ملخصات شوم أكاديميا، بيروت، بدون سنة نشر، ص:504.

[10]- حازي مُحَّد، **مرجع سابق**، ص:52.

[11]- **نفس المرجع**، ص:91.

[12]- زغيبشهرزادوبنديبرشيد،**الاقتصادالرياضي**،ديوانالمطبوعاتالجامعية،الجزائر، 2011،ص :165.

[13]- **نفس المرجع**،ص:166.

[14]- **نفس المرجع**،ص:168.

[15] -Baddari.K, Abbassov.A, **Equation de la physique Mathématique Appliquées**, OPU, Alger, 2009, p :05.

[16]- Bernard Schaeffer, **Relativités et quanta clarifiés**, Publibook, Paris, 2007, p:38.

[17] -Kurt Arbenz, Otto Bachmann ,**Eléments d'analyse numérique et appliquée**, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1992 , p:53.

[18] - **Loc.Cit**.

[19]- Gisclon Marguerite, " **A propos de l'équation de la chaleur et de l'analyse de** Fourier", Le journal de maths des élèves, Vol.1, N4, 1998, Np.

[20] - Black Fischer et Scholes Myrlon, "**The pricing of options and corporate liabilities**", The Journal of Political Economy, Vol. 81, N.6, 1973, pp:637-654.

[21] - Auroux Didier, "**Méthodes numérique pour le pricing d’option** ", Polytechnique SOPHIA, Nice, France,2011, Np.