

**Figure 5** : comparaison entre les résultats de la simulation par FLUENT et de la modélisation par MATLAB

## 7.CONCLUSION GENERALE

Le but de ce travail était de faire une modélisation mathématique liées aux problèmes de transfert thermique dans le cas des écoulements des métaux en fonderie.

Un modèle mathématique a été proposé qui régit le transfert thermique eu régime établi pour le cas de deux dimensions sans génération de chaleur et avec changement de phase.

Les résultats obtenus par la MDF et le code MATLAB nous apparait coïncident avec ceux obtenus par la simulation numérique en utilisions FLUENT. Ce qui nous va permettre de valider le model proposé.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Benameur B, Modélisation de la solidification par la méthode d'enthalpie. Mem. Mag, Tlemcen, Algérie, (2013), 88p.
- [2] S.V.Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, Mc Graw-Hill, 1980.
- [3] J.A.Dantzig, J.W.Weise, Modeling of heat flow in sand casting: part II . Applications of the boundry curvature method, Metallurgical transactions, V. 16B, P 205, June 1985.
- [4] David D, Etude expérimentale de la convection naturelle aux abords de parois contant des matériaux a changement de phase. Thèse. Doc, Lyon, 2010, pp : 25- 47.
- [5] Beriache M, Simulation Numérique de la Conduction de Chaleur en 03 Dimensions par la Méthode des Différences Finies en Régimes Permanent et Variable, thèse. Mag. Chlef, 2004, 110p.
- [6] S.V.Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, Mc Graw-Hill, 1980.

La figure 3 montre la variation de la température suivant la direction des y. Il est clair que, comme prévu, la température atteint sa valeur maximale au centre du moule. Or, sur les parois ses valeurs sont minimales. Ceci est expliqué par la grande perte de chaleur sur les frontières du moule considéré initialement à 353 K et a vitesse de coulée de  $v=0.00245$  m/s.

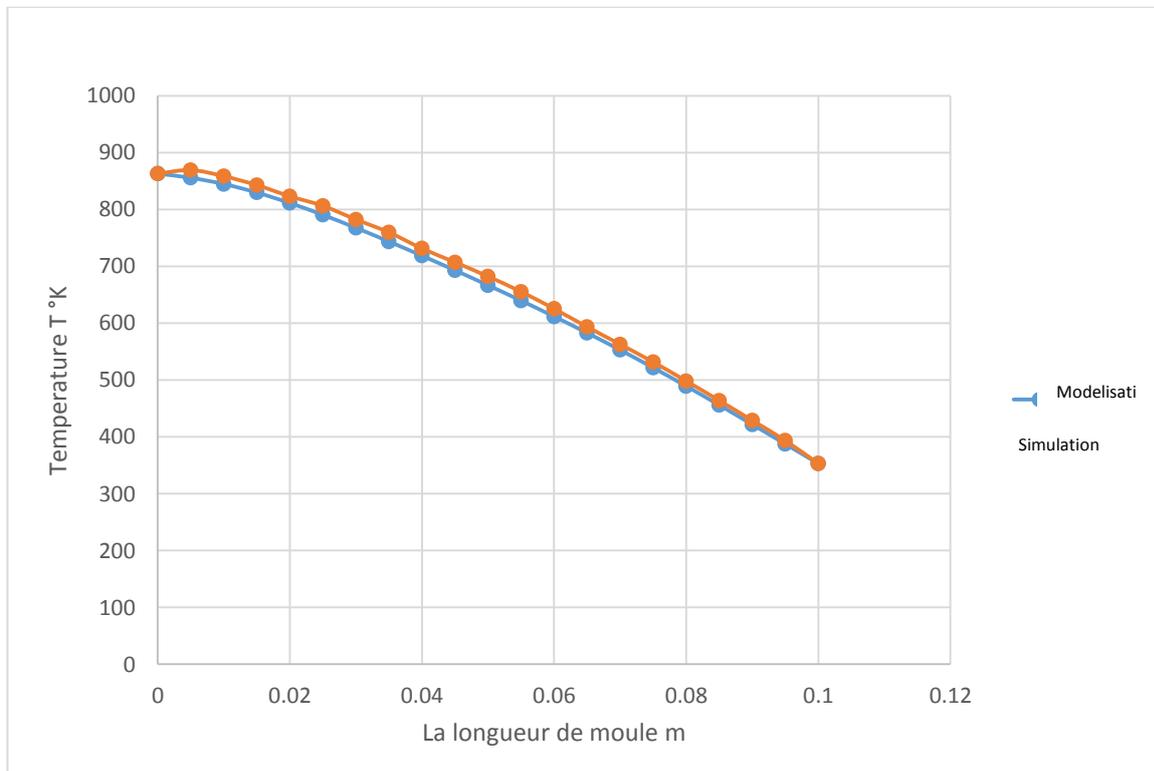
## 6. TESTS DE VALIDATION

La validité du modèle a été examinée par rapport à la simulation numérique (FLUENT) pour des problèmes types dans le cas : convection et diffusion stationnaires en 2D.

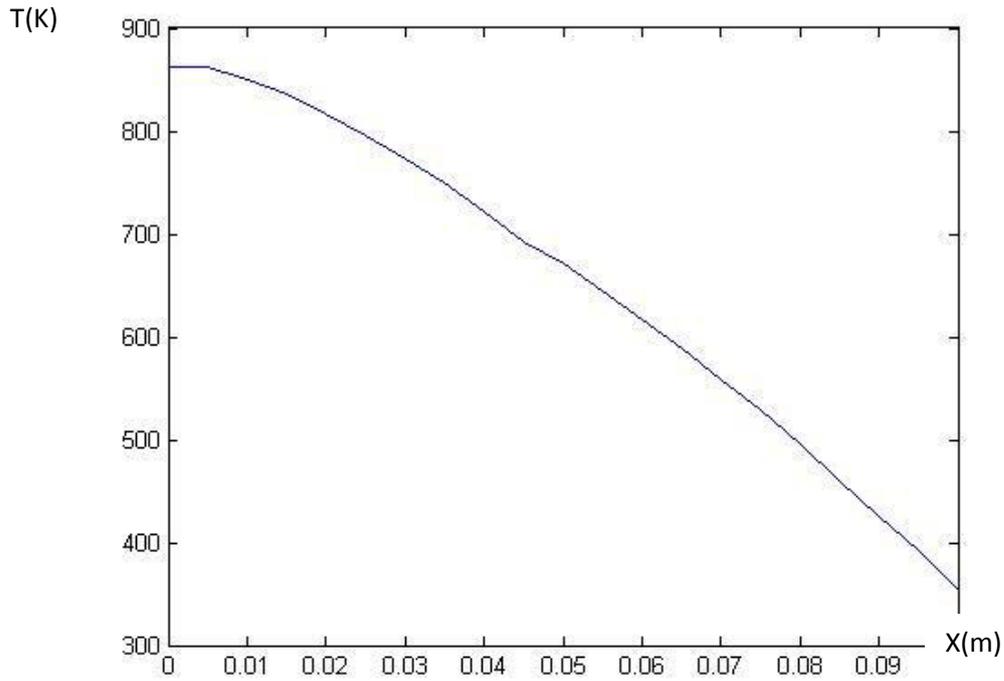
On a simulé le transfert thermique au cours de la solidification dans un moule rectangulaire a une température de moule qui vaut  $353^{\circ}\text{K}$  et a une température de coulé de  $863^{\circ}\text{K}$ .

Les résultats numériques donnés par notre modèle sont présentés dans la figure (4) et (5). Ces valeurs concordent parfaitement avec la simulation numérique qui a utilisé méthode des volumes finis.

Sur la figure (4), nous avons tracé les résultats de la modélisation par MATLAB et par la simulation numérique FLUENT, Les résultats montrent que le schéma de calcul est très stable et permet d'obtenir des positions d'interface avec une erreur inférieure de 3 %.

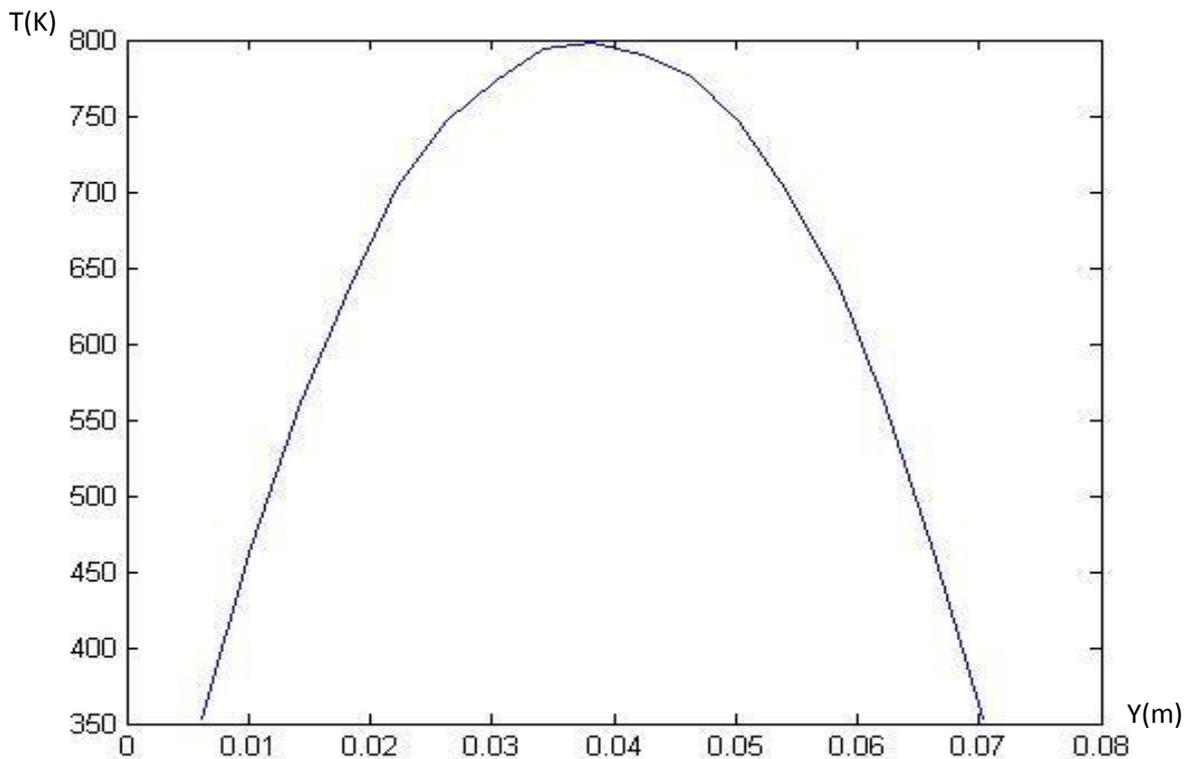


**Figure 4:** Variation de la température en fonction de la longueur de moule



**Figure 2 :** Distribution de la température suivant la longueur du moule  $L_x$ .

Sur la figure 2, nous avons tracé la variation de la température sur la ligne axiale  $x$  du moule. Nous remarquons que la température diminue avec la distance parcourue par le métal en écoulement, cela est dû à la solidification dans le moule suite à la perte de la chaleur vers les parois.



**Figure 3 :** Distribution de la température suivant la hauteur du moule  $L_y$ .

la solution est recherchée en un réseau de points espacés régulièrement ou irrégulièrement pour constituer ce que l'on appelle un maillage. La solution du problème est ensuite calculée en chaque point du maillage par une expression aux différences finies, exprimant la valeur de l'inconnue en un point en fonction de sa valeur aux points voisins [5].

- **Discrétisation de l'équation différentielle de la chaleur**

On va discrétiser les équations différentielles de la chaleur et les conditions aux limites associées par la méthode des différences finies en un système d'équations algébriques et ce pour faciliter leurs résolutions [6].

La ressemblance des problèmes du transfert de chaleur dans tous les points (nœuds) du maillage, nous a permis de regrouper les équations selon les modes de transfert autour du nœud considéré. On distingue alors :

- les nœuds internes,
- les nœuds de l'extrémité droite,
- les nœuds de la limite supérieure
- les nœuds de la limite inférieure
- les nœuds aux coins

## 5.RESULTATS ET DISCUSSION

Nous allons exposer les résultats de la modélisation réalisée par Matlab.

Nous présentons les variations de la température pour différentes valeurs de vitesse de coulé et de déplacement.

- **Résultats de modélisation obtenue par MATLAB**

La sensibilité de la solution numérique d'un problème de convection-diffusion par la méthode des différences finies due à la présence de terme convectif exige un bon choix pour arriver à une solution stable et précise.

La distribution des températures en fonction de position est représentée dans les figures (2), (3).

5. Un terme additionnel à l'équation de chaleur a été pris en considération. C'est le cas où le milieu (ici le métal fondu) change de phase.

### Le modèle mathématique

L'équation générale de la chaleur en régime permanent à deux dimensions avec changement de phase et sans génération de chaleur s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\rho C_{eff}}{K} \cdot V \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\rho V}{K} \cdot H_f \cdot \frac{\partial f_L}{\partial x} \quad [2]$$

Avec :

$$C_{eff} = c^S \cdot f_S + c^L \cdot f_L + \rho \cdot H_f \cdot \frac{\partial f_L}{\partial T} \quad [3]$$

$C_{eff}$  : Chaleur spécifique effective.

$\rho$  : Densité

$C^S$  : Chaleur spécifique de la phase solide de l'alliage Al-Si 13.

$C^L$  : Chaleur spécifique de la phase liquide de l'alliage Al-Si 13.

$f_S$  : Proportion du solide de l'alliage Al-Si 13.

$f_L$  : Proportion du liquide de l'alliage Al-Si 13.

$H_f$  : Chaleur latente de fusion de l'alliage Al-Si 13.

$V$  : Vitesse de l'écoulement du métal liquide dans le moule.

Cette équation peut être mathématiquement simplifiée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left( \frac{\rho C_{eff}}{K} \cdot V + \frac{\rho V}{K} \cdot H_f \cdot \frac{\partial f_L}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial x}$$

## 4. MODELISATION NUMERIQUE

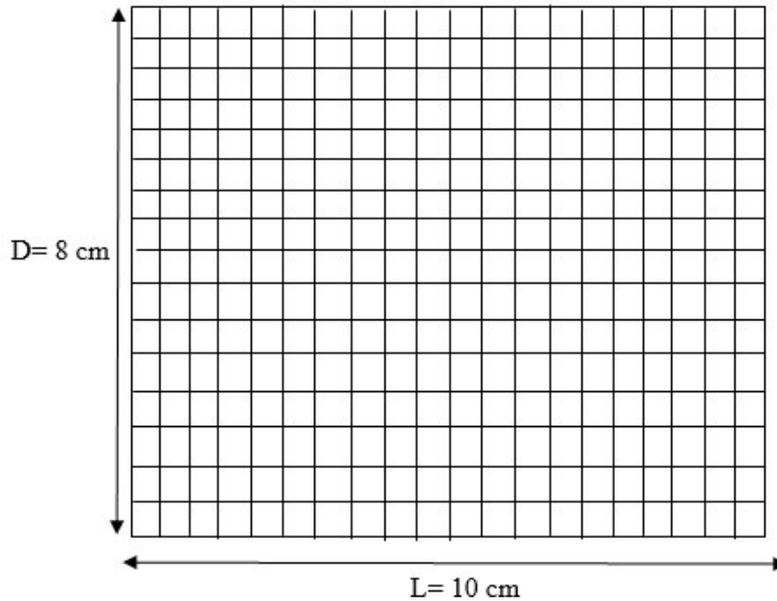
Les méthodes numériques et analogiques fournissent les réponses nécessaires. Quand la résolution analytique d'un système d'équations différentielles devient difficile, on s'oriente vers les approches numériques. A cet effet, la méthode des différences finies (*MDF*) a été utilisée dans la résolution numérique du problème de transfert de chaleur actuel.

- **Méthode des différences finies**

La méthode des différences finies est facile à formuler, peut être facilement étendue aux problèmes bidimensionnels et tridimensionnels [4].

La méthode des différences finies est la méthode numérique la plus ancienne et fut la première utilisée pour résoudre des problèmes thermiques. Elle consiste à diviser le volume de l'espace où

$$\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ cm}$$



**Figure 1.** Schéma 2D du moule

- **Les Données théoriques**

$\rho = 2553 \text{ Kg/m}^3$ ,  $C_L = 1180 \text{ J/Kg.K}$ ,  $C_S = 1200 \text{ J/Kg.K}$ ,  $K = 160 \text{ W/m.K}$ ,  $H_f = 397.10^3 \text{ J/Kg}$ .

Et avec la règle des segments inverses en déduire les fonctions  $f_L(T)$ ,  $F_s(T)$ .

- **Les conditions aux limites**

Dans le cas général on dispose de quatre types de conditions aux limites :

- A l'entrée du domaine : on connaît généralement la valeur de température de l'alliage liquide et la vitesse de coulée.
- Au niveau des parois (le haut, le bas et l'autre extrémité), il est habituellement satisfaisant de supposer que le flux de diffusion est égal au flux de convection naturelle.

### 3. MODELISATION MATHEMATIQUE

Avant d'entreprendre l'étude des problèmes particuliers, nous allons établir le modèle mathématique de l'équation de la chaleur définissant la répartition des températures dans un corps, ensuite à l'aide de certaines hypothèses, nous transformerons cette équation après l'avoir simplifiée afin de la mettre sous des formes appropriées aux cas qui font l'objet de cette étude.

- **Etablissement de l'équation différentielle (équation de la chaleur)**

Il est primordial de mettre des hypothèses sur la base de lesquelles on a abouti la forme finale du modèle dans ce qui suit.

#### Hypothèses

1. Le régime d'écoulement du métal liquide dans le moule est permanent (stationnaire).
2. Le problème de transfert de chaleur a été traité en deux dimensions.
3. Le métal liquide en écoulement ne reçoit aucune chaleur secondaire au-delà de sa température de fusion. Ainsi aucune génération de chaleur n'est prise en compte.
4. Le mode de transfert thermique par rayonnement a été négligé.

## *Modélisation de la solidification de l'alliage*

### *Aluminium silicium Al-Si 13*

*DJOUDI Cheikh*

*Université de Djelfa*

#### **Résumé**

La modélisation numérique du phénomène de solidification a une importance considérable dans la conception virtuelle des procédés d'élaboration des matériaux. Ce phénomène de solidification est caractérisé par la formation d'une frontière mobile qui sépare les deux phases liquide et solide au cours de changement de phase, ce qui nécessite des techniques appropriées pour suivre le mouvement de front et localiser sa position.

Dans cet article, nous avons utilisé la modélisation. Notre modèle basé sur la méthode des différences finies. Notre modèle permet de traiter des problèmes en 2D dans le cas stationnaire, avec changement de phase iso-thermique

Le programme a été fait dans un environnement MATLAB et validé avec le code de Fluent.

**Mots-clés :** solidification, modélisation, simulation, méthode des différences finies, moulage, aluminium, Al-Si 13.

#### **1.INTRODUCTION**

Au cours des deux dernières décennies, la modélisation et la simulation numérique des phénomènes de changement de phase liquide/solide a été un sujet stratégique de recherche grâce à son vaste champ d'application dans les différents domaines industriels et médicaux, comme le domaine d'élaboration des matériaux [1].

L'objectif de ce travail consiste à modéliser l'écoulement de l'alliage à base d'aluminium Al-Si (13%) dans un moule. La méthode des différences finies est considérée comme la méthode la plus utilisée pour résoudre les équations différentielles relatives à la conductivité thermique. Dans ce travail on a utilisé cette méthode pour modéliser et obtenir la solution numérique des équations différentielles du transfert de la chaleur pendant la solidification de cet alliage avec le code MATLAB.

Pour la validation on utilise la simulation du modèle étudié par le compilateur FLUENT qui nous a permettre de connaître les différents paramètres telle que la température de solidification.

#### **2.DISCRETISATION DU PROBLEME**

À un moule de  $D = 8$  cm de largeur avec une longueur  $L=10$  cm.

Dans cette étude et pour des raisons de simplifications nous avons adopté un maillage uniforme comme suit :