

Examen des caractéristiques de propagation du modèle de Preissmann généralisé

L. BENAYADA*
A. KETTAB**
B. MEDELSI*

Résumé

Sur la base d'une étude comparative, entre les solutions analytique et numérique, l'examen des caractéristiques de propagation du modèle numérique de Preissmann généralisé est présenté. Cette étude montre l'influence des paramètres physiques et numériques. Il est difficile de déterminer le couple optimal (θ, ϕ) , ainsi l'expérimentation numérique reste primordial.

I. Introduction

L'étude des écoulements transitoires à surface libre se réduit à l'examen d'un système de deux équations aux dérivées partielles, à savoir le système de Saint Venant [4]. Ce dernier ne possède pas de solution analytique, il est souvent résolu par voies numériques. L'expérience montre que ces méthodes numériques déforment l'image du modèle mathématique de manière fallacieuse par l'introduction de la diffusion numérique [1, 2, 3, 6, 10]. Ainsi, à Toulouse en 1959, Thirriot [9] expérimentait un des premiers programmes de calcul numérique. Il avait la surprise de voir apparaître des ondulations secondaires en front d'onde, alors que les accélérations verticales, cause physique d'un tel phénomène physique, n'étaient pas prise en compte dans le modèle mathématique. D'autre part, lors d'une réflexion sur le calcul de la propagation de crues par la méthode de Muskingum, Cunge faisait remarquer que l'utilisation de la méthode de différences finies fait apparaître de l'atténuation artificielle qui n'existe pas dans le modèle mathématique [3].

Ainsi, Sur la base d'une étude comparative; entre les solutions analytique et numérique, nous avons choisi d'étudier les caractéristiques de propagation du modèle de Saint Venant discrétisé par la méthode de différences inies de type implicite. Cette méthode numérique a donné une large satisfaction lors de son utilisation pour l'examen des écoulements transitoires à surface libre. Particulièrement, notre réflexion portera sur le modèle de Preissmann généralisé. Ce dernier, en plus du paramètre de pondération spatial θ , fait introduire un autre paramètre de pondération temporelle ϕ [1, 8]. L'introduction de ce paramètre s'avère nécessaire, voire même indispensable, en particulier pour la modélisation des écoulements à surface libre avec fond mobile [8] d'où la nécessité

d'examiner ce modèle. Notre contribution concernera les écoulements transitoires à surface libre, étant entendu, qu'il est aisé de généraliser les résultats obtenus aux problèmes similaires. Elle sera fondée sur les travaux de Ponce et al. [5, 6] qui ont examiné les problèmes de stabilité et de convergence du modèle classique de Preissmann [7].

II. Rappel des équations

Après linéarisation des effets de pertes de charge au voisinage de l'écoulement initial considéré comme uniforme, de vitesse v_0 et de hauteur H_0 , les équations linéarisées de l'écoulement transitoire à surface libre se réduisent à:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0 \frac{\partial v}{\partial x} + V_0 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1.II)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \left(\frac{h}{H_0} - \frac{2v}{V_0} \right) \quad (2.II)$$

où, h et v , écarts par rapport à l'écoulement porteur; H_0 et V_0 , hauteur et vitesse en écoulement initial; g , accélération de la pesanteur; x , abscisse le long de l'écoulement; t , temps.

L'examen analytique du système de Saint venant linéarisé, selon l'approche de Von Neumann, montre l'existence d'un phénomène propagation d'onde avec une célérité \hat{c} et une déformation caractérisée par le décrément logarithmique λ [5].

III. Modèle numérique

Comme nous l'avons déjà signalé, le schéma de Preissmann généralisé fera l'objet de nos investigations. Ce schéma à quatre points, décentré dans l'espace et dans le temps (Fig. 1), est fondé sur les approximations suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\phi (f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n) + (1-\phi) (f_j^{n+1} - f_j^n) \right] \quad (1.III)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\theta (f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}) + (1-\theta) (f_{j+1}^n - f_j^n) \right] \quad (2.III)$$

$$f = \theta \left[\phi f_{j+1}^{n+1} + (1-\phi) f_j^{n+1} \right] + (1-\theta) \left[\phi f_{j+1}^n + (1-\phi) f_j^n \right] \quad (3.III)$$

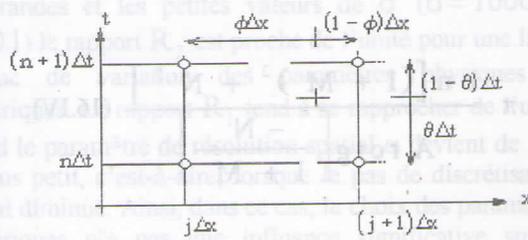


Fig. 1 : Discrétisation dans le plan x, t);

θ et ϕ représentent les coefficients respectifs de pondération temporelle et spatiale.

IV. Recherche des caractéristiques de propagation du modèle de Preissmann généralisé

De manière classique, nous utiliserons l'approche traditionnelle de Von Neumann qui consiste à étudier l'évolution dans le temps et dans l'espace d'une perturbation en forme de composante de Fourier. Ainsi, en grandeur réduite, la solution sera recherchée sous la forme suivante

$$\frac{v}{V_0} = \hat{u} e^{i(\sigma \hat{x} - \beta \hat{t})} \quad (1.IV)$$

$$\frac{h}{H_0} = \hat{h} e^{i(\sigma \hat{x} - \beta \hat{t})} \quad (2.IV)$$

où, $\hat{x} = x/x^*$; $\hat{t} = t/t^*$; avec \hat{u} et \hat{h} amplitudes respectives de vitesse et de hauteur; $t^* = tV_0/L_0$; $L_0 = H_0/I$; I , pente du fond; $\beta = \beta_r + i\beta_I$, facteur de propagation de valeur complexe; $\beta_r = (2\pi/T)(L_0/V_0)$; T , période; β_I , facteur de propagation; $\sigma = (2\pi/L)L_0$, nombre d'onde; L , longueur d'onde; $i = \sqrt{-1}$

Par conséquent, après substitution des équations (1.IV) et (2.IV) dans le système (1.II) et (2.II) discrétisé par les équations (1.III), (2.III) et (3.III), il vient:

$$\hat{u} \left[i\Delta\hat{t}/\Delta\hat{x}(\theta\xi+1)tg\alpha \right] + \hat{h} \left[i\Delta\hat{t}/\Delta\hat{x}(\theta\xi+1)tg\alpha + \xi/2 + i(\phi-0.5)\xi tg\alpha \right] = 0 \quad (3.IV)$$

$$\hat{u} \left\{ F_0^2 \xi/2 + iF_0^2 \Delta\hat{t}/\Delta\hat{x}(\theta\xi+1)tg\alpha + \Delta\hat{t}(\theta\xi+1) + i(\phi-0.5)tg\alpha \left[F_0^2 \xi + 2\Delta\hat{t}(\theta\xi+1) \right] \right\} + \hat{h} \left[i\Delta\hat{t}/\Delta\hat{x}(\theta\xi+1)tg\alpha - \Delta\hat{t}/2(\theta\xi+1) - i(\phi-0.5)\Delta\hat{t}tg\alpha(\theta\xi+1) \right] = 0 \quad (4.IV)$$

où, $\xi = e^{-i\beta\Delta\hat{t}} - 1$; $\alpha = \sigma \Delta\hat{x}/2$, paramètre de résolution spatiale; $C = \bar{c}\Delta\hat{t}/\Delta\hat{x}$; \bar{c} est la célérité théorique; F_0 , nombre de Froude.

Partant des équations (3.IV) et (4.IV), l'unique solution, physiquement acceptable, correspond à l'annulation du déterminant, soit :

$$\xi^2 (M_2 + iN_2) + \xi (M_1 + iN_1) + (M_0 + iN_0) = 0 \quad (5.IV)$$

avec,

$$M_0 = (1 - F_0^2)(C/\bar{c})^2 tg^2\alpha - 6(\phi - 0.5)(C/\bar{c})^2 (\alpha/\bar{\sigma}) tg^2\alpha \quad (6.IV)$$

$$N_0 = 3(C/\bar{c})^2 (\alpha/\bar{\sigma}) tg\alpha \quad (7.IV)$$

$$M_1 = 2\theta(1 - F_0^2)(C/\bar{c})^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + (C/\bar{c})(\alpha/\bar{\sigma}) - 2(\phi - 0.5)(C/\bar{c})\operatorname{tg}^2 \alpha [F_0^2 + 6\theta(C/\bar{c})(\alpha/\bar{\sigma}) + 2(\phi - 0.5)(\alpha/\bar{\sigma})] \quad (8.IV)$$

$$N_1 = F_0^2 (C/\bar{c}) \operatorname{tg} \alpha + 6\theta(C/\bar{c})^2 (\alpha/\bar{\sigma}) \operatorname{tg} \alpha + (\phi - 0.5)(C/\bar{c})(\alpha/\bar{\sigma}) \operatorname{tg} \alpha \quad (9.IV)$$

$$M_2 = \frac{F_0^2}{4} + \theta(C/\bar{c})(\alpha/\bar{\sigma}) + \theta^2(1 - F_0^2)(C/\bar{c})^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - (\phi - 0.5)\operatorname{tg}^2 \alpha \{ 6\theta^2(C/\bar{c})^2 (\alpha/\bar{\sigma}) + (\phi - 0.5)F_0^2 + 2\theta(C/\bar{c}) [F_0^2 + 2(\phi - 0.5)(\alpha/\bar{\sigma})] \} \quad (10.IV)$$

$$N_2 = 3\theta^2(C/\bar{c})^2 (\alpha/\bar{\sigma}) \operatorname{tg} \alpha + \theta F_0^2 (C/\bar{c}) \operatorname{tg} \alpha + (\phi - 0.5) \operatorname{tg} \alpha [F_0^2 + 4\theta(C/\bar{c})(\alpha/\bar{\sigma})] \quad (11.IV)$$

La solution est donnée par :

$$\xi_{1,2} = M + iN \quad (12.IV)$$

avec,

$$M = \frac{-M_2(M_1 \pm E) + N_2(-N_1 \pm D)}{2(M_2^2 + N_2^2)} \quad (13.IV)$$

$$N = \frac{M_2(-N_1 \pm D) + N_2(M_1 \pm E)}{2(M_2^2 + N_2^2)} \quad (14.IV)$$

où, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda = 1$ pour $Y > 0$; $\lambda = -1$ pour $Y < 0$

$$E = \sqrt{(\rho + X)/2} \quad D = \sqrt{(\rho - X)/2}$$

$$X = M_1^2 - N_1^2 - 4(M_2 M_0 - N_2 N_0)$$

$$Y = 2[M_1 N_1 - 2(M_2 N_0 + N_2 M_0)]$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

La détermination de la valeur de ξ permet d'évaluer aisément la célérité numérique \bar{c}_n et le décrement numérique δ_n , à savoir:

$$\bar{c}_n = \frac{1}{2\alpha(C/\bar{c})} \operatorname{Arctg} \left[\frac{-N}{1+M} \right] \quad (15.IV)$$

$$\delta_n = \pi \frac{\operatorname{Ln} [(1+M)^2 + N^2]}{\operatorname{Arctg} \left[\frac{-N}{1+M} \right]} \quad (16.IV)$$

V. Examen des caractéristiques de propagation

L'étude des caractéristiques de propagation se fait à partir de l'examen de l'évolution des rapports R_1 et R_2 définis comme suit:*

$$R_1 = e^{(\delta_n - \delta)} \quad \dots\dots\dots(1.V)$$

$$R_2 = \frac{\bar{c}_n}{\bar{c}} \quad \dots\dots\dots(2.V)$$

Le rapport R_1 caractérise l'évolution de l'amplitude de l'onde. $R_1 > 1$ correspond à une amplification numérique supérieure à l'amplification physique et réciproquement. $R_1 = 1$ caractérise l'égalité des amplifications, c'est-à-dire, coïncidence des amplitudes.

Le rapport R_2 définit la déformation de l'onde, ainsi $R_2 > 1$ conduit à une vitesse de propagation de l'onde numérique supérieure à l'onde physique et réciproquement. Le cas particulier de $R_1 = R_2 = 1$ caractérise la reproduction exacte de la solution mathématique par la voie numérique.

Pour limiter le nombre de page, nous nous sommes limités à l'examen de la première onde numérique uniquement. L'écoulement est considéré fluvial. Pour ne pas surcharger les Figures 2 et 3, seul le cas lié à $F_0 = 0.1$ est présenté. Le nombre d'onde $\hat{\sigma}$ sera examiné dans la plage $0.1 \leq \hat{\sigma} \leq 1000$. Le paramètre spatial de résolution α est compris entre $\pi/10$ et $\pi/100$. Cette large plage de variation permet l'analyse des grands et faibles pas d'espace. La valeur de C est comprise entre $0.25 \leq C \leq 1$. Le coefficient de pondération θ sera étudié de manière continue de 0 à 1. Enfin, trois valeurs du paramètre de pondération ϕ seront considérées, à savoir, 0.3, 0.5 et 0.9. Evidemment, le cas particulier de $\phi = 0.5$ a déjà fait l'objet d'une étude par Ponce et Al. [6], Néanmoins, il est présenté ici à titre de comparaison.

Notre expérimentation numérique montre que pour les grandes et les petites valeurs de $\hat{\sigma}$ ($\hat{\sigma} = 1000$ et $\hat{\sigma} = 0.1$) le rapport R_2 est proche de l'unité pour une large gamme de variation des paramètres physiques et numériques. Le rapport R_1 tend à se rapprocher de l'unité quand le paramètre de résolution spatial α devient de plus en plus petit, c'est-à-dire, lorsque le pas de discrétisation spatial diminue. Ainsi, dans ce cas, le choix des paramètres numériques n'a pas une influence significative sur le résultat obtenu. Aux grandes valeurs de α ($\alpha = \pi/10$), et pour une même valeur de θ , la solution sera amplifiée ou atténuée selon le choix du paramètre ϕ .

Dans le cas où $\hat{\sigma} = 10$ le comportement est différent. En effet, à la différence des deux cas précédents, pour $\hat{\sigma} = 10$ la célérité analytique est variable avec les caractéristiques de l'écoulement porteur. Dans ce cas le rapport R_2 est supérieur à 10 pour différentes valeurs du couple (θ, ϕ) est donc la solution est complètement déformée.

VI. Conclusion

Selon l'approche de Von Neumann, l'examen de la diffusion numérique dans le modèle Preissmann généralisé appliqué aux écoulements transitoires à surface libre est présenté dans ce travail. Cette diffusion traduite par deux paramètres que sont les rapports R_1 et R_2 à fait l'objet de notre réflexion.

Les rapports R_1 et R_2 dépendent d'un nombre considérable de paramètres, qui cependant peuvent être classés en deux familles: paramètres physiques (F_0, σ) et paramètres numériques (α, C, θ, ϕ). Pour limiter l'étendu de notre texte, seule l'étude de la première onde sera exposée. D'autre part, l'écoulement est considéré uniforme.

Le choix du paramètre de résolution spatial α est préjudiciable sur les caractéristiques de propagation. En effet, pour les faibles valeurs de α la solution numérique tend à se confondre avec la solution analytique indépendamment du couple (θ, ϕ) . En revanche, pour les grandes valeurs de α ($\alpha = \pi/10$), la solution peut devenir instable pour certaines valeurs du couple (θ, ϕ) .

Enfin, pour les valeurs proche de $\hat{\sigma} = 10$, la solution est complètement déformée pour une large gamme du couple (θ, ϕ) , cela est certainement dû au fait que la valeur analytique de la célérité n'est plus constante, mais variable avec $\hat{\sigma}$ et F_0 . Aussi, il faut signaler, dans ce cas, l'influence du nombre de Froude sur les caractéristiques de propagation.

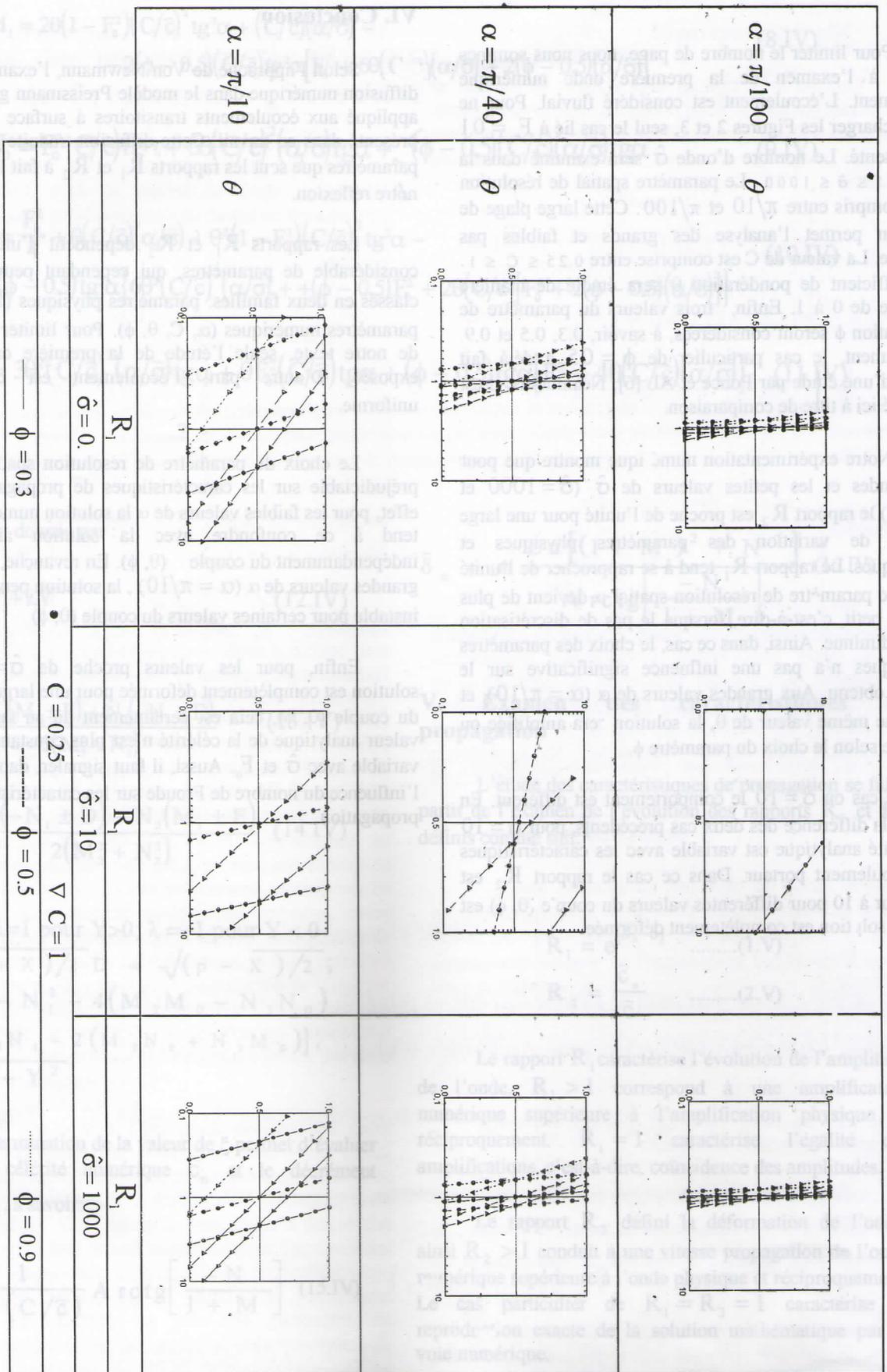


Fig. 2. Evolution du rapport R_1 pour différentes valeurs des paramètres physiques et numériques: cas de $F_0 = 0$.

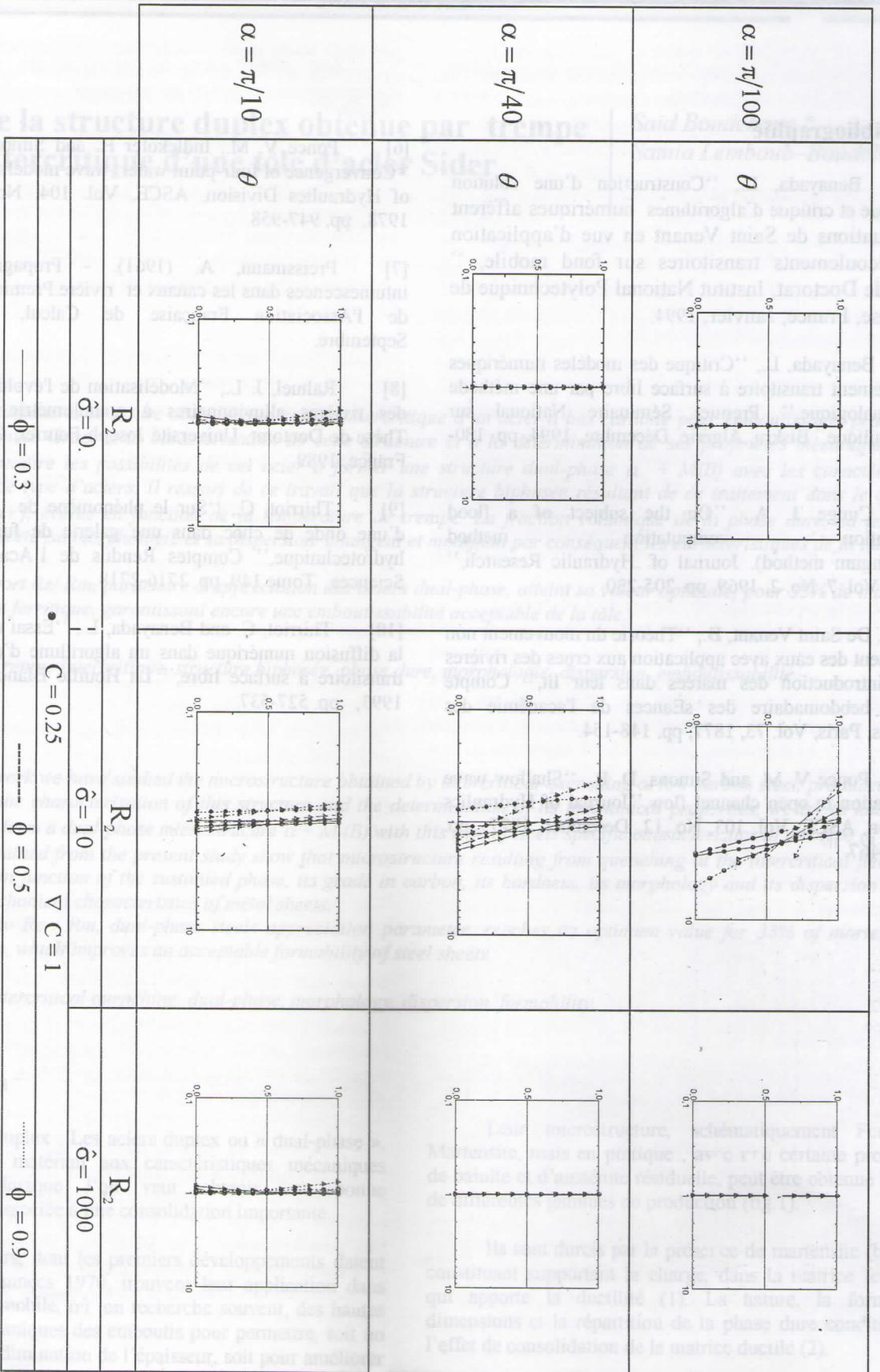


Fig. 3. Evolution du rapport R_2 pour différentes valeurs des paramètres physiques et numériques: cas de $F_0 = 0.$

VII. Bibliographie

- [1] Benayada, L., "Construction d'une solution analytique et critique d'algorithmes numériques afférent aux équations de Saint Venant en vue d'application aux écoulements transitoires sur fond mobile," Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, Janvier, 1994.
- [2] Benayada, L., "Critique des modèles numériques d'écoulement transitoire à surface libre par une méthode dite analogique," Premier Séminaire National sur l'Hydraulique, Biskra, Algérie, Décembre, 1994, pp. 180-191.
- [3] Cunge J. A., "On the subject of a flood propagation computation method (Muskingum method). Journal of Hydraulic Research," ASCE, Vol. 7, No. 2, 1969, pp. 205-230.
- [4] De Saint Venant, B., "Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit," Compte rendus hebdomadaire des séances de l'académie des sciences, Paris, Vol. 73, 1877, pp. 148-154.
- [5] Ponce V. M. and Simons, D. B., "Shallow wave propagation in open channel flow," Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 103, No. 12, December, 1977, pp. 1464-1467.
- [6] Ponce V. M., Indlekofer H. and Simons, D. B., "Convergence of four-point water wave models," Journal of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 104, No. 7, July, 1978, pp. 947-958.
- [7] Preissmann, A. (1961). - Propagation des intumescences dans les canaux et rivière. Premier Congrès de l'Association Française de Calcul, Grenoble, Septembre.
- [8] Rahuel, J. L., "Modélisation de l'évolution du lit des rivières alluvionnaires à granulométrie étendue," Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, France, 1989.
- [9] Thirriot, C., "Sur le phénomène de propagation d'une onde de choc dans une galerie de fuite d'usine hydrotechnique," Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 149, pp. 2716-2718.
- [10] Thirriot, C. and Benayada, L., "Essai critique sur la diffusion numérique dans un algorithme d'écoulement transitoire à surface libre," La Houille Blanche, No. 8, 1993, pp. 527-537.