Etude de l'équation de Navier-Stokes stochastique non homogène

Mohamed Lakhdar Hadji

Laboratoire de Probabilité et Statistique, Département de Mathématiques,
Université Badji Mokhtar, BP 12, Annaba, Algérie.

Révisé le 28/06/2013
Accepté le 10/04/2013

ملخص
الهدف من هذا البحث هو دراسة إيجادية ووحدانية حل معادلات نيفي ستوكس غير المتجانسة حسب الطريقة المباشرة لفايدو قيليركنغ[1]في البحث نعتبر مشكل سائ، التركيز يتغير حسب الوقت اوخليط من عدة سوائل. في هذه الدراسة، نقدم نتائج تحليلية و عددية في حالة مإذا القوة الخارجية لها تذبذب عشوائي.

الكلمات المفتاحية *: ميكانيك السوائل - معادلات عشوائية - الطريقة لي فايدو قيليركنغو.*

Résumé
Le travail de cet article consiste à étudier l'existence et l'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes stochastiques et non homogènes selon une méthode directe due à Faedo-Galerkin [1]. Cette méthode consiste à approcher les solutions de ces équations dans un espace de dimension finie. Dans ce présent travail, nous considérons un problème d'un fluide où la concentration change avec la variable temporelle ou bien le mélange de deux fluides de différentes concentrations. Dans notre étude, nous présentons des résultats analytiques et numériques pour le cas où la force extérieure est soumise à une perturbation aléatoire.

Mots clés : *Mécanique des fluides - Equations Stochastiques - Méthode de Faedo - Galerkin.*

Abstract
The work of this paper consists in studying the existence and the uniqueness of the solution of the non-homogenous stochastic equation of Navier-Stokes, according to a direct method, namely the Faedo-Galerkin Method [1]. This method is based on seeking approximated solutions in a finite dimensional space. In this present work we consider a problem for a fluid with time-dependant concentrations or a mixture of two fluids with different concentrations. In our study, we present analytical and numerical results for the case where the external force is subjected to a random perturbation.

Keywords: *Fluid Mechanic - Stochastic Equation - Faedo - Galerkin Method.*

Auteur correspondant : ml_hadji@yahoo.fr

1. INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles ont été introduites pour modéliser l'évolution de nombreux phénomènes physiques tels que le comportement des fluides. Il n'est néanmoins pas toujours possible d'avoir une approche déterministe de tous les facteurs influents sur le phénomène physique considéré. On est donc amené à bruiter les équations qui deviennent de fait des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS).

Un exemple de phénomène physique grandement étudié est le comportement des fluides incompressibles. Leur évolution est décrite par les équations de Navier Stokes (Voir Temam [2]), dans le cas bruité, on obtient ainsi les équations de Navier Stokes Stochastiques (NSS). Du fait de la différence profonde des propriétés connues des équations de NSS bidimensionnelles et tridimensionnelles, nous les traitons comme des systèmes d'équations fondamentalement différentes, vu qu'elles représentent des EDPS fortement dissipatives.

Les équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes, modélisent le mouvement d'un fluide visqueux, incompressible non homogène, soumis à une perturbation aléatoire décrite par un mouvement Brownien standard. Ce phénomène apparaît, à la rencontre de fluides de différentes concentrations ou bien quand la concentration change en fonction du temps. Ces équations ont été étudiées, entre autres, par Bensoussan et Temam [3], Yashima [4]. Viot [5 - 6] a étudié le problème des martingales correspondant aux équations stochastiques de type Navier Stokes. Cet auteur a démontré le théorème d'existence d'une solution avec une formulation qui lui a permis d'affaiblir la condition sur la régularité spatiale de la perturbation donnée. A travers cette approche Viot [6] a démontré l'existence d'une solution, par contre l'unicité n'a pas été prouvée. Afin de remédier à ce problème d'unicité de la solution, nous procédons par une autre approche, en nous basant sur la méthode de Faedo-Galerkin [1]. Des solutions approchées pour certaines équations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes [7] sont construites quand la force extérieure est soumise à une perturbation aléatoire.

Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes [8 - 10] :

$$\rho\partial_t u + \rho\left(u\cdot\nabla\right)u - \nu\Delta u + \nabla p = \rho f \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot u = 0 \qquad (2)$$

Tel que $\left(u\cdot\nabla\right) = \sum_{i=1}^{i=3} u_i \partial_{x_i}$ (2)

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{i=3} \partial_{x_i} u_i$$

On désigne par : u = u(t ; x), p = p(t ; x), f = f(t ; x) la vitesse, la pression hydrodynamique et la force extérieure respectivement au point (t ; x), et par ρ et ν la densité du fluide et le coefficient de viscosité respectivement. La plupart des études faites antérieurement portent sur le cas où ρ et ν sont deux constantes positives et le fluide est homogène, c'est-à-dire toutes ces parties ont les mêmes propriétés matérielles. Dans ce travail, on s'intéresse au mouvement d'un fluide visqueux incompressible non homogène. Par exemples, mélange de deux matières fluides ou d'une solution dont la concentration varie d'une partie à une autre de l'ensemble de la solution. Dans ce cas les paramètres ρ et ν sont pris en fonctions du temps t et de l'espace x. La viscosité (ν) a partout la même valeur pour qu'il n'y ait pas de diffusion de concentration. Sous ces hypothèses ρ n'est plus une constante c'est-à-dire ρ = ρ(t ; x) et doit satisfaire l'équation :

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\left(\rho u\right) = 0 \qquad (3)$$

L'équation (3) représente la loi de conservation de la matière sous l'hypothèse de l'absence de diffusion de la densité.

Soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, on définit les espaces :

$$V^\infty = \left\{ u \in \left(C_0^\infty\left(O\right)\right)^3 / \nabla\cdot u = 0\, dans\, O \right\}$$

$$V^0 = adherence\, de\, V^\infty\, dans \left(L^2\left(O\right)\right)^3$$

$$V^1 = adherence\, de\, V^\infty\, dans \left(H^1\left(O\right)\right)^3$$

Un fluide est composé en général de molécules sans lien rigide entre elles. Inévitablement, il est soumis à des fluctuations. Il est donc évident que le problème des équations du mouvement du fluide doit tenir compte de la variation due à ces fluctuations, dont leur description, de part leur propre nature, ne peut être qu'aléatoire. Les équations envisagent la contribution des fluctuations sous forme d'une perturbation stochastique. Dans notre étude, le fluide est incompressible et il convient de considérer le champ de vitesse u comme fonction de t à valeurs dans l'espace V^0, introduisons la projection orthogonale Pr :

Pr = projection orthogonale de $\left(L^2(O)\right)^3$ sur V^0

On a : $\forall p \in H^1(O)$ Pr∇p=0

Si on applique l'opérateur Pr à l'équation (1) elle se réduit à :

$$\mathrm{Pr}\rho\partial_t u + \mathrm{Pr}\rho(u\nabla)u - \mathrm{Pr}\,\nu\Delta u = \mathrm{Pr}\rho f \quad (4)$$

Cette équation jointe à la condition (5) peut se substituer au système d'équations ((1)-(2)).

$$u(t,\cdot) \in V^1 \quad (5)$$

Si la force extérieure est soumise à une perturbation stochastique, alors on considère l'équation stochastique suivante:

$$\mathrm{Pr}\rho du + \left(\mathrm{Pr}\rho(u\nabla)u - \mathrm{Pr}\,\nu\Delta u\right)dt = \mathrm{Pr}\rho\, f dt + \mathrm{Pr}\rho dG$$

Dans notre étude, cette dernière équation est limitée au cas où G est un processus à valeurs dans V^0, tel que la différence $G(t+\Delta t) - G(t)$ est la variation du champ de vitesse u par rapport à la solution des équations ((1)-(3)) pendant la période $[t, t+\Delta t]$. Quand le fluide est non homogène, le système d'équations ((1)-(3)) est complété par (6) qui est exactement (3).

$$\partial_t \rho + u\cdot\nabla\rho = 0 \quad (6)$$

((1)-(3)) avec la condition (5) est appelé le système des équations de Navier Stokes stochastiques non homogènes. Quand le fluide est homogène ρ est une constante positive et l'équation (6) est superflue. Pour compléter ce système on ajoute les conditions initiales :

$$u_{t=0} = u_0$$

$$\rho_{t=0} = \rho_0$$

mais aussi des conditions aux limites, qui consistent à l'adhérence du fluide à la frontière.

2. EQUATIONS APPROCHEES

Cette section est consacrée à la formulation approchée des équations dont les solutions constituent l'approximation de ((1)-(3)) par la méthode de Faedo-Galerkin.

Soit l'opérateur $-\mathrm{Pr}\Delta$, qui est auto-adjoint, défini positif et que ses valeurs propres normalisés e_j forment une base orthonormale dans l'espace V^0, qui est un Hilbertien. Les valeurs propres λ_j correspondantes à e_j, vérifient la relation $\lambda_j \le \lambda_{j+1}$.

Pour s∈ $\mathbb{R}_+$, on considère l'espace

$$V^s = \left\{ u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\lambda_j,\ a_j \in R,\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2 < \infty \right\}$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{V^s} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit V_m le sous-espace de V_0 engendré par $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$, tel que :

$$V_m \subset V^s \subset \left(H^s(O)\right)^3$$

avec l'analogue Pr_m dans (4) :

Pr_m = projection orthogonale de $\left(L^2(O)\right)^3$ sur V_m

on considère les équations

$$\left(\rho du \middle| e_j\right) = -\left(\rho(u\cdot\nabla)u \middle| e_j\right)dt - \left(\nabla u \middle| \nabla e_j\right)dt + \left(\rho f^m \middle| e_j\right)dt\left(\rho dG^m \middle| e_j\right)\quad j = 1,2,.....,m \quad (7)$$

$$\partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0 \text{ dans } [0,T]\times O \quad (8)$$

$$u(\omega,t) \in V_m\ \forall t \in [0,T] \quad (9)$$

$$u(0) = u_0^m \quad (10)$$

$$\rho(0) = \rho_0^m \quad (11)$$

où $u_0^m, \rho_0^m \in C^1(O)$

$u_0^m \prec \underline{c}_P \le \rho_0^m(x) \le \bar{c}_P \prec \infty$

$\forall x \in O \quad f^m \in L^2\left(0,T,\left(L^2(O)\right)^3\right)$

G^m est un processus stochastique continu à valeurs dans V_m et est défini sur un espace de probabilité (Ω, F, P). La solution du système d'équations ((7)-(11)) sera obtenue en résolvant les équations pour chaque $\omega\in\Omega$ fixé. Pour cela, on considère les équations déterministes suivantes :

$$\left(\rho du \middle| e_j\right) = -\left(\rho(u\cdot\nabla)u \middle| e_j\right)dt - \left(\nabla u \middle| \nabla e_j\right)dt + \left(\rho f^m \middle| e_j\right)dt\left(\rho dG^m \middle| e_j\right)\quad j = 1,2,.....,m \quad (12)$$

$$\partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0 \text{ dans } [0,T]\times O \quad (13)$$

$$u(t) \in V_m\ \forall t \in [0,T] \quad (14)$$

$$u(0) = u_0^m \quad (15)$$

$$\rho(0) = \rho_0^m \quad (16)$$

où u_0^m, ρ_0^m *et* f^m sont définis comme précédemment, tandis G^m est une fonction continue et définie sur $[0,T]$ à valeurs dans V_m.
Si on pose

$$y_j(t) = \left(u(t)\middle|e_j\right), y_t^0\left(u(t)\middle|e_j\right),$$

$$\Gamma(t) = \left(G^m(t)\middle|e_j\right)$$

on a

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{m} y_j(t) e_j(x)$$

$$u_0^m(x) = \sum_{j=0}^{m} y^0(t) e_j(x)$$

$$G^m(t,x) = \sum_{j=0}^{m} \Gamma_j(t) e_j(x)$$

de même on pose

$$\alpha_{jk}(t) = \int_O \rho(t,x) e_k(x) \cdot e_j(x) dx$$

$$b_{jkl}(t) = \int_O \rho(t,x)(e_k(x) \cdot \nabla) e_l(x) \cdot e_j(x) dx$$

$$c_j(t) = \int_O \rho(t,x) f^m(t,x) \cdot e_j(x) dx$$

pour trouver

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}(t) dy_k(t) = \sum_{k,l=1}^{m} b_{jkl}(t) y_k(t) y_i(t) dt$$
$$-\lambda_j y_j(t) dt + c_j(t) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{jk}(t) d\Gamma_k(t)$$

$$j = 1, 2..., m \qquad (17)$$

en multipliant (17) par $\left(\alpha^{-1}\right)(t)$
on obtient :

$$dy_j(t) = -\left(\sum_{k,l=1}^{m} \beta_{jkl}(t) y_k(t) y_i(t)\right) dt -$$
$$\left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}(t) y_k(t)\right) dt + \varphi_j(t) dt + d\Gamma_j(t)$$

$$j = 1, 2, ..., m \qquad (18)$$

La condition (10) devient

$$y_j(0) = y_j^0 \qquad (19)$$

Pour résoudre le système ((12)-(16)). On a besoin de résoudre le problème suivant :

Problème $(N)_m$

Trouver un processus stochastique y à valeurs dans V_m tel que y satisfait les équations ((18)-(19)). Si on pose : $u(t,x) = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j(x)$, avec $\rho(t,x)$ donnée par l'équation (8) et la condition initiale (11).
Pour pouvoir résoudre ce problème, on procède par une linéarisation comme suit :

Problème linéarisé $(L)_m$

Etant donnée une fonction continue $\overline{y}$ définie sur $[0,T]$ à valeurs dans V_m qui satisfait les équations suivantes

$$dy_j(t) = -\left(\sum_{k,l=1}^{m} \overline{\beta}_{jkl}(t) \overline{y}_k(t) y_l(t)\right) dt$$
$$-\left(\sum_{k=1}^{m} \overline{\gamma}_{jk}(t) y_k(t)\right) dt + \overline{\varphi}_j(t) dt + d\Gamma_j(t)$$
$$j = 1, 2..., m \quad y_j(0) = y_j^0$$

on a le résultat suivant :

Théorème 1

Le problème ((18)-(19)) admet une solution unique $(u, p) \in C(0,T,V_m) \times C^1([0,T], O)$.

Preuve

Pour démontrer ce théorème, on définit l'opérateur γ de $C(0,T,V_m)$ dans $C(0,T,V_m)$ par z = y$\underline{z}$ avec z(x) est la solution du problème $(L)_m$ et $\underline{y(x)} = \underline{z(x)} + \underline{\gamma(x)}$. On démontre que γ est compacte pour pouvoir utiliser le théorème du point fixe et résoudre $(N)_m$.
Pour plus de détails voir [11].

Théorème 2

Il existe une paire de variables aléatoires (u, p) (par rapport au même espace de probabilité), à valeurs dans $C(0,T,V_m)$ et $C^1([0,T] \times O)$ respectivement, et une seule qui satisfait le système d'équations ((7)-(11)).

Démonstration

D'après le théorème 1, pour presque tout ω, le problème ((12)-(16)) avec $G^m = G^m(\omega)$ admet une et une seule solution :

$$(u,p) = (u(\omega), p(\omega)) \in C(0,T,V_m) \times C^1([0,T] \times O)$$

Il suffit de démontrer que l'application $G^m \in C(0,T,V_m) \to (u,p)$ définie par la solution unique obtenue dans le théorème 1 est mesurable.

Soient G^m *et* $\overline{G}^m$ deux éléments de $C(0,T,V_m)$ et $(u,p),(\overline{u},\overline{p})$ les solutions des équations ((12)-(16)) correspondant à G^m *et* $\overline{G}^m$ respectivement.

soit : $y_j(t) = (u(t,.)|e_j)$, on considère la différence :

$$Y(t) = y(t) - \overline{y}(t) = z(t) - \overline{z}(t) + (\Gamma(t) - \overline{\Gamma}(t))$$

où y *et* $\overline{y}$ sont les solutions du problème $(N)_m$ avec

$$\Gamma(t) = (G^m(t)|e_j) \ et \ \overline{\Gamma}(t) = (\overline{G}^m(t)|e_j)$$

En utilisant la même démarche que la démonstration de l'unicité du Théorème 1, voir [11] et [12], on écrit :

$$\frac{d}{dt}|Y(t)|^2 \le c\|\sigma(t)\|_{L^2(O)}|Y(t)| + c'|Y(t)|^2$$
$$+c''|\Gamma(t) - \overline{\Gamma}(t)|$$

$$\frac{d}{dt}\|\sigma(t)\|_{L^2(O)} \le c_1|Y(t)|\|\sigma(t)\|_{L^2(O)}$$

Où $\sigma(t) = \rho(t) - \overline{\rho}(t)$. De plus on a la Convergence $(\Gamma - \overline{\Gamma}) \longrightarrow 0 \ dans \ C(0,T;V^m)$
Ce ci implique que $Y \longrightarrow 0 \ dans \ C(0,T;V^m)$
c'est-à-dire $(u - \overline{u}) \longrightarrow 0 \ dans \ C(0,T;V^m)$
De ce résultat de convergence, on a $(\rho - \overline{\rho}) \to 0 \ dans \ C^1([0,T];O)$, ce qui démontre que l'application $G^m \to (u,p)$ est continue et donc mesurable dans la topologie, $C(0,T,V_m)$ ce qui démontre le théorème 2.

3. RESULTATS NUMERIQUES

3.1 Mise on œuvre

On considère le problème de Navier-Stokes suivant :

$$\rho\partial_t u + \rho(u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = 0 \quad dans \ ]0,T[\times \Omega$$
$$\nabla \cdot u = 0 \quad dans \ ]0,T[\times \Omega$$
$$u = 0 \quad sur \ ]0,T[\times \partial\Omega$$
$$u(t=0) = u_0$$

La formulation variationnelle de ce problème nous conduit à écrire

$$\rho\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx = \nu\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \nu\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot v d\sigma$$
$$-\rho\int_\Omega (u \cdot \nabla u) v dx + \int_\Omega \nabla p \cdot v dx$$

On considère un schéma numérique d'éléments finis en espace et différences finies implicites en temps comme suit :

$$\frac{u^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} - \nu\Delta u^{n+1} = 0 \quad dans \ ]0,T[\times \Omega$$
$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0 \quad dans \ ]0,T[\times \Omega$$
$$u^{n+1} = 0 \quad sur \ ]0,T[\times \partial\Omega$$
$$u^0 = u_0$$

où U^n est calculé en fonction de u^n à un pas de temps Δt. On approxime par les éléments P2/P1 pour la vitesse et la pression, respectivement.
Les résultats numériques sont résumés dans les figures ci-dessous pour différentes valeurs de ρ.

3.2 Résultats

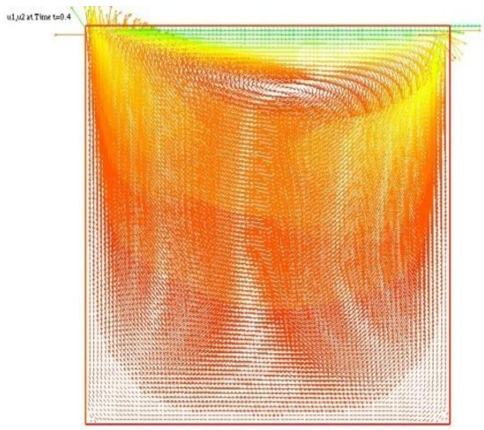

Figure 1. Vitesse U1, U2 pour t = 0,4
Nombre d'itérations n = 40

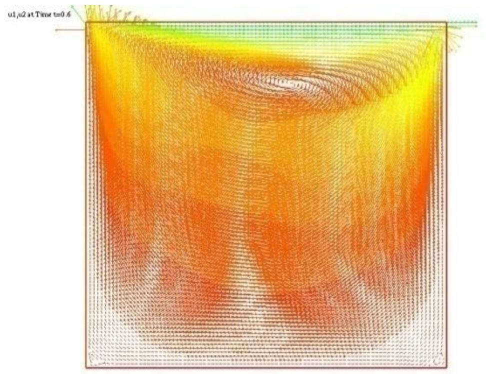

Figure 2. Vitesse U1, U2 pour t = 0,6
Nombre d'itérations n = 60

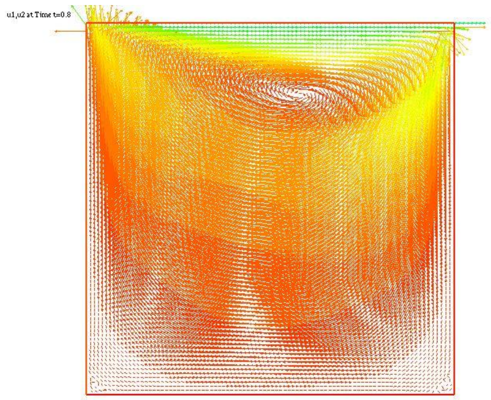

Figure 3. Vitesse U1, U2 pour t = 0.08
Nombre d'itérations n = 80

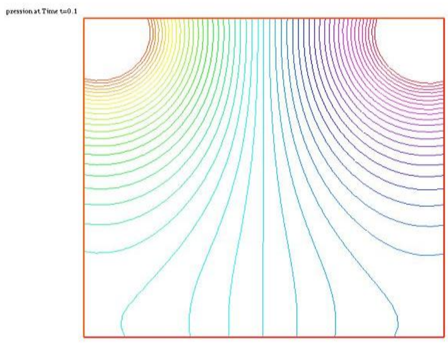

Figure 4. Pression pour t = 0,1
Nombre d'itérations n = 10

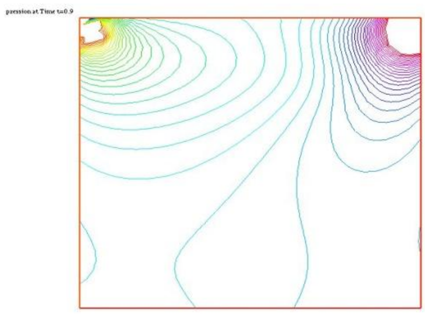

Figure 5. Pression pour t = 0,9
Nombre d'itérations n = 90

On remarque d'après les résultats graphiques (Fig. 1-5) que le schéma numérique choisi s'adapte bien avec les données du problème, c'est à dire aucun phénomène d'instabilité numérique n'est apparu même dans le calcul pour un nombre d'itération assez grand. Le pas de temps choisi pour ces calculs est 0.01 car aucune restriction sur les conditions de stabilité n'est imposée vu que le schéma en différences finies pour l'approximation temporelle utilisée est implicite. La valeur de la densité ρ est choisie $0 < \rho < 1$. Ces résultats sont obtenus par le logiciel FreeFEM++, dû à Hecht et Pirronneau [12]

4. CONCLUSION

Tout le long du présent travail, notre objectif a été l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des équations Navier-Stokes stochastiques non homogènes, décrivant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, quand la force extérieure est soumise à une perturbation aléatoire, le fluide subit, alors une fluctuation d'aspect probabiliste, ce qui augmente les difficultés de résolution de ce type d'équations (1)-(3), déjà assez compliqué. Nous avons traité, les équations Navier-Stokes stochastiques non homogènes, selon l'approche qui consiste à trouver des solutions approchées au problème, en utilisant la méthode Faedo-Galerkin, et le théorème du point fixe de Schauder [4].

Les équations de Navier Stokes stochastiques ont été dans la forme indiquée dans notre travail, étudiées par Bensoussan et Temam [3] qui, considérant une classe d'équations un peu plus large, dite équations stochastiques du type Navier Stokes, ont démontré l'existence d'une solution faible. Dans nos travaux, on a supposé une régularité majeure (par rapport aux coordonnées spatiales) de la perturbation G, de sorte que la résolution de l'équation stochastique se réduit, pour chaque élément ω de l'espace de probabilité Ω, à celle d'une équation déterministe. L'unicité de la solution a été prouvée (théorème 2), de plus, les résultats numériques montrent que notre approche est validée (Fig. 1-5).

Références

[1] Lions J. L., 1969. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, *Journal Académie des Sciences Paris*, 25, 319-322.

[2] Temam R., 1977. Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis, *North-Holland Journal*, 9, 452-463.

[3] Bensoussan A., Temam R., 1973. Equations stochastiques du type Navier-Stokes, *Journal Function Analysis*, 13, 195-222.

[4] Yashima H. F., 1992. Equations de Navier-Stokes stochastiques non homogènes et applications. *Journal Pisa*(Italie), 15, 412_421.

[5] Viot M., 1974. Solution en loi d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire: Méthode de monotonie. *Journal Académie des Sciences. Paris* 278. A-1405-1408.

[6] Viot M., 1976. Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires. Thèse de doctorat. Paris VI.

[7] Vishik M. I & Fursikov A. V., 1980. Problèmes mathématiques d'hydrodynamique statistique. *Doklady Akademii Nauk* SSSR(Russie), 321, 602-607.

[8] Leray J., 1934. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Journal Mathématiques pures et Appliquées.*, 3, 193-248.

[9] Leray J., 1934. Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois. *Journal Mathématiques pures et Appliquées*, 13, 331-418.

[10] Leray J., 1934. Etude de divers équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *Journal Mathématiques pures et Appliquées,* 13, 331-418.

[11] Hadji M. L. & Aissaoui M. Z., 2009. Equations de Navier-Stokes Stochastiques homogènes, Colloque International sur les systèmes dynamiques distribués et contrôle, 08-10 Novembre 2009, Oum Elbaoughi (Algérie), 129-135.

[12] Pironneau O. & Hecht F., 2000. Mesch adaption for the Black and Scholes equations, East-*West Journal of Numerica. Mathématiques*. 8(1) 25-35.

[13] Kazhikhov A. V., 1974. Solubilité de problème de Cauchy aux limites pour l'équation de mouvement pour les fluides visqueux incompressibles non-homogènes, *Doklady Akademii Nauk SSSR*(Russie), 216, 1008-1010.

[14] Cattabriga L., 1961. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazio di Stokes. Mathématiques Université Padova(Italie), 31, 308-355.

[15] Yosida K., 1986. Problèmes mathématiques d'hydrodynamique statistique. *Journal Mathematique*, Leipzig, Germany, 17, 213-224.

[16] Lions J. L. & Prodi G., 1959. Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes stochastiques en dimensions deux. *Journal Académie des Sciences Paris*, 248, 3519-3521.

.