تطبيق معادلة الحرارة في السوق المالي
(نموذج بلاك – شولز)

الدكتور: بداوي محمد
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
جامعة عمار ثليجي-الأغواط-الجزائر؛ Badamoh80@yahoo.fr

ملخص:
تناقش هذه الورقة تطبيق نوع معين من المعادلات التفاضلية الجزئية والمستخدمة كثيرا في الفيزياء (معادلة الحرارة) ، وقد طبقت في الاسواق المالية وأصبحت ما تعرف بمعادلة بلاك– شولز.
كلمات مفتاحية: التفاضل الجزئي ، سلاسل فوري ، معادلة الحرارة، معادلة بلاك– شولز، تسعير خيارات (الشراء– البيع).
Abstract :
This paper discusses the application of a particular type of partial differential equations and much used in physics (heat equation), it has been applied in the financial markets and what has become known the Black-Scholes model.
Keywords: Partial derivatives, Fourier series, the heat equation, Black-Scholes equation, pricing options (call- put).

مقدمة:

لقد حدثت ثورة واسعة النطاق في ثلاثينات القرن الماضي في الاسواق المالية ، وذلك بعد فرض سياسات واضحة لتحرير هذه الاسواق ، هذا المشهد المالي الجديد ولد اختلالات و حالة عدم اليقين بشأن العلاقات الاقتصادية الدولية منذ بداية السبعينات (ديون البلدانالنامية ، وتقلب أسعار الصرف.....الخ)، ان زيادة التضخم وتقلب أسعار الفائدة أثرت على توقعات المستثمرين، وعلاوة على ذلك تدويل رأس المال و التقدم التكنولوجي في مجال الاعلام والاتصال ، فتغيرت العلاقات بين المراكز المالية المختلفة : نيويورك ، لندن، طوكيو ... الخ (El Karoui, 2004) ، تركز هذه الورقة على تطبيق نوع معين من المعادلات التفاضلية الجزئية في الرياضيات المالية،وتعتبر حالة من معادلة الحرارة[1]، وهي معادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة من الرتبة الثانية . ان معادلة انتشار الحرارة لها تطبيقات مهمة في التحليل الاقتصادي، وخاصة في علاج المعادلة الشهيرة **بلاك – شولز**وبالضبط في مجال تسعير خيارات البيع والشراء ، وبالفعل فأن هذهالمعادلة في ظل شروط معينة فان السعر **V=V(t, s)** خيار الشراء (call) ، أو البيع (put)) يعتبر معادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة من الرتبة الثانية (Boka,2013)، وهي كالتالي:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rS=0$$

مشكلةالدراسة:

تحاول الدراسةالاجابةعن السؤال التالي:

ما هي الأسس الرياضية لمعادلة بلاك – شولز ؟

اهميةالدراسة:

تتميز هذه الدراسةبأهميتها خاصة وأنهاتبحث في موضوع مازال يشكل صعوبة لدى الاقتصاديين والماليين المتخصصين في مجال الهندسة المالية لذا فأن اهميتها تأخذ مكانها من الأسباب الآتية:

[1]- من أعمال الرياضياتي الفرنسي والفيزيائي جوزيف فوري (1768-1830).

1-تكمن أهمية الدراسة في كونها تسعى لإبراز معادلة رياضية كانت سببا في ايجاد نموذج بلاك-شولز ، هذا الاخير الذي أحدث ثورة واسعة في مجال السوق المالي.

2-كما تكمن اهمية الدراسة في محاولتها تقديم معلومات جديدة لدى الاقتصاديين والماليين مثل المعادلات التفاضليةالجزئية،سلاسل وتحويل اتفوريي، التفاضلات المعمقة...

أهداف الدراسة:

إن هدف هذا البحث هو إبراز الخطوات الرياضية لمعادلة بلاك-شولز التي استوحت من معادلة الحرارة ، هذه الاخيرة لها تطبيقات عديدة في المالية، الميكانيك الكونتي، الفيزياء، ولقد ركزنا على تطبيقها في مجال الهندسة المالية، ولعل الاقتصاديين أكتفوا بالتطبيق المباشر لمعادلةبلاك-شولز و لم يألفوا البرهنة من هذا القبيل، فقد ارتأينا أن نذلل الصعاب قدر الامكان ومحاولة إعطاء معلومات غير مألوفة لدى الاقتصاديين كالمعادلات التفاضلية الجزئية ، سلاسل وتحويلات فوري ..

التعريفات الاجرائية

يتناول الباحث في هذاالجزء التعريف بالمصطلحات الإجرائية وأهميتها في شرح نموذج بلاك-شولز، هذه التعريفات هي كالتالي:

المشتقات المالية: Produits dérivés

إن مفهوم المشتقات المالية يتلخص فيما يلي:

- هي عقود؛
- تتم تسويتها في تاريخ مستقبلي؛
- لا تتطلب استثمارات مبدئية أو تتطلب مبلغ مبدئي صغير مقارنة بقيمة العقود.

ويتضمن العقد:

- تحديد سعرمعين للتنفيذ في المستقبل؛
- تحديد الكمية التي يطبق عليها السعر؛
- تحديد الزمن الذي يسري فيه العقد؛

- تحديد الشيء موضوع العقد والذي قد يكون: سعر فائدة محدد لورقة مالية ، سعر صرف اجنبي ،مؤشر اسعار....الخ؛

في الأصل تم إنشاء المشتقات المالية بالسماح للشركات إجراء التحوط ضد أنواع مختلفة من المخاطر المالية ، إن المعاملات في المشتقات بدأت تنمو بسرعة منذ 1980 ، و تشكل الآن الجزء الأكبر من نشاط السوق المالي (Berruyer, 2015).

الخيارات والتغطية: Optionset couverture

الخيارات :Les Options

الخيار هو حق (ولكن ليس إلتزام) لشراء سلعة ما (خيار شراء) أو لبيع سلعة ما (خيار بيع)(Guibé,2010)

اما أركان عقد حق الاختيار(محسن، 2006) فهي:

1- **مشتري الحق Buyer:** هو الشخص الذي يقوم بشراء حق الاختيار سواء كان حق اختيار بيع أو شراء؛
2- **محرر الحقWriter:** هو الشخص الذي يقوم بتحرير الحق لصالح المستثمرأو (مشتري الحق)؛
3- **سعر التنفذExercise or striking price :** هو السعر الذي يتم به تنفيذ العقد يتحدد عند إبرام العقد، وعادة ما يكون هو السعر الجاري للأصل في السوق؛
4- **تاريخ التنفيذ Exercise date :** هو التاريخ الذي يتم فيه تنفيذ العقد ؛
5- **المكافأة Premium :** هو مبلغ متفق عليه يقوم مشتري حق الاختيار بدفعه للمحرر نظير أن يكون لمشتري الاختيار الحق في تنفيذ أو عدم تنفيذ الاتفاق .

تعريف 1 : (الخيار الشراءالأوربي): (Call Européen)

وهو عقد يتيح للمستثمر حق شراء عدد محدود من الأوراق المالية أو أي أصل آخر(actif sous-jacent) بسعر متفق عليه مقدما(القيمة St في اللحظة t) بتاريخ لاحق (T تاريخ الاستحقاق)،وسعر ثابت في العقد نرمز له (K) يدعى سعر التنفيذ، مشتري الخيار ليس له حق التنفيذ إلا عند نهاية العقد أي إذا(**ST > K**) ، غير ذلك لا يفعل شيئا ، القيمة الحقيقية تستبدل عند تاريخ الاستحقاق، نطلق عليها "pay-off" للخيار الشراءوهو:

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$$

تعريف 2 (الخيار البيع الأوربي): (Put Européen)

وهو عقد يتيح للمستثمر حق بيع عدد محدود من الأوراق المالية أو أي أصل آخر (actif sous–jacent) بسعر متفق عليه مقدما(SALVARANI,2011) ، نفس الرموز المستخدمة في حالة الشراء، "pay–off" لخيارالبيع هو:

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0)$$

التغطية Couverture :

مشكلة تغطية الخيار هو العثور على استراتيجية مالية مبنية على أصول الأسواق قيمتها في كل تاريخ t تساوي pay–off للخيار.

الحل التحليلي لمعادلة الحرارة : Résolution analytique de l'équation de la chaleur

تعطى معادلة الحرارة أحادية البعدو هيمعادلة تفاضلية جزئية :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حيث $a^2 > 0$ ثابت معطى،u دالة حقيقية غير معلومة لمتغيرين حقيقيين x وt ، هذه الدالة **u = u(x; t)**تمثل درجة الحرارة في ناقل بعده واحد القيمة **u(x; t)**تابع للزمن **t** (**Gisclon,1998**).

مع **$a^2=\lambda/\rho c$**، λكثافة قضيب ، **ρ**الكتلة الحجمية و **c**حرارته الخاصة.

سوف نحل هذه المسألة في حالة درجة الحرارة تحت الشروط الاولية**$U(x, 0) = \varphi(x)$**،**φ**هي دالة محدودة وقابلة للتكامل على **IR**. سنفرض **u**قابلة للاشتقاق من الرتبة الثانية (**classe C²**) بالنسبة ل **x** و من الرتبة الاولى (classe C^1) بالنسبة ل **t** .

1) سنطبق تحويلة فوري بالنسبة ل **x**في أطراف معادلة الحرارة ، ونستنتج ان المعادلة التفاضلية تحقق الحل$\hat{u}(x, t)$.

2) نقدر **u(x, t)**في شكل **جداء الالتفاف** (**produit de convolution**).

نضع $\hat{\mathbf{u}}(\nu,\ \mathbf{t})=\int u(\mathbf{x},\ \mathbf{t})e^{-2i\pi\nu x}dx$ لدينا كذلك

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial t}(\nu,\ \mathbf{t})=\int\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})e^{-2i\pi\nu x}dx=a^2\int\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})e^{-2i\pi\nu x}dx$$

$$=a^2([\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})e^{-2i\pi\nu x}]_{-\infty}^{+\infty}+2i\pi\nu\int\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})e^{-2i\pi\nu x}dx)$$

$$=-4a^2\pi^2\nu^2\int u(\mathbf{x},\ \mathbf{t})e^{-2i\pi\nu x}dx=-4a^2\pi^2\nu^2\,\hat{\mathbf{u}}(\nu,\ \mathbf{t})$$

إذا وضعنا $g_\nu(t)=\hat{\mathbf{u}}(\nu,\ \mathbf{t})$ ، فيكون إذن $\frac{g'_\nu(t)}{g_\nu(t)}=-4a^2\pi^2\nu^2=(Lng_\nu)'(t)$

أو $Lng_\nu(t)=-4a^2\pi^2\nu^2t+c$ و $g_\nu(t)=Ke^{-4a^2\pi^2\nu^2t}=\hat{\mathbf{u}}(\nu,\ \mathbf{t})$ ، مع كل **t=0**، $\hat{\mathbf{u}}(\nu,\ \mathbf{t})=K=\hat{\varphi}(\nu)$

كذلك $\hat{\mathbf{u}}(\nu,\ \mathbf{t})=\hat{\varphi}(\nu)e^{-2\pi^2(2a^2t)\nu^2}$، نعيد التذكير بأن $e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$ مع $\sigma=a\sqrt{2t}$ و

$f(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}})(\nu)$ في الاخير نستخدم الخاصية $f(F)f(G)=f(F*G)$، ثم مقلوب تحويل فوري ونستنتج:

$$u(\mathbf{x},\ \mathbf{t})=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\varphi(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds$$

الحل التحليلي لمعادلة بلاك – شولز Résolution analytique de l'équation de Black – Scholes :

في هذه الفقرة نطبق معادلة الحرارة المتمثلة في معادلة بلاك – شولز [1].

تقييم الصيغة النموذج : La formule d'évaluation

نشتق صيغة بلاك – شولز السابقة من حيث سعر السهم ، فإننا نفترض " **شرط مثالي** " في السوق للسهم و للخيار.

اقترح بلاك – شولز الفرضيات التالية **(BLACK and SCHOLES,1973):**

-سعر الأساسي يتبع الحركة البراونية الهندسية un mouvement brownien géométrique

[1]- نسبة الى الرياضياتي الأمريكي فيشربلاك (1938 - 1995) والخبير الاقتصادي مايرونشولزبالإضافة الى روبرتميرتون، شولز و ميرتون تحصلا على جائزة نوبل في الاقتصادعام(1997) ، اما فيشر بلاك فقد توفي قبلها بسنتين (1995).

– الخيار محل التعاقد من النوع الأوروبي وليس الأمريكي؛

– التقلب (la volatilité) هو معروف مسبقا و ثابت؛

–من الممكن شراء وبيع الأصول الأساسية في أي وقت وبدون مقابل؛

– يسمح للمبيعات على المكشوف من دون قيود؛

– لا توجد توزيعات على السهم المعني خلال فترة الخيار (أي حتى تاريخ الاستحقاق)؛

–معدل الفائدة هو معروف مسبقا ثابت؛

–ممارسة الخيار لا يمكن القيام به الا في الموعد المحدد وليس قبل ذلك (الخيار الأوروبي).

الترميز: Notations

نرمز**V**قيمة الخيار (سنحدد الخيارات الأوروبية في هذه الدراسة) ، يمكننا أن نميز بين "الشراء**C** "و " والبيع**P** " هما توابع للزمن**t**، حيث**(S, t) V=V** (AUROUX,2011) نلاحظ أيضا:

σ معدل تقلب سعر الاصل الضمني ؛

E سعر تنفيذ الخيارالمالي؛

T مدة حيازة الخيار؛

R سعر الفائدة.

معادلة بلاك – شولز:Equation de Black-Scholes

هي معادلة تفاضلية جزئية تسمح بحساب قيمة الخيار الأوروبي بواسطة تابع للوقت و الاصل المالي.

حالة الخيار الشراءالأوروبي:

نرمز لخيار الشراء الأوربي **C(S,t)**المناظر لقيمة سعر الاصل المالي و**t ϵ [0, T]** ،**T** مدة حيازة الخيار، لدينا المعادلة التالية :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(s,t)+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(s,t)+rS\frac{\partial C}{\partial S}(s,t)-rC(S,t)=0; & \forall t\in[0,T],,S\in\mathbb{R}_+ \\ C(s,t)=(S-E)^+=\max(S-E,0) & \forall s\in\mathbb{R}_+ \end{cases} ....(1)$$

لحل هذه المعادلة سوف نقوم بإجراء عدة تبديلات للمتغير، لتعطينا في النهاية معادلة الحرارة من النوع:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(\mathbf{x},\ 0)=\ u_0(x) \end{cases} .....(2)$$

لنبدأ أولا بحذف معاملات **S** و**S²**بالنسبة ل معادلة بلاك – شولز ، سنفرض:

$$S=Ee^x,\quad t=T-\frac{2\tau}{\sigma^2}\quad,\quad C(S,t)=Ev(x,\tau)\quad.$$

مع الشرط أن**t=0** حتى**t=T** ، لذلك فإن :

$$v(x,\tau)=\frac{1}{E}C(Ee^x\quad,\quad T-\frac{2\tau}{\sigma^2})=\frac{1}{E}C(S,t)........(3).$$

نشتق (3) بالنسبة ل**x** :

$$v_x=\frac{1}{E}\frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}+\underbrace{\frac{1}{E}\frac{\partial C}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}}_{0}=\frac{S}{E}\frac{\partial C}{\partial S}$$

نشتق مرة أخرى بالنسبة ل**x** :

$$v_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(v_x)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{E}S\frac{\partial C}{\partial S})=\frac{\partial}{\partial S}(\frac{1}{E}S\frac{\partial C}{\partial S})\frac{\partial S}{\partial x}$$
$$=\frac{1}{E}(\frac{\partial C}{\partial S}+S\frac{\partial^2 C}{\partial S^2})S=\frac{S}{E}\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{S^2}{E}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

نشتق الأن (3) بالنسبة ل**τ** :

$$v_\tau=\frac{1}{E}\frac{\partial C}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{1}{E}\frac{\partial C}{\partial t}\frac{-1}{\frac{\sigma^2}{2}}$$

لمزيد من التوضيح ندخل القيم التالية:

$$C_t=-\frac{E}{2}\sigma^2 v_\tau...........(4).$$

$$SC_s=Ev_x.................(5).$$

$$S^2C_{ss}=Ev_{xx}-SC_s=Ev_{xx}-Ev_x............(6).$$

نتذكر مرة أخرى معادلة بلاك – شولز

$$C_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{ss}+rSC_s-rC=0........(7).$$

نعوض (4)، (5) و (6) في (7) فنتحصل على:

$$-\frac{E}{2}\sigma^2 v_\tau + \frac{E}{2}\sigma^2(v_{xx}-v_x)+rEv_x - rEv = 0.$$

نقسم على $(E/2)\ \sigma^2$

$$k=\frac{2r}{\sigma^2} \text{ مع ، } -v_\tau + v_{xx} - v_x + kv_x - kv = 0.$$

و مع ترميز البداية:

$$k=\frac{2r}{\sigma^2} \text{ مع ، } \qquad \frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(k-1)\frac{\partial v}{\partial x}-kv........(8).$$

ومع الشرط الأولي ($\tau = 0$ ، لأن الشرط عند**t=T**)

$$v(x,0)=\frac{1}{E}C(Ee^x \quad , \quad T)=\frac{1}{E}\max(Ee^x-E,0)=\max(e^x-1,0).$$

للوصول إلى معادلة من هذا القبيل من معادلة الحرارة، نجرى عملية تبديل المتغيرات للمرة الثانية، نفرض :

$$v(x,\tau)=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

يتم تعويضها مرة أخرى في (8) :

$$e^{\alpha x+\beta\tau}(\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau})=e^{\alpha x+\beta\tau}(\alpha^2 u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(k-1)(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x})-ku).$$

بعد الاختزال :

$$\beta u+\frac{\partial u}{\partial \tau}=\alpha^2 u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(k-1)(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x})-ku.$$

يتم تجميع الحدود المتشابهة:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\alpha^2+(k-1)\alpha-k-\beta)u+(2\alpha+k-1)\frac{\partial u}{\partial x}$$

للوصول الى معادلة الحرارة ، يجب حذف الحدود **u** و **du/dx** ، سوف نحل الجملة التالية :

$$\begin{cases}\beta=\alpha^2+(k-1)\alpha-k,\\ 2\alpha+k-1=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}(k-1),\\ \beta=-\frac{1}{4}(k+1)^2.\end{cases}$$

لذلك لدينا :

$$v=e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau).$$

إذن **u** تحقق ما يلي :

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad , \quad \forall \tau>0\\ u(x,0)=u_0(x)=e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\max(e^x-1,0)=\max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0).\end{cases}$$

u0(x) تحقق الحل جيدا ، إذن :

$$u(\mathbf{x},\ \tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}ds.\ldots\ldots\ldots.(9).$$

تقييم سعر الخيار:Evaluation du prix de l'option

في هذه الفقرة سوف يتم تقييمتكامل المعادلة**(9)**

سنبدأ بوضع :

$$x'=\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$$

$$u(\mathbf{x},\ \tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}ds.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(x'\sqrt{2\tau}+x)e^{-\frac{x'^2}{2}}dx',$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'}_{I_1}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'}_{I_2}$$

لحساب **I1** ، سوف نحاول الوصول الى قانون التوزيع الطبيعي المعياري :

$$I_1=\frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty}e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}e^{-\frac{1}{2}(x'-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2}dx'$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho$$

مع $\rho=x'-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$. نرمز الى دالة التوزيع الطبيعي المعياري ب $N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}s^2}$ ،

نضع $d_1=\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$ ، فنتحصل إذن على $I_1=e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}(1-N(-d_1)).$.

أو $\forall d \in \mathbb{R}$، لدينا $N(d)+N(-d)=1.$ ، في الأخير نجد:

$$\begin{cases} I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1). \\ d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}. \end{cases}$$

حساب**I2**من خلال حسابات مماثلة كما جرى في الفقرة السابقة نتحصلعلى:

$$\begin{cases} I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2). \\ d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}. \end{cases}$$

الأن لدينا العبارة **u** ، وللعودة الى العبارة **C**قيمة خيار الشراء ، أولا لدينا :

$v(x,t) = e^{\alpha x+\beta\tau} u(x,\tau)$ و $C(S,t) = Ev(x,\tau)$.

ونتذكر أيضا ما يلي : $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ ، $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ $x = Ln\frac{S}{E},$ أو:

$$C(S,t) = Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \times (e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2))$$
$$= Ee^{-\frac{1}{2}(k-1)Ln\frac{S}{E}-\frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \times (e^{\frac{1}{2}(k+1)Ln\frac{S}{E}+\frac{1}{4}(k+1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)Ln\frac{S}{E}+\frac{1}{4}(k-1)^2\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2))$$

وبعد التبسيط:

$$\begin{cases} C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 = \dfrac{Ln\frac{S}{E} + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \dfrac{Ln\frac{S}{E} + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \qquad ....(10)$$

حالة خيار بيع أوربي Cas d'une option Put européenne

نقوم بنفس الخطوات بالنسبة لخيار البيع الاوربي ، نرمز ل **P**لسعر البيع الاوربي ، ونستخدم نفس مدة الحيازة ونفس سعر التنفيذ **E** ، توجد علاقة بين سعرها.

$$C(S,t)-P(S,t)=S-Ee^{-r(T-t)}.$$

اذن

$$P(S,t)=S(N(d_1)-1)-Ee^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$$

يمكننا تبسيط هذه المعادلة باستخدام **N(d) + N(–d) = 1** ،ونتحصل على :

$$\begin{cases} P(S,t)=Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)-SN(-d_1) \\ d_1=\dfrac{Ln\dfrac{S}{E}+(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2=\dfrac{Ln\dfrac{S}{E}+(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{cases} \qquad ....(11)$$

الخاتمة :

في عالم اليوم يلعب التمويل دورا مهما واحيانا ما يكون سبب للأزمات العالمية ، ومن ثم يبدو أن التمويل يعتمد على النماذج الصلبة لتقييم المخاطر و الأسعار، وهكذا أصبح نموذج بلاك – شولز منذ عام 1973 مصدرا مهما في حساب الخيار(بيع – شراء) .

وعلى الرغم من عيوب هذا النموذج إلا أنه عرف نجاحالأن لديه العديد من المزايا : سهولة التطبيق ، واستخدام كبير من قبل المتعاملين في السوق المالي ولكن أيضا وخصوصا أنه يسمح بحساب معلمة مهمة في مجال التمويل ألا وهي التقلبات(volatilités)، فالتقلب يقيس متوسط التغير على مر الزمن لأصل مالي ، وبالتالي يعطي معلومات حاسمة حول المخاطر.

المراجع و المصادر المعتمدة في هذا البحث :

المراجع العربية

1-محسن سميرة،(2006)، المشتقات المالية ودورها في تغطية مخاطرالسوق المالية – دراسة حالة البنكBNP PARIBAS ، مذكرة ماجيستيرفي العلوم الاقتصادية، ***رسالة غير منشورة*** ، جامعة منتوري قسنطينة– الجزائر.

المراجعالأجنبية

1-Auroux Didier,(2011),"***Méthodes numérique pour le pricing d'option***", Nice (France) , Polytechnique SOPHIA.

2-Berruyer Olivier,(2015)," ***crise Boursière*** ", www.les-crises.fr.

3-Boka David Mabele et autres,(2013)."Equation de la Chaleur", ***Laboratoire d'Analyse – Recherche en Economie Quantitative***, 8(12) : 012.

4-BLACK Fischer et SCHOLES Myrlon, (1973). " The pricing of options and corporate liabilities", ***The Journal of Political Economy,*** 81(6) :637-654.

5-El Karoui Nicole,(2004),"***Couverture des risques dans les marchés financiers*** " , Parais, Ecole PolytechniquePalaiseau Cedex.

6-Gisclon Marguerite,(1998)," A propos de l'équation de la chaleur et de l'analyse de Fourier ", ***Le journal de maths des élèves***, 1(4).

7-Guibé Olivier, (2010)"***Méthodes numériques pour la finance*** " .

8-Salvaranifrancesco,(2011)" ***Modelé de Black-Scholes*** ",Parais, Ecole NormaleSupérieure de Cachan.