RSSI, Vol. 04, No. 01, Décembre (2014) 16-20

Revue des Sciences et Sciences de l'Ingénieur

ISSN 2170-0737

Journal homepage :http://www.RSSI.lagh-univ.dz

Produit de Trois et de Quatre Opérateurs de Toeplitz Tronques de Type α

Z.BENDAOUD, A.YAGOUB

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées,
Université Amar Telidji de Laghouat.

Corresponding author: *z.bendaoud@lagh-univ.dz*

Résumé : **Les études menées par Sarason [2] sur les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz tronqués ont conduit Sedlock à trouver deux conditions nécessaires et suffisantes lesquelles le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués reste un opérateur de Toeplitz tronqué. Dans ce travail on s'intéresse au produit de trois et de quatre opérateurs de Toeplitz tronqués et on démontre qu'ils restent un opérateur de Toeplitz tronqués sous d'autres conditions.**

Mots clés- **Operateur de Toeplitz tronqué, espace modèle.**

Abstract: **Sarason [2] study algebraic properties of truncated Toeplitz operators led Sedlock find both necessary and sufficient conditions for which the product of twoToeplitz operators remains a truncated Toeplitz operator .In this article, we study the product of three and four truncated Toeplitz operators on truncated model space.**

Keywords- **Model space, Truncated Toeplitz Operators.**

1. INTRODUCTION

Pour une fonction intérieure u de H^2, l'espace modèle est défini par : $\mathcal{K}_u := H^2 \ominus uH^2$,
son noyau reproduisant étant
$$\mathcal{K}_\lambda^u(z) := \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\bar{\lambda}z}, \quad z, \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

Pour chaque fonction intérieure u, K_u possède un opérateur de conjugaison noté C et est défini par :
$$Cf := \widehat{f} = \overline{fz}u, \tag{1.2}$$
et
$$C\mathcal{K}_\lambda^u](z) = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}. \tag{1.3}$$

On sait que $\mathcal{K}_u \cap H^\infty$ est dense dans $\mathcal{K}_u$.
Pour chaque symbole φ de L^2 on définit l'opérateur de Toeplitz tronqué A_ϕ sur $\mathcal{K}_u$ par
$A_\varphi f := P_u(\varphi f), \quad f \in H^\infty \cap \mathcal{K}_u,$
Où P_u est une projection orthogonale de L^2 dans $\mathcal{K}_u$.

Soit $\mathcal{T}_u$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués bornés.

Soit $S : H^2 \longrightarrow H^2$ l'opérateur Shift défini par :

$$S(f)z = zf(z), \quad pour \quad z \in \partial\mathbb{D} \tag{1.4}$$
et Soit $S^* : H^2 \longrightarrow H^2$ son adjoint, défini par :
$$S^*(f)z = \frac{f(z)-f(0)}{z}. \quad pour \quad z \in \partial\mathbb{D} \tag{1.5}$$
On pose $S_u = P_u(S)$, et $S_u^* = P_u(S^*)$.

2. RESULTATS ANTECEDENTS

Dans cette partie on va énoncer les résultats démontrés par Sarason dans [1] en 2007.
Théorème 2.1 (Sarason). Soit $\varphi \in L^2$ alors

$$A_{\varphi_1} = A_{\varphi_2} \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in uH^2 + \overline{uH^2}. \tag{2.2}$$
Théorème 2.3 (Sarason). Soit A un opérateur borné de $\mathcal{K}_u$ alors $A \in \mathcal{T}_u$ si et seulement s'il existe deux fonctions $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_u$ tel que :
$$A - S_u A S_u^* = (\psi_1 \otimes K_0^u) + (K_0^u \otimes \psi_2). \tag{2.4}$$
dans ce cas $A = A_{\psi_1 + \overline{\psi_2}}$

Théorème 2.5 (Sarason). Soit $\lambda \in \mathbb{D}$
1) Les opérateurs $\widehat{K_\lambda^u} \otimes K_\lambda^u$ et $K_\lambda^u \otimes \widehat{K_\lambda^u}$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1,
2) Si u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\eta \in \partial\mathbb{D}$ alors $K_\eta^u \otimes K_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1,
3) Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 sont des multiples des opérateurs définis dans (1) et (2).

Théorème 2.6 (Sarason). Soit $Dim\mathcal{K}_u = n$ alors :
1) $Dim\mathcal{T}_u = 2n-1$
2) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n-1}$ sont des points distincts de $\mathbb{D}$ alors l'opérateur $K_{\lambda_j}^u \otimes \widehat{K_{\lambda_j}^u}, j = 1, \ldots, 2n-1$ est une base de $\mathcal{T}_u$,

Resultats de Sedlock.[2]

Définition 2.7. Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ on définit l'opérateur Shift modifié S_u^α par
$S_u^\alpha := A_z + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha} K_0^u \otimes CK_0^u.$
Le théorème suivant (Sarason [1]) a une importance dans la suite du travail.

Théorème 2.9 (Sarason). Si un opérateur borné A de K_u est dans $\{S_u^\alpha\}'$ alors $A \in \mathcal{T}_u$.
Dans cette partie on va énoncer quelques résultats de Sedlock [2].
En 2010 Sedlock a introduit la notion d'opérateur de Toeplitz tronqué de type α, c.-à-d. $A \in \{S_u^\alpha\}'$ qui est défini comme suit :
$B_u^\alpha := A_{\phi + \alpha \overline{A_z C\phi} + c} \in \mathcal{T}_u : \phi \in K_u, c \in \mathbb{C}\}$ Où c est un opérateur de conjugaison défini dans l'espace modèle K_u.
Théorème 2.10 (Sedlock). Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ et A un opérateur borné dans $\mathcal{K}_u$, alors A est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α si et

seulement si $A \in \{S_u^\alpha\}'$

Dans ce qui suit on va donner quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α

Théorème 2.11(Sedlock).Pour une fonction intérieure u on a :

(i) pour $\alpha \in \mathbb{D}^-$, $B_u^\alpha = \{S_u^\alpha\}'$

(ii) pour $\alpha \in \widehat{C} \setminus \mathbb{D}^-$, $B_u^\alpha = \{(S_u^{1/\overline{\alpha}})^*\}'$.

(iii) Si $\alpha \neq \alpha'$ alors $\mathcal{B}_u^\alpha \cap \mathcal{B}_u^{\alpha'} = \mathbb{C}I$.

(iv) B_u^α est une algèbre commutative fermée

(v) $A \in B_u^\alpha$ si et seulement si $A^* \in (S_u^{1/\overline{\alpha}})^*$

(vi) $A \in B_u^\alpha$ est inversible alors $A^{-1} \in B_u^\alpha$.

Lemme 2.12. Soient $A_{\psi_1+\overline{\psi_2}},\ A_{\psi_3+\overline{\psi_4}} \in \mathcal{T}_u$ tel que $\psi_i \in K_u\ pour\ i = 1, ..., i = 4$ alors $A_{\psi_1+\overline{\psi_2}} \times A_{\psi_3+\overline{\psi_4}} \in \mathcal{T}_u$ si et seulement si

$(\psi_1 \otimes \psi_4) - (S_u C\psi_2 \otimes S_u C\psi_3) = (\psi_5 \otimes K_0^u) + (K_0^u \otimes \psi_6)$.

Avec $\psi_5, \psi_6 \in K_u$ (2.13)

3. PRODUIT DE TROIS OPERATEURS DE TOEPLITZ TRONQUES DE TYPE α

Proposition 3.1 : Soient A, B et D trois opérateurs de types α, β, γ respectivement tel que

$$A = A_{\varphi_1+\alpha\overline{S\widehat{\varphi_1}}},\quad B = A_{\varphi_2+\beta\overline{S\widehat{\varphi_2}}},\quad D = A_{\varphi_3+\gamma\overline{S\widehat{\varphi_3}}}$$

Alors ABD est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existe $\Phi, \Psi \in K_u$ tel que

$(\beta - \gamma)A\varphi_2 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha - \beta)(\varphi_1 \otimes D^*S\widehat{\varphi_2}) = \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

Preuve :

On applique le théorème 2.3 pour ABD tel que $A = A_{\varphi_1+\alpha\overline{S\widehat{\varphi_1}}}, B = A_{\varphi_2+\beta\overline{S\widehat{\varphi_2}}}, D = A_{\varphi_3+\gamma\overline{S\widehat{\varphi_3}}}$ de type α, β, γ respectivement, alors :

$SABCS^* = SABS^*SDS^* + (SAB\widehat{K_0} \otimes SD^*\widehat{K_0}) = J$

De [2] on a :

$J = [AB - (\varphi_1 \otimes \overline{\beta}S\widehat{\varphi_2}) + (\widehat{S\overline{\alpha}S\widehat{\varphi_1}} \otimes S\widehat{\varphi_2}) + ((-A\varphi_2 + < \varphi_2, \overline{\alpha}S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes K_0) - K_0 \otimes B^*\overline{\alpha}S\widehat{\varphi_1}][D - (\varphi_3 \otimes K_0) + (K_0 \otimes \overline{\gamma}S\widehat{\varphi_3})] + (SAB\widehat{K_0} \otimes SD^*\widehat{K_0})$

$\Leftrightarrow J = [AB - \beta(\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_2}) + \alpha(\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_2}) + ((-A\varphi_2 + \alpha < \varphi_2, S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes K_0) - K_0 \otimes \overline{\alpha}B^*S\widehat{\varphi_1}][D - (\varphi_3 \otimes K_0) - (K_0 \otimes \overline{\gamma}S\widehat{\varphi_3})] + (SAB\widehat{K_0} \otimes SD^*\widehat{K_0})$

$\Leftrightarrow J = [AB + (\alpha - \beta)(\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_2}) + ((-A\varphi_2 + \alpha < \varphi_2, S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes K_0) - \alpha(K_0 \otimes B^*S\widehat{\varphi_1})][D - (\varphi_3 \otimes K_0) - \gamma(K_0 \otimes S\widehat{\varphi_3})] + (SAB\widehat{K_0} \otimes SD^*\widehat{K_0}) = ABD - (AB\varphi_3 \otimes K_0) - \gamma(ABK_0 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha - \beta)(\varphi_1 \otimes D^*S\widehat{\varphi_2}) - (\alpha - \beta) < \varphi_3, S\widehat{\varphi_2} > (\varphi_1 \otimes K_0) - \gamma(\alpha - \beta) < K_0, S\widehat{\varphi_2} > (\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + ((-A\varphi_2 + \alpha < \varphi_2, S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes D^*K_0) - \varphi_3(0)((-A\varphi_2 + \alpha < \varphi_2, S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes K_0) - \gamma < K_0, K_0 > ((-A\varphi_2 + \alpha < \varphi_2, S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes S\widehat{\varphi_3}) - \alpha(K_0 \otimes D^*B^*S\widehat{\varphi_1}) + \alpha < \varphi_3, B^*S\widehat{\varphi_1} > (K_0 \otimes K_0) + \alpha\gamma < K_0, B^*S\widehat{\varphi_1} > (K_0 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (SAB\widehat{K_0} \otimes SD^*\widehat{K_0})$

alors

$SABDS^* - ABD = -\gamma(ABK_0 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha - \beta)(\varphi_1 \otimes D^*S\widehat{\varphi_2}) - \gamma(\alpha - \beta)\overline{S\widehat{\varphi_2}(0)}(\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_3}) - A\varphi_2 \otimes D^*K_0) + \gamma < K_0, K_0 > (A\varphi_2 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (SAB\widehat{K_0} \otimes SD^*\widehat{K_0}) + \Phi_0 \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi_0$

Pour certains $\Phi_0, \Psi_0 \in K_u$

d'après [2] proposition 3.2 page 7 on a

$D^*K_0 = (\overline{\gamma} - \overline{u(0)})S\widehat{\varphi_3}$ et

$BK_0 = (1 - \beta\overline{u(0)})\varphi_2 \Longrightarrow ABK_0 = (1 - \beta\overline{u(0)})A\varphi_2$

et

$D^*\widehat{K_0} = (1 - u(0)\overline{\gamma})\widehat{\varphi_3} \Rightarrow SD^*\widehat{K_0} = (1 - u(0)\overline{\gamma})S\widehat{\varphi_3}$

et

$B\widehat{K_0} = (\beta - u(0))S^*\varphi_2 \Rightarrow AB\widehat{K_0} = (\beta - u(0))AS^*\varphi_2 \Rightarrow AB\widehat{K_0} = (\beta - u(0))AS^*\varphi_2 \Rightarrow SAB\widehat{K_0} = (\beta - u(0))SAS^*\varphi_2 = A\phi_2 - < \varphi_2, \overline{\alpha}S\varphi_2 > K_0$

donc

$SABDS^* - ABD = -\gamma((1 - \beta\overline{u(0)})A\varphi_2 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha - \beta)(\varphi_1 \otimes D^*S\widehat{\varphi_2}) - A\varphi_2 \otimes (\overline{\gamma} - \overline{u(0)})S\widehat{\varphi_3}) + \gamma < K_0, K_0 > (A\varphi_2 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + ((\beta - u(0))A\varphi_2 \otimes (1 - u(0)\overline{\gamma})S\widehat{\varphi_3}) + \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

donc

$SABDS^* - ABD = (\beta-\gamma)A\varphi_2 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes D^*S\widehat{\varphi_2}) + \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

alors ABD est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si

$(\beta-\gamma)A\varphi_2 \otimes S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes D^*S\widehat{\varphi_2}) = \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

Pour certains $\Phi, \Psi \in K_u$.

4. PRODUIT DE QUATRE OPERATEURS DE TOEPLITZ TRONQUES DE TYPE α

Proposition 4.1 : Soient A, B, D et E quatre opérateurs de types α, β, γ et θ respectivement tel que $A = A_{\varphi_1+\alpha\overline{S\widehat{\varphi_1}}}$, $B = A_{\varphi_2+\beta\overline{S\widehat{\varphi_2}}}$, $D = A_{\varphi_3+\gamma\overline{S\widehat{\varphi_3}}}$, $E = A_{\varphi_4+\theta\overline{S\widehat{\varphi_4}}}$

alors $ABDE$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existe $\Phi, \Psi \in K_u$ tel que

$(\gamma-\theta)(AB\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) + (\beta-\gamma)A\varphi_2 \otimes E^*S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes E^*D^*S\widehat{\varphi_2}) + (\gamma-\theta)(\alpha-\beta) < \varphi_3, S\widehat{\varphi_2} > (\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_4}) = \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

Preuve : Soient

$A = A_{\varphi_1+\alpha\overline{S\widehat{\varphi_1}}}$, $B = A_{\varphi_2+\beta\overline{S\widehat{\varphi_2}}}$,
$D = A_{\varphi_3+\gamma\overline{S\widehat{\varphi_3}}}$, $E = A_{\varphi_4+\theta\overline{S\widehat{\varphi_4}}}$

$SABDES^* = SABS^*SDES^* + (SAB\widehat{K_0} \otimes SE^*D^*\widehat{K_0}) = J$

d'après [2] on a

$J = [AB - (\varphi_1 \otimes \overline{\beta}S\widehat{\varphi_2}) + (\widehat{S\overline{\alpha}S\widehat{\varphi_1}} \otimes S\widehat{\varphi_2}) + ((-A\varphi_2 + < \varphi_2, \overline{\alpha}S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes K_0) - K_0 \otimes B^*\overline{\alpha}S\widehat{\varphi_1}][DE - (\varphi_3 \otimes \overline{\theta}S\widehat{\varphi_4}) + (\widehat{S\overline{\gamma}S\widehat{\varphi_3}} \otimes S\widehat{\varphi_4}) + ((-D\varphi_4 + < \varphi_4, \overline{\gamma}S\widehat{\varphi_3} > K_0) \otimes K_0) - K_0 \otimes E^*\overline{\gamma}S\widehat{\varphi_3}] + (SAB\widehat{K_0} \otimes SE^*D^*\widehat{K_0})$

$\Leftrightarrow J = [AB - \beta(\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_2}) + \alpha(\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_2}) + ((-A\varphi_2 + \alpha < \varphi_2, S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes K_0) - K_0 \otimes \overline{\alpha}B^*S\widehat{\varphi_1}][DE - \theta(\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) + \gamma(\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) + ((-D\varphi_4 + \gamma < \varphi_4, S\widehat{\varphi_3} > K_0) \otimes K_0) - K_0 \otimes E^*\overline{\gamma}S\widehat{\varphi_3}] + (SAB\widehat{K_0} \otimes SE^*D^*\widehat{K_0})$

$\Leftrightarrow J = [AB + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_2}) + ((-A\varphi_2 + \alpha < \varphi_2, S\widehat{\varphi_1} > K_0) \otimes K_0) - \alpha(K_0 \otimes B^*S\widehat{\varphi_1})][DE + (\gamma-\theta)(\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) + ((-D\varphi_4 + \gamma < \varphi_4, S\widehat{\varphi_3} > K_0) \otimes K_0) - K_0 \otimes E^*\overline{\gamma}S\widehat{\varphi_3}] + (SAB\widehat{K_0} \otimes SE^*D^*\widehat{K_0}) = ABDE + (\gamma-\theta)(AB\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) - \gamma(ABK_0 \otimes E^*S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes E^*D^*S\widehat{\varphi_2}) + \gamma < K_0, K_0 > (A\varphi_2 \otimes E^*S\widehat{\varphi_3}) + (SAB\widehat{K_0} \otimes SE^*D^*\widehat{K_0}) + \Phi_1 \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi_1$

Pour certains $\Phi_1, \Psi_1 \in K_u$, d'après [2] on a

$D^*K_0 = (\overline{\gamma} - \overline{u(0)})S\widehat{\varphi_3} \Longrightarrow E^*D^*K_0 = (\overline{\gamma} - \overline{u(0)})E^*S\widehat{\varphi_3}$

et

$BK_0 = (1 - \beta\overline{u(0)})\varphi_2 \Longrightarrow ABK_0 = (1 - \beta\overline{u(0)})A\varphi_2$

et

$D^*\widehat{K_0} = (1 - u(0)\overline{\gamma})\widehat{\varphi_3} \Rightarrow SE^*D^*\widehat{K_0} = (1 - u(0)\overline{\gamma})SE^*\widehat{\varphi_3}$

et

$B\widehat{K_0} = (\beta - u(0))S^*\varphi_2 \Rightarrow AB\widehat{K_0} = (\beta - u(0))AS^*\varphi_2$

$\Rightarrow SAB\widehat{K_0} = (\beta - u(0))SAS^*\varphi_2 = (\beta - u(0))A\varphi_2 - < \varphi_2, \overline{\alpha}S\widehat{\varphi}_1 > K_0$

donc

$SABDES^* - ABDE = (\gamma-\theta)(AB\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) - \gamma((1 - \beta\overline{u(0)})A\varphi_2 \otimes E^*S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes E^*D^*S\widehat{\varphi_2}) + (\gamma-\theta)(\alpha-\beta) < \varphi_3, S\widehat{\varphi_2} > (\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_4}) - A\varphi_2 \otimes (\overline{\gamma} - \overline{u(0)})E^*S\widehat{\varphi_3}) + \gamma < K_0, K_0 > (A\varphi_2 \otimes E^*S\widehat{\varphi_3}) + ((\beta - u(0))A\varphi_2 \otimes (1 - u(0)\overline{\gamma})SE^*\widehat{\varphi_3}) + \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

Pour $\Phi, \Psi \in K_u$

$SABDES^* - ABDE = (\gamma-\theta)(AB\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) + (\beta-\gamma)A\varphi_2 \otimes E^*S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes E^*D^*S\widehat{\varphi_2}) + (\gamma-\theta)(\alpha-\beta) < \varphi_3, S\widehat{\varphi_2} > (\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_4}) + \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

alors $ABDE$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si

$(\gamma-\theta)(AB\varphi_3 \otimes S\widehat{\varphi_4}) + (\beta-\gamma)A\varphi_2 \otimes E^*S\widehat{\varphi_3}) + (\alpha-\beta)(\varphi_1 \otimes E^*D^*S\widehat{\varphi_2}) + (\gamma-\theta)(\alpha-\beta) < \varphi_3, S\widehat{\varphi_2} > (\varphi_1 \otimes S\widehat{\varphi_4}) = \Phi \otimes K_0 + K_0 \otimes \Psi$

Pour $\Phi, \Psi \in K_u$.

REFERENCES

[1] Sarason, D.: “Algebraic properties of truncated Toeplitz operators“. Oper. Matrices 1(4), 491526 (2007).
[2] N.A. SEDLOCK, “Algebras of truncated Toeplitz operators“, *Oper. Matrices* 5 (2010), 309–326.
[3] Baranov, A., Bessonov, R., Kapustin, V. “Symbols of truncated Toeplitz opera- tors“ J. Funct. Anal. 261, 34373456 (2011)
[4] Baranov, A., Chalendar, I., Fricain, E., Mashreghi, J.E., Timotin, D. “ Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators“ J. Funct. Anal. 259(10), 2673 2701 (2010).
[5] Cima, J.A., Garcia, S.R., Ross, W.T., Wogen, W.R. “Truncated Toeplitz operators: spatial isomorphism, unitary equivalence, and similarity“ Indiana Univ. Math. J. 59(2), 595620 (2010).
[6] Garcia, S.R., Poore, D.E., Ross, W.: “ Unitary equivalence to a truncated Toeplitz operator: analytic symbols“ Proc. Am. Math. Soc. 140, 12811295 (2012).