



Research Paper

## Finite element modeling and analytical solution of a semi-elliptic crack's J-integral

Modélisation par éléments finis et solution analytique de l'intégrale-J d'une fissure semi-elliptique

**Abdelkader DJEBLI<sup>a,\*</sup>, Mostefa BENDOUBA<sup>a</sup>, Noureddine DELLA<sup>b</sup>, Abdelkrim AID<sup>a</sup>, Ali BENHAMENA<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>LPQ3M, Faculté ST Département GM, U. MS de Mascara BP305, Mascara 29000, Algeria.

<sup>b</sup>Département GC, Faculté ST, U. MS de Mascara BP305, Mascara 29000, Algeria.

### ARTICLE INFO

*Article history :*

Received 06 June 17

Received in revised form 02 August 17

Accepted 09 August 17

Keywords:

Stress intensity factor; Shape factor; J-Integral; FEM; Semi-elliptical crack

Mots clés:

Facteur d'intensité des contraintes ;  
Facteur de forme ; Intégrale-J ; MEF ;  
Fissure semi-elliptique.

### ABSTRACT

In this work, we first evaluate the J-integral rupture parameter as a function of various crack parameters (crack size, rod dimensions, intensity and nature of loads) for various crack form. In a second step, and in the base of the results obtained by the finite element method, we propose formulas of the factor shape, whose implementation remains rather simple and inexpensive in terms of time, effort and means to the engineer in order to predict evolution of the rupture behavior of a cylindrical component with a semi-elliptical crack emerging from the surface. The comparison of the proposed analytical solution showed a good performance relatively with results of the literature.

### RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous évaluons dans un premier temps l'intégrale-J en fonction des différents paramètres (taille de fissures, dimensions des tiges, intensité et nature des charges) pour diverses formes de la fissure. Dans un deuxième temps, et sur la base des résultats obtenus par la méthode des éléments finis, nous proposons des formules du facteur de forme (F), dont la mise en œuvre reste plutôt simple et peu coûteuse en matière de temps, d'effort et de moyens pour l'ingénieur afin de prévoir l'évolution du comportement en rupture d'un composant cylindrique gravé d'une fissure semi-elliptique débouchant de la surface. La comparaison des résultats du facteur de forme (F) par les formules proposées a montré une bonne performance relativement aux résultats de la littérature.

## 1 Introduction

Les tiges à forme cylindrique, les barres circulaires, les fils de renforcement...etc. sont fréquemment utilisés en structures. Sous des chargements répétés, statiques ou dynamiques, des fissures peuvent se développer à la surface comme à l'intérieur de la structure. Récemment, il a été montré qu'une analyse du comportement d'une fissure miniaturisée dans un spécimen (Fig.1), offre une évaluation efficace des propriétés de la propagation de cette dernière [1].

Pour faciliter la détermination de la forme de la fissure, quelques auteurs tel que Forman et Shivakumar [2] ont pris  $\beta=90^\circ$ , l'angle d'intersection du front de fissure avec la surface extérieure de la tige (Fig.2). Cependant les observations

\* Corresponding author. Tel.: +213 552460623.

E-mail address: djebliabdelkader@univ-mascara.dz

expérimentales n'accordent pas une concordance ferme à ces idéalizations (Fig.1), ce qui implique un impact sur l'exactitude des solutions.

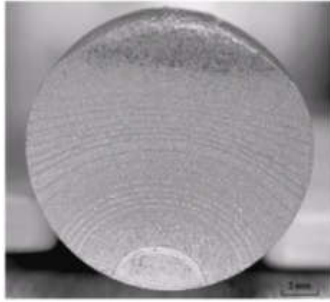


Fig.1 – Traces des stries laissées lors de la propagation de fissure [1].

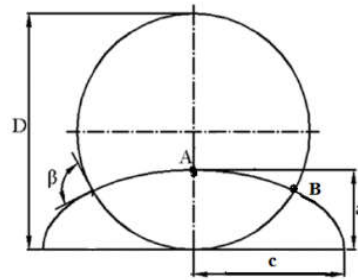


Fig.2 – Définition des paramètres de la fissure.

Récemment, Carpinteri et ses collaborateurs ont publié une revue résumant les deux dernières décennies de recherche autour de cette problématique [3]. Ils ont présenté certains résultats de recherche, où ils ont réexaminé l'influence des discontinuités géométriques sur la durée de vie en fatigue des composants structurels métalliques. En particulier, les entailles de différentes formes dans le cas des tôles à double courbure et des barres rondes sous le mode I de chargement.

Au début, Daoud et al [4], Bush [5] et Carpinteri [6] ont fixé le front de la fissure comme étant droit. Parallèlement, des fronts de fissure en forme d'arc circulaire ont été utilisés pour la modélisation de la fissure [7, 8]. Cependant, la modélisation de la fissure en un arc semi-elliptique a résolu le problème de la forme de la fissure [1,9-17]. En jetant la solution numérique au point voisin intérieur du point d'intersection du front avec la surface [14,16], les auteurs ont pu surmonter la complexité de la singularité en un point de surface.

De part leur importance, les cylindres creux (pipes) ont été analysés et des expressions des facteurs d'intensité des contraintes ont été proposées pour diverses formes et disposition de fissures, citons l'expression de Newman et Raju [7] et de Kaddouri [18]. En outre, les joints soudés ont eu leur part dans des récentes recherches. En effet, Yang Peng & al. Ont proposé une expression simplifiée pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes dans les composants soudés avec des fissures semi elliptiques [19]. D'après ces auteurs, les fissures émanant de ce type de composants soudés sont dues aux défauts microstructurales et ils ont confirmé que leurs évolutions sont sous une forme semi-elliptique.

Ainsi, l'objectif de ce travail est de proposer des expressions analytiques pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes pour le cas d'une barre cylindrique avec une fissure semi-elliptique, en considérant deux cas de chargement, à savoir traction et moment fléchissant. Ces deux cas de chargement résultent en mode I d'ouverture de la fissure.

## 2 Les paramètres de l'étude

Une solution suffisamment convergente pour une gamme importante de rapport de forme (a/c) et rapport de taille (a/D) de la fissure est nécessaire pour une bonne évaluation du comportement en rupture (propagation). Ce qui mène à une étude de référence pour l'analyse et le dimensionnement des structures avec plus de simplicité des calculs et par la suite, faciliter l'estimation de la durée de vie des composants fissurés. Du moment qu'une fissure peut se développer dans toutes les directions et sous différentes formes et tailles, plusieurs paramètres peuvent varier tel que le rapport de forme (a/c) et le rapport de taille (a/D) (Fig. 2). Les gammes des rapports (a/c) et (a/D) sont pris comme suit :

$$0.1 \leq a/c \leq 0.9 \quad \text{et} \quad 0.133 \leq a/D \leq 0.4$$

## 3 La méthode de calcul

Notre démarche repose sur le calcul des facteurs d'intensité des contraintes déduits des résultats des intégrales de contour par la relation suivante [20] :

$$J_k \Delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0} \int_{A_\epsilon} \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) dA, \quad k=1,2. \quad (1)$$

Le long du front d'une fissure transversale plane de forme semi-elliptique et perpendiculaire à l'axe de symétrie de la tige (Fig. 2). Nous avons utilisé le code de calcul ABAQUS pour simuler le comportement en ouverture de la fissure (Mode I). Où,  $W$  est la densité du travail des contraintes,  $\sigma_{ij}$  sont les contraintes,  $u_i$  sont les déplacements,  $n_k$  sont les composantes du vecteur unitaire normal à la surface du tube aux points du contour  $\Gamma$ . En principe, il est possible de définir  $J_k$  en plusieurs systèmes de coordonnées, mais pour la proposition d'une prédiction du comportement de la fissure, il est plus convenu d'avoir un système de coordonnées local au front de la fissure  $X_1, X_2$  et  $X_3$  (Fig.3).

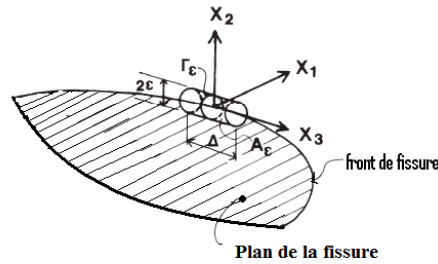


Fig.3 – Définition et nomenclature au voisinage du front de fissure.

On introduit une définition équivalente de  $J$  au voisinage du front de fissure le long de la surface du tube entourant la ligne du front (Fig.3).

Les relations entre l'intégrale- $J$  et les facteurs d'intensité des contraintes sont [20] :

$$J_1 = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (2)$$

$$J_2 = -\frac{2}{E^*} (K_I K_{II}) \quad (3)$$

Avec:

$E$ ,  $\nu$  qui sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson.

## 4 La procédure des éléments finis

### 4.1 Le choix des éléments

On assume l'utilisation d'éléments de type quadratique (brique à 20 nœuds). Le disque entourant le segment du front de fissure est présenté sur la fig.4. L'utilisation des éléments à 20 nœuds permet de calculer les déplacements à tous les nœuds et précise mieux les valeurs des déformations et des contraintes en points d'intégration de Gauss.

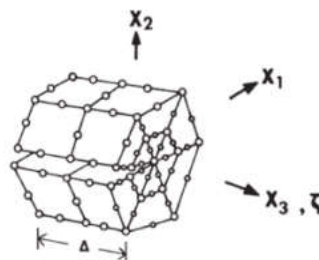


Fig.4 – Détails du maillage en éléments finis pour un segment de front de fissure [21].

## 4.2 Modélisation de la structure

En raison de la symétrie, seulement le quart de la structure peut être analysé (Fig.5.). La méthode de décalage du nœud médian de l'élément singulier en position de 1/4, avec effondrement des nœuds singuliers est utilisée [22] le long du front de fissure (Fig.4). La fig.6 illustre le maillage adopté.

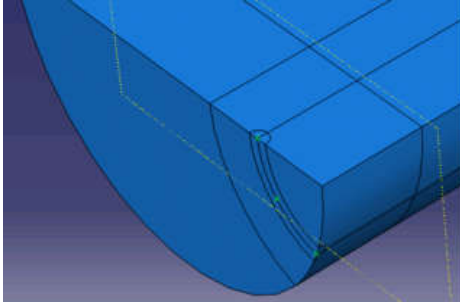


Fig. 5 – Présentation du quart de la structure

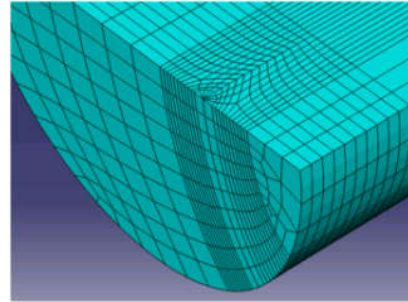


Fig. 6 – Maillage adopté

## 4.3 Modélisation des charges

En première partie une charge de traction uni-axiale est appliquée à l'extrémité libre de la tige. En seconde partie de cette analyse, nous avons appliqué une charge de flexion, pour étudier le comportement en rupture en cas de moment fléchissant. La fig.7 présente les deux cas de charge.

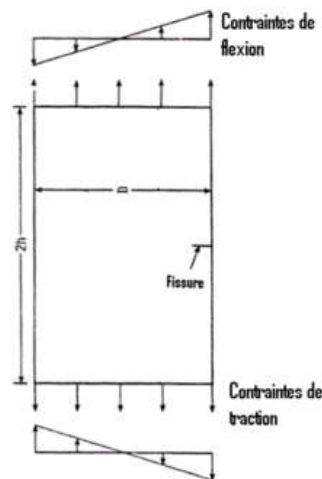


Fig.7 – Modélisation des charges appliquées à la tige.

## 5 Résultats

### 5.1 Evolution des intégrales-J

Il est important de vérifier la précision des résultats de calcul de l'intégrale-J par la comparaison des résultats pour différents contours d'intégrale. Les différents résultats sont rassemblés dans les courbes représentées sur les figs. 8.a. à 8.d. et les figs. 9.a. à 9.d. On remarque clairement que les différents contours d'intégrales donnent pratiquement des valeurs égales de J, ce qui confirme l'une des propriétés essentielles de J à travers nos calculs. Nous avons donc choisi les valeurs du dernier contour pour tout le reste de l'analyse. Les mêmes figures illustrent deux tendances de comportement, vis-à-vis des distributions des contraintes. La première tendance est celle obtenue pour les rapports de forme  $0.1 \leq a/c \leq 0.5$ , pour les deux cas de chargement, où nous constatons que J est maximale au point le plus profond de la fissure (Point A), (Figs. 8.a, 8.b, 9.a et 9.b), et elle est minimale à la surface (Point B), (Figs. 8.c, 8.d, 9.c et 9.d). Ce constat est valable pour les deux cas de chargement.

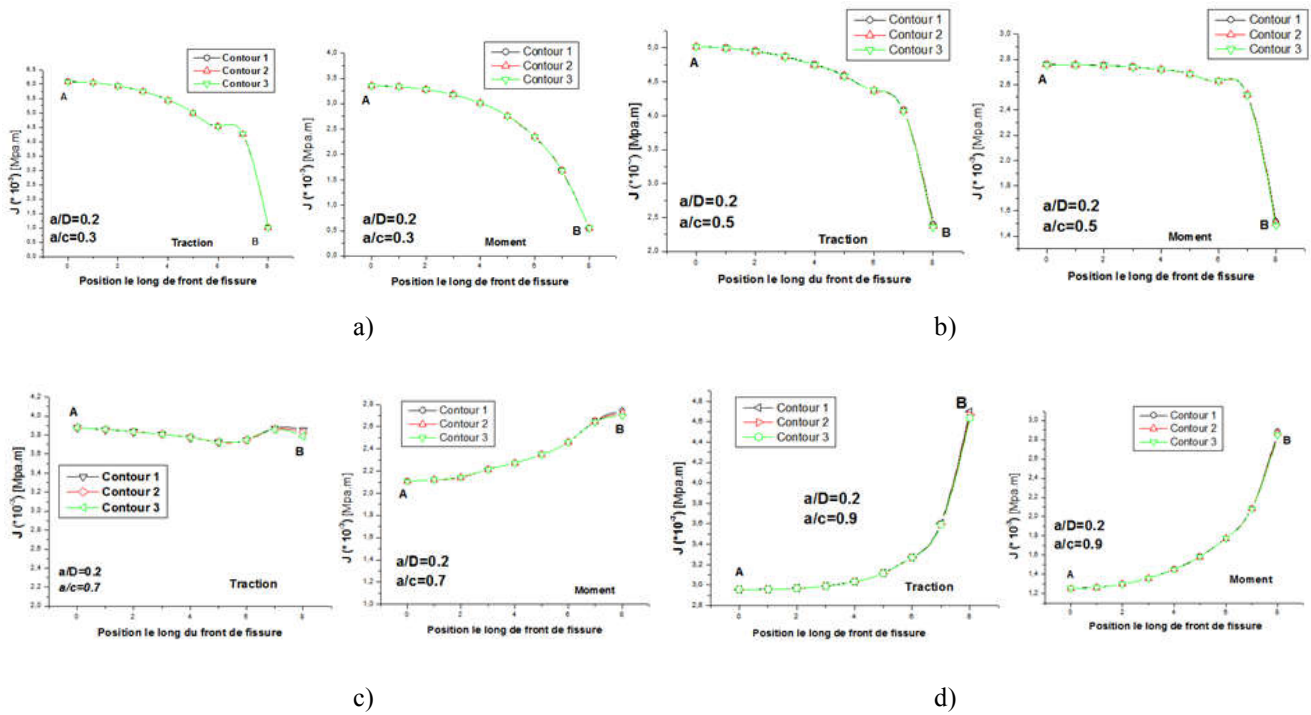


Fig.8 – Evolution des intégrales-J en fonction des positions le long des fronts des fissures pour les deux cas de chargement et un rapport de taille  $a/D=0.2$  et différents rapports de forme.

Un autre constat, tiré des résultats illustrés dans ces figures est qu'en point B, une instabilité des intégrales-J est remarquée pour les différents rapports de taille et rapports de forme, cependant elle est stable pour un rapport de forme  $a/c=0.7$  (Figs. 8.c et 9.c).

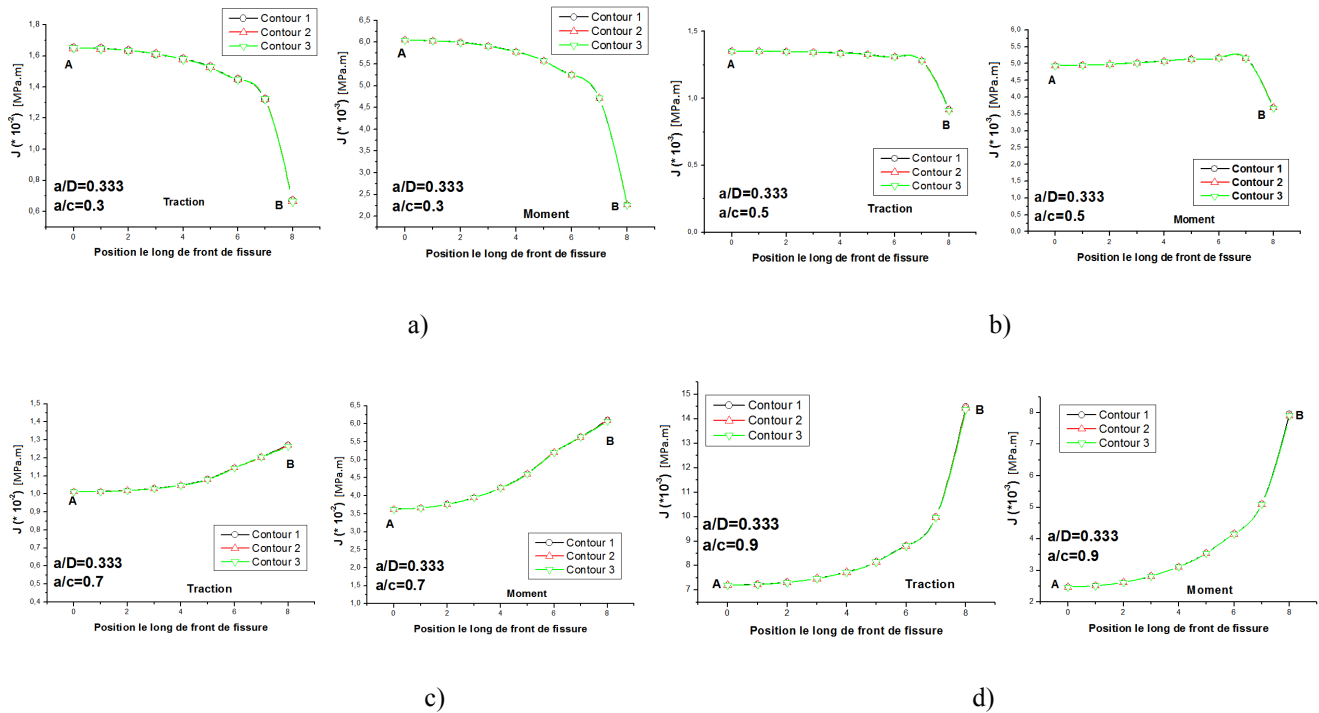


Fig.9 – Evolution des intégrales-J en fonction des positions le long des fronts des fissures pour les deux cas de chargement et un rapport de taille  $a/D=0.33$  et différents rapports de forme.

L'intérêt de cette étude est de pointer l'attention sur les positions au long du front de fissure où la distribution des contraintes présente un pic, c.-à-d. là où l'amplitude de l'intensité des contraintes est maximale. Les graphes des figs. 8 et 9 résument les résultats obtenus.

Les graphes qui donnent J en fonction de la position sur le front de fissure montrent typiquement que les résultats de J deviennent incohérents, sur le point de surface, nettement en différentes tendances indiquées par les points intérieurs. La région où la distribution des contraintes est instable est très réduite et il est proposé de prendre le résultat à un point voisin de la surface dans le maillage des éléments finis. Il est bien mentionné en [1], que la singularité en racine carrée à la surface existe pour un rapport de forme  $a/c=0.6$  et un coefficient de Poisson autour de 0.3. Ce fait est bien constaté sur les résultats obtenus.

Donc pour notre étude, on va se pointer sur le point A (Le point le plus profond). Pour le point B de la surface une étude plus approfondie est nécessaire.

D'après les résultats résumés dans la fig.10, la distribution des intensités de contraintes adopte la même évolution pour tous les cas de rapport de taille et de forme. Pour les deux cas de chargement, on a la même configuration, sauf pour les points B (Voisin) où on constate une instabilité de l'évolution des contours-J. Pour étudier le comportement des intensités de contraintes aux points A et B, on a comparé les résultats obtenus pour différents cas de figure.

## 5.2 Exploitation des résultats

Cette étude porte sur les matériaux à rupture fragile ayant un comportement élastique linéaire. Les Aciers durs, par exemple, sont des matériaux utilisés depuis presque un siècle dans l'industrie et le bâtiment. Notre objectif, qui n'est pas nouveau en soi est de compléter et de simplifier le facteur de forme F (facteur de correction géométrique comme préfèrent l'appeler quelques auteurs anglo-saxons) d'une tige fissurée transversalement à sa face extérieure en fonction des caractéristiques géométriques de la fissure (rapports de taille  $a/D$  et rapport de forme  $a/c$ ).

Ce travail est basé sur l'exploitation des résultats obtenus. Particulièrement la variation de l'intégrale-J en fonction des deux rapports. L'évaluation de l'intégrale-J, par la méthode des éléments finis, permet de déduire le facteur d'intensité des contraintes K (mode I) par les relations suivantes :

$$J = \frac{K^2}{E^*} \quad (4)$$

Avec :

$$E^* = E \text{ où } E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \text{ pour un état de contraintes ou de déformations planes, respectivement,}$$

Et :

$$K = S_i \sqrt{\pi \frac{a}{Q}} F \quad (5)$$

Où :  $S_i$  est la contrainte appliquée, i indique le type de chargement (t=tension, f indique flexion), F le facteur de forme (Facteur d'intensité des contraintes normalisé) et Q le facteur de forme pour une fissure de forme elliptique défini par Raju et Newman [8] avec :

$$Q = 1 + 1.464 \left( \frac{a}{c} \right)^{1.65} \quad \text{si } \frac{a}{c} \leq 1 \quad \text{et} \quad Q = 1 + 1.464 \left( \frac{c}{a} \right)^{1.65} \quad \text{si } \frac{a}{c} > 1$$

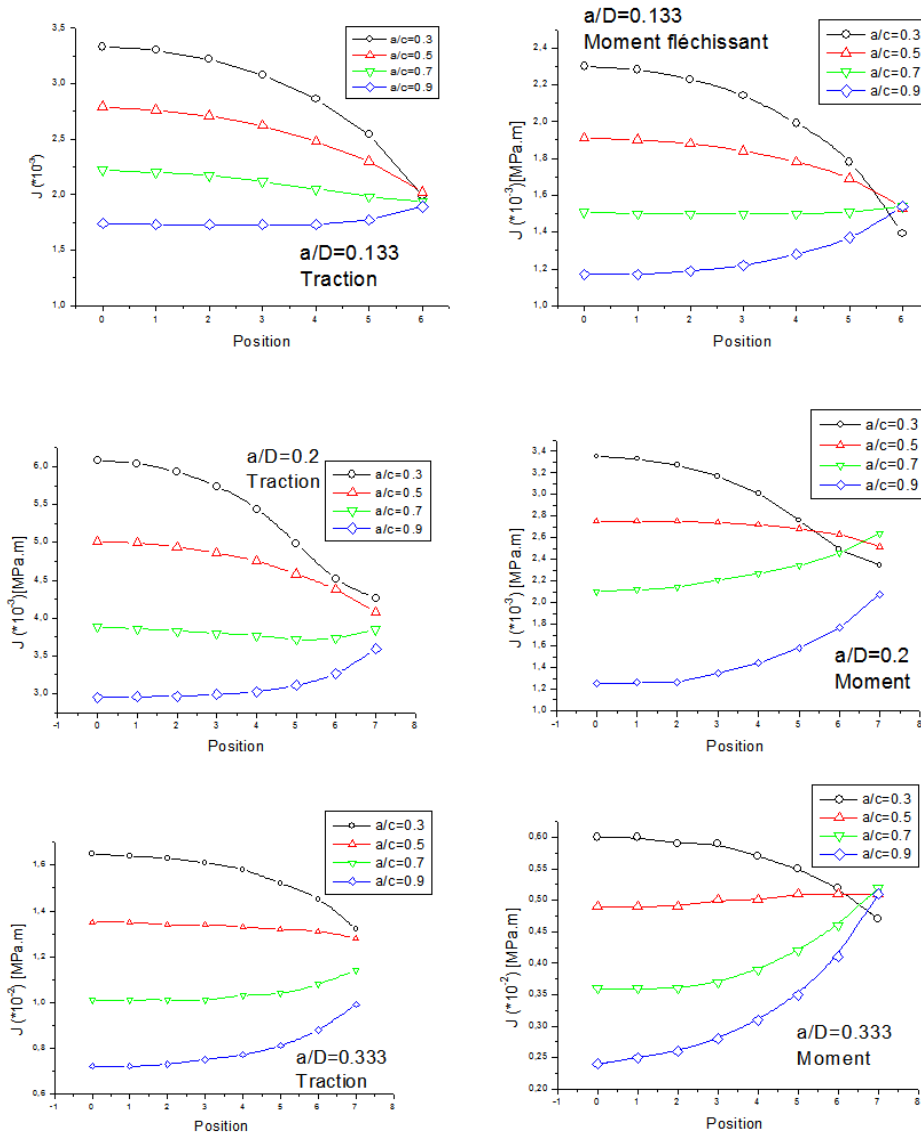


Fig. 10 – Comparaison des Distributions des intensités des contraintes le long des fronts des fissures regroupées par un rapport de taille et quatre rapports de forme  $a/c=0.3, 0.5, 0.7$  et  $0.9$  pour les deux cas de chargement.

De la relation (5) on déduit le facteur de forme  $F$  en fonction du chargement  $S_i$  pour différents rapports : la profondeur de la fissure sur le diamètre de la tige ( $a/D$ ) et le rapport du petit axe sur le grand axe de la fissure ( $a/c$ ), soit :

$$F = \frac{K}{\sqrt{\pi \frac{a}{Q}}} \tag{6}$$

### 5.3 Comparaison des résultats avec ceux de la littérature

Les graphes de la fig.11 rassemblent nos résultats et ceux récoltés de la littérature afin de comparer la variation du facteur de forme  $F$  en fonction du rapport profondeur de la fissure sur le diamètre du cylindre ( $a/D$ ) pour différents rapports du petit axe sur le grand axe de la fissure ( $a/c$ ). L'analyse de ces figures indique une bonne corrélation entre les résultats obtenus par Raju et Newman [8] d'un coté et par Shin et Cai [1] d'un autre coté avec ceux obtenus par analyse FEM. On note cependant, que ces deux groupes d'auteurs ont considéré un chargement en traction avec une légère différence dans la définition de la longueur de la fissure (paramètre  $c$ ) (Fig. 2). Newman et Raju ont défini  $c$  comme étant la demi longueur de l'arc extérieur délimitant la fissure sur la surface. Par contre, nous avons emprunté la définition de Chin et Cai, ce qui

explique la concordance de nos résultats avec ceux de ces derniers avec un léger décalage avec ceux obtenus par Newman et Raju pour des rapports  $a/D$  élevés (Fig.11.a, b et c).

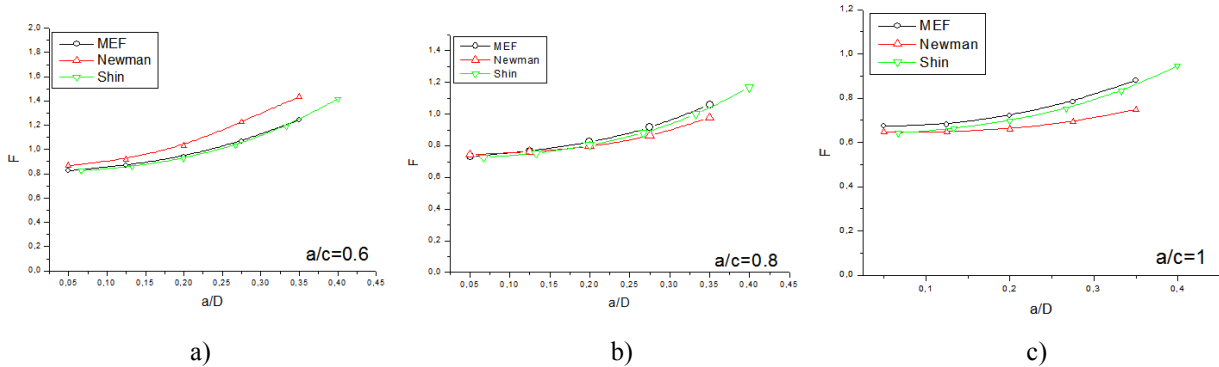


Fig.11 – Comparaison des résultats de F en fonction de  $a/D$  avec les résultats de Newman et ceux de Shin pour le point A

Pour les figs. 12.a à 12.c qui présentent les variations de F en fonction des rapports  $a/c$ , nous remarquons une bonne corrélation des résultats actuels avec ceux obtenus par Shin and Cai, avec un décalage aux extrémités avec ceux obtenus par Newman and Raju.

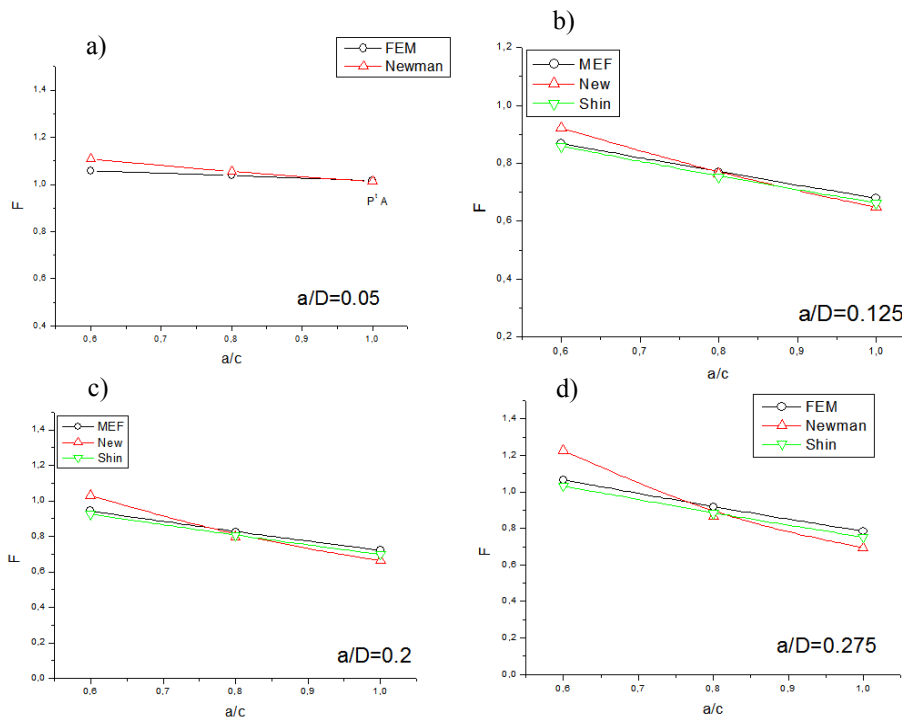


Fig.12 – Comparaison des résultats de F en fonction de  $a/c$  avec les résultats de Newman et de Shin pour le point A

Globalement, les résultats de cette analyse sont en bonne concordance avec les autres résultats, particulièrement pour le rapport  $a/c = 0.8$ , ce qui signifie que par une bonne définition des paramètres géométriques de la fissure ainsi que la bonne utilisation des maillages en éléments finis, nous pouvons atteindre des résultats de plus en plus convergents.

Ainsi, à ce stade, il est possible d’exploiter des résultats dans le but de formuler des expressions simples permettant de prédire le facteur d’intensité des contraintes juste en connaissant les paramètres de la fissure, ceci pour deux cas de chargement, un chargement de traction axiale et un chargement de flexion.

Pour déterminer l’expression analytique, il est nécessaire de rechercher une relation polynômiale décrivant le facteur de forme F, en fonction de la profondeur de la fissure par rapport au diamètre de la structure ( $a/D$ ). Pour déterminer le degré



du polynôme, il est judicieux de diversifier les points d'analyse afin d'avoir un bon lissage des courbes. Pour cela, et comme les résultats l'indiquent ; on a choisi la gamme de rapport a/c et a/D utilisé par Shin et Cai. Comme illustré dans les figs.13, le degré 3 des polynômes d'ajustement des résultats donne plus d'affinité ce qui résulte en l'expression de la forme suivante :

$$F = b_0 + b_1\left(\frac{a}{c}\right) + b_2\left(\frac{a}{c}\right)^2 + b_3\left(\frac{a}{c}\right)^3 \tag{7}$$

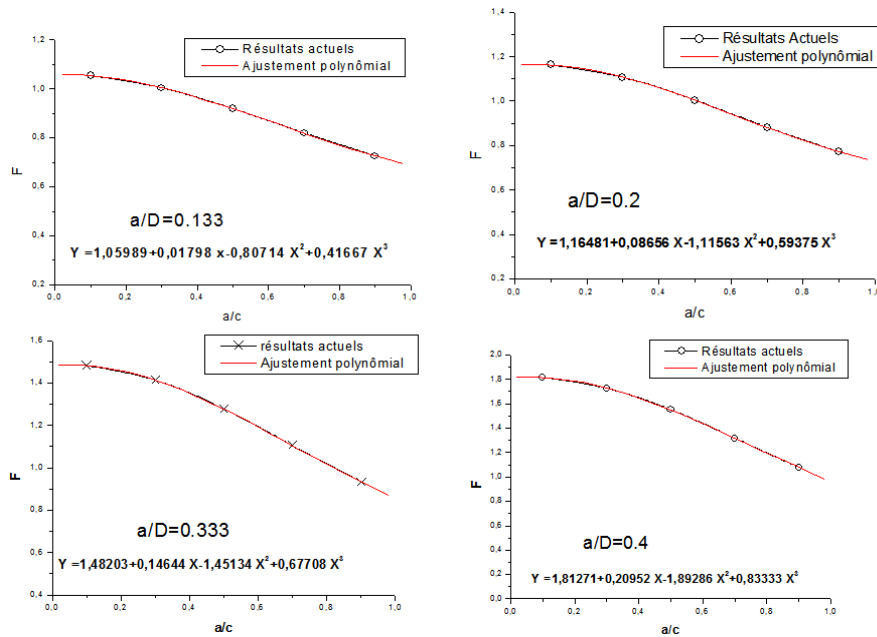


Fig.13 – Ajustements polynômiaux du 3<sup>ème</sup> degré des fonctions F=f(a/c) pour différents rapports de taille a/D.

Les coefficients  $b_i$  varient en fonction des rapports a/D, donc, on a construit, par la suite, pour chaque  $b_i$  un polynôme de troisième degré pour déterminer les coefficients de l'expression analytique donnant F en fonction de (a/c) et (a/D). En combinant les différents résultats, il a été déduit deux expressions de F en fonction des différents paramètres de la fissure pour les deux cas de chargement :

pour le cas de traction :

$$F = \left[ 0.67339 + 4.65959\left(\frac{a}{D}\right) - 17.49694\left(\frac{a}{D}\right)^2 + 32.42.073\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] + \left[ - 0.37101 + 4.71931\left(\frac{a}{D}\right) - 1614467\left(\frac{a}{D}\right)^2 + 19.93677\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] \left(\frac{a}{c}\right) + \left[ 1.10136 - 23.89172\left(\frac{a}{D}\right) + 87.05218\left(\frac{a}{D}\right)^2 - 115.09192\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left[ - 0.82042 + 15.58338\left(\frac{a}{D}\right) - 56.50257\left(\frac{a}{D}\right)^2 + 69.70022\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] \left(\frac{a}{c}\right)^3$$

pour le cas de flexion :

$$F = \left[ 0.51483 + 4.9632\left(\frac{a}{D}\right) - 21.65658\left(\frac{a}{D}\right)^2 + 30.35285\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] + \left[ - 0.93498 + 3.04954\left(\frac{a}{D}\right) + 8.48818\left(\frac{a}{D}\right)^2 - 24.85607\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] \left(\frac{a}{c}\right) + \left[ 2.7347 - 18.8871\left(\frac{a}{D}\right) + 23.97144\left(\frac{a}{D}\right)^2 + 4.06495\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left[ - 2.65812 + 17.38004\left(\frac{a}{D}\right) - 27.14327\left(\frac{a}{D}\right)^2 + 3.53292\left(\frac{a}{D}\right)^3 \right] \left(\frac{a}{c}\right)^3$$

## 6 Conclusion

Le comportement en rupture d'une tige cylindrique est typique à une propagation de fissure de forme semi-elliptique. La distribution des intensités de contraintes est fonction de la taille et de la forme de la fissure. Ainsi, par une modélisation numérique 3D, ce travail a fait la lumière sur la tendance des intégrale-J le long du front d'une fissure semi-elliptique. Les

résultats de l'analyse numérique ont permis un développement de deux expressions analytiques permettant un calcul direct de l'intégrale-J. Ceci pour deux cas de chargement : traction et flexion.

La méthode analytique, par sa simplicité, et par sa rapidité, peut se substituer aux méthodes numériques difficiles à mettre en œuvre, nécessitant parfois des équipements performants et des temps de calculs très longs. Autrement dit la méthode analytique est beaucoup plus économique que la méthode numérique.

Ce travail a permis donc le développement de deux expressions analytiques simples permettant de tirer des résultats fiables de l'intégrale J en fond de fissure et comparables à celles obtenues numériquement. Elles permettent une résolution du problème de comportement en rupture d'une structure de forme cylindrique pleine soumise à un chargement.

Il reste à dire que ce travail, peut être perfectionné en étudiant l'effet de la nature du matériau utilisé.

### Remerciements

Nous tenons à remercier toute l'équipe 4 du laboratoire LPQ3M sous la direction du Pr. Aid Abdelkrim. Nos remerciements vont aussi au Pr. Kaddouri K. pour son soutien et ses conseils précieux.

### REFERENCES

- [1] C.S. SHIN and C.Q. CAI, Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending. *International Journal of Fracture* 129 (2004) pp.239–264.
- [2] R.G. Forman & V. Shivakumar, Growth behavior of surface cracks in the circumferential plane of solid and hollow cylinders. *Fracture Mechanics Vol. 70 ASTM 905* (1986) pp.59–74.
- [3] A. Carpinteri, C. Ronchei, S. Vantadori, Stress intensity factors and fatigue growth of surface cracks in notched shells and round bars: Two decades of research work. *Fatigue Frac. Eng. Mater. Struct.* 36 (2013) pp.1164–1177.
- [4] O.E.K. Daoud, D.J. Cartwright and M. Carney, Strain-energy release rate for a single edge-cracked circular bar in tension. *Journal of Strain Analysis Vol.13* (1978) pp.83–89.
- [5] J. Bush. Stress intensity factors for single-edge-crack solid and hollow round bars loaded in tension. *Journal of Testing and Evaluation Vol. 9* (1981) pp.216–223.
- [6] A. Carpinteri. Stress intensity factors for straight-fronted edge cracks in round bars. *Engineering Fracture Mechanics Vol. 42* (1992) pp.1035–1040.
- [7] D. Wilhem, J. Fitz Gerald, J. Carter and D. Dittmer, An empirical approach to determining K for surface cracks. *Proceedings of the 5th international Conference on Fracture Research*, 1982, pp.11–21.
- [8] I.S. Raju, and J.C. Newman, Stress- intensity Factors for circumferential surface cracks in pipes and rods under tension and bending loads. *Fracture Mechanics Vol. 70 ASTM STP 905* (1986) pp. 789–805.
- [9] Athanassiadis, J.M. Boissenot, P. Brevet, D. Francois and A. Raharinaivo, Linear elastic fracture mechanics computations of cracked cylindrical tensioned bodies. *International Journal of Fracture Vol. 17* (1981), pp.553–566.
- [10] M.A. Astiz, An incompatible singular elastic element for two and three dimensional crack problems. *International Journal of Fracture Vol. 31* (1986) pp.105–124.
- [11] M. Shiratori, T. Miyoshi, Y. Sakai and G.R. Zhang, Analysis of stress intensity factors for surface cracks subjected to arbitrarily distributed surface stresses. *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs* (1986) pp.660–662.
- [12] Y. Murakami and H. Tsuru, Stress-Intensity factor equations for semi-elliptical surface crack in a shaft under bending. *Stress Intensity Factors Handbook*, Oxford Pergamon, Ed.2, 1987.
- [13] M. Caspers, C. Mattheck and D. Munz, Propagation of surface cracks in notched and unnotched rods. *Surface Crack Growth Models Experiments and Structures*, ASTM STP 1060 (1990) pp.365–389.
- [14] A. Carpinteri, Elliptical-arc surface cracks in round bars. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures Vol. 15* (1992) pp.1141–1153.
- [15] A Carpinteri and R Brighenti, Part-through cracks in round bars under cyclic combined axial and bending loading. *International Journal of Fatigue Vol. 18* (1996) pp. 33–39.
- [16] N. Couroneau and J. Royer, Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I. *International Journal of Fatigue Vol. 20* (1998) pp.711–718.

- 
- [17] YS. Shih and JJ. Chen, The stress intensity factors study of an elliptical cracked shaft. Nuclear Engineering and Design Vol. 214 (2002) pp.137-145.
- [18] K. Kaddouri, Étude du Comportement en rupture des pipes. Thèse de Doctorat, Faculté des sciences de l'ingénieur, Sidi BelAbbess, 2007.
- [19] Y. Peng, C. Wu, Y. Zheng & J. Dong, Improved Formula for the Stress Intensity Factor of Semi-Elliptical Surface Cracks in Welded Joints under Bending Stress. Materials 10(2) 166 (2017).
- [20] G. P. Cherepanov, Mechanics of Brittle Fracture. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [21] J. Barlow, Optimal stress locations in finite element models, International Journal of Numerical. Methods Eng, Vol. 10 (1976) pp. 243-251.
- [22] RS. Barsoum, On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 10 (1976) p. 25.