



Journal of Materials and Engineering Structures

Research Paper

Analyse du gauchissement dans les poutres courtes par la théorie d'ordre élevé

Buckling Analysis of Laminate Short Beams by High Order Theory

Berrabah Hamza Madjid^{a,c,*}, Adda Bedia El Abbas^{b,c}, Naceri Mokhtar^{b,c}

^a Département de génie civil, centre universitaire de Relizane, Relizane, Algérie

^b Département de génie civil, université de Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes, Algérie

^c Laboratoire des matériaux et hydrologies

ARTICLE INFO

Historique de l'article :

Recu : 12 avril 2015

Révisé : 12 juillet 2015

Accepté : 30 avril 2016

Mots clés:

Composite,

Poutre courte,

Cisaillement,

Gauchissement

Keywords :

Composite,

Short beam,

Shear,

Warping.

RESUME

Le comportement de cisaillement transversal des poutres composites peut être critique et doit donc être correctement représenté par les différents modèles des structures utilisées habituellement pour prévoir leur comportement ou pour identifier leurs propriétés. On propose dans ce travail, une analyse de gauchissement dans les poutres stratifiées courtes selon une approche analytique simple basée sur des théories d'ordre élevé.

ABSTRACT

The transverse shear behavior of the composite beams can be critical and must therefore be properly represented by the various models of structures normally used to predict their behavior or to identify their properties. We propose in this work, a warpage analysis in short laminated beams using a simple analytical approach based on the theories of higher order.

* Corresponding author. Tel.: +213 790351763.

E-mail address: b_hamza_2005@yahoo.fr

1 Introduction

Le cisaillement interlaminaire est un phénomène important dans beaucoup de problèmes des composites stratifiés (plaques ou poutres). Il est en outre une composante majeure dans l'étude de ces structures car il peut être responsable de leur ruine, notamment par délaminage. Son apparition est due en majeure partie à un faible rapport entre la rigidité de cisaillement transverse et la rigidité longitudinale de la poutre [1].

La détermination de la contrainte de cisaillement transverse développée dans l'épaisseur des poutres et de plaques soumises à la flexion est habituellement effectuée sous quelques hypothèses bien connus, basées sur le champ de déplacement à travers l'épaisseur [2]. Les théories dites du premier ordre [3] considèrent l'approche la plus simple, c'est à dire qu'une section droite reste droite après la déformation. Ces théories sont habituellement décrites par l'hypothèse de Timoshenko [4] pour le cas des poutres, et Reissner Mindlin [6] pour le cas des plaques élastiques. Les théories d'ordre élevé vérifient les conditions que la contrainte de cisaillement est nulle dans les bords supérieurs et inférieurs de la poutre contrairement aux théories de Timoshenko [4] et Reissner Mindlin [6]. Ces théories proposent un gauchissement de la section par l'introduction d'une forme cubique du déplacement, le long des axes de la structure. Elles sont plus conformes puisqu'elles donnent lieu à des déformations et des contraintes de cisaillement non homogènes dans l'épaisseur [7].

2 Analyse

2.1 Etude cinématique

Nous allons proposer une solution au problème classique de flexion trois points en intégrant d'une part, le gauchissement de la section dans l'épaisseur et d'autre part son annulation au centre de la poutre. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites ont été obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels. Le champ de déplacement ainsi déterminé reprend les expressions de la théorie classique complétées par un terme supplémentaire prenant en compte le cisaillement.

Ce terme est en fait le produit de deux autres. Le premier étant constant, tandis que le second correspond à une modulation de la répartition de cisaillement dans l'épaisseur en fonction de la position sur la ligne moyenne.

2.2 Champs de déplacement

Le champ de déplacement correspondant à ce type de structure est généralement représenté par le déplacement $u(M)$ d'un point quelconque $M(x_1, x_3)$ dans le cas d'une représentation bidimensionnelle, rapportée au déplacement $u^0(M_0)$ correspondant à un point de référence $M_0(x_1, 0)$ qui se situe dans l'axe neutre (figure1).

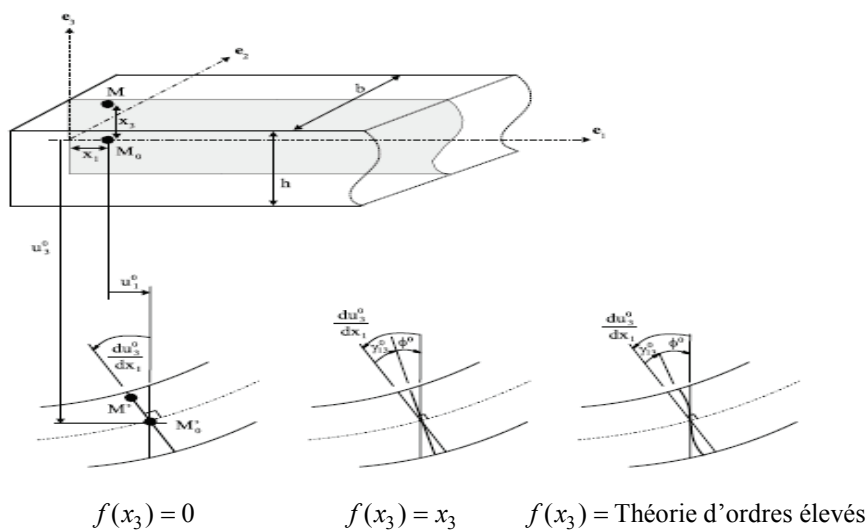


Figure1. Déplacement de la poutre et distribution de u_1 dans l'épaisseur en fonction de $f(x_3)$

La composante plane du déplacement $u_1(M)$ peut être dévisée en trois termes : le premier représente le déplacement en membrane, le second le déplacement induit par la rotation de la section due à la flexion comme déjà définie dans la théorie classique des poutres d'Euler Bernoulli qui ne tient pas en compte le cisaillement transverse. Le troisième terme, est un raffinement avec prise en compte de la distribution des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur par l'introduction de la fonction $f(x_3)$ qui définit le gauchissement des sections transversales. Ce type raffinement mène généralement aux théories habituellement désignées sous le nom théorie d'ordre élevé [1]. Le champ de déplacement de n'importe quel point de la poutre s'écrit

$$U(M) = \begin{cases} u_1(x_1, x_3) = u_0^1(x_1) - x_3 u_{3,1}^0(x_1) + f(x_3) \gamma_{13}^0(x_1) \\ u_3(x_1, x_3) = u_3^0(x_1) \end{cases}, \quad (1)$$

Tel que $u_1^0(x_1)$ et $u_3^0(x_1)$ sont les deux composantes de déplacement du point M_0 situé dans l'axe neutre et qui se déplace en M_0' (voir figure1). $u_{3,1}^0(x_1)$ Désigne la rotation de la section autour de l'axe e_2 induite par la flexion. $f(x_3)$ C'est une fonction impaire de variable x_3 qui peut être définie. La fonction $f(x_3)_{,3}$ représente la forme de la distribution des contraintes de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la poutre, et $\gamma_{13}^0(x_1)$ représente la déformation de cisaillement transverse prise sur la ligne moyenne de la poutre.

$$\gamma_{13}^0(x_1) = u_{3,1}^0(x_1) - \phi^0(x_1) \quad (2)$$

Tel que $\phi^0(x_1)$ est rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne.

2.3 Tenseur des déformations et des contraintes

Dans le cadre des petites perturbations (petites déformations), le tenseur linéaire de contraintes de Green-Lagrange s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(x_1, x_3) = u_{1,1}^0(x_1) - x_3 u_{3,11}^0(x_1) + f(x_3) \gamma_{13,1}^0(x_1) \\ \gamma_{13}(x_1) = f_{,3} \gamma_{13}^0(x_1) \end{cases} \quad (3)$$

Selon la théorie du comportement élastique des poutres stratifiées [6], L'expression des contraintes est écrite

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}] \{\varepsilon\} \quad (4)$$

Ou sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Dans notre cas, et Selon la théorie classique des poutres, ε_{33} est négligée comme une première approximation.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \bar{Q}_{11} \varepsilon_{11} \\ \sigma_{13} = \bar{Q}_{55} \gamma_{13} \end{cases} \quad (8)$$

2.4 Equations d'équilibre et conditions aux limites

En considérant le cas générale d'un domaine D soumis à un système de sollicitations extérieures qui peut traduire soit une action caractérisée par une densité volumique f^V (forces volumiques), soit une action de contact s'exerçant sur une partie de la frontière ∂D et caractérisée par une densité surfacique f^S (forces surfaciques). Le travail virtuel de tous les efforts (intérieurs et extérieurs) s'exerçant sur le système est nul.

$$\delta W_{ext}(\delta U) + \delta W_{int}(\delta U) = 0, \forall \delta U \quad (9)$$

$$\delta W_{int}(\delta U) = - \int_D \sigma : \delta \in dV, \quad (10)$$

$$\delta W_{ext}(\delta U) = \int_D f^V \delta U dV + \int_{\partial D_f} f^S \delta U dS \quad (11)$$

2.5 Champ virtuel

Le champ de déplacement virtuel s'écrit dans la base (e_1, e_2, e_3)

$$\begin{cases} \delta u_1(M) = \delta u_1^0(x_1) - x_3 \delta u_{3,1}(x_1) + f(x_3) [\delta u_{3,1}^0(x_1) - \delta \phi^0(x_1)] \\ \delta u_3(M) = \delta u_3^0(x_1) \end{cases} \quad (12)$$

De façon identique, le tenseur des déformations virtuelles s'écrit

$$\begin{cases} \delta \varepsilon_{11}(M) = \delta u_{1,1}^0(x_1) - x_3 \delta u_{3,11}^0(x_1) + f(x_3) [\delta u_{3,11}^0(x_1) - \delta \phi_1^0(x_1)] \\ \delta \gamma_{13}(M) = f_{,3}(x_3) [\delta u_{3,1}^0(x_1) - \delta \phi^0(x_1)] \\ \delta \gamma_{13}(M) = f_{,3}(x_3) \delta \gamma_{13}^0(x_1) \end{cases} \quad (13)$$

Suivant les hypothèses de la théorie classique des poutres, le chargement appliqué peut être de différentes natures (voir figure2) : une charge répartie, une charge concentrée ou sous la forme d'un moment. Le travail virtuel des efforts extérieurs pour une poutre de longueur l s'écrit

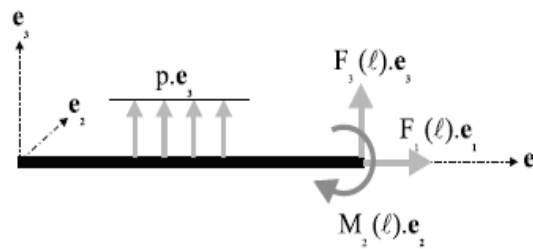


Figure 2. Les différents cas de charges appliquées à la poutre

$$\delta W_{ext}(\delta u, \delta \phi) = \int_0^l p \delta u_3^0 dx_1 + F_3(l) \delta u_3^0(l) + F_1(l) \delta u_1(l) + M_2 \delta \phi^0(l) \quad (14)$$

A partir des équations des contraintes et des déformations virtuelles (8) et (13), le travail des forces intérieures s'écrit

$$\delta W_{int}(\delta u, \delta \phi) = - \int_0^l [N(x_1) \delta u_{1,1}^0 + M(x_1) \delta u_{3,11}^0(x_1) + B(x_1) \delta \gamma_{13,1}^0(x_1) + H(x_1) \delta \gamma_{13}^0(x_1)] dx_1 \quad (15)$$

Avec $N(x_1)$ et $M(x_1)$ sont respectivement l'effort normale et le moment de flexion.

$$N(x_1) = \int \sigma_{11} dS = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{11} \varepsilon_{11} b dx_3 \quad (16)$$

$$M(x_1) = - \int_s x_3 \sigma_{11} dS = - \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \bar{Q}_{11} \varepsilon_{11} b dx_3 \quad (17)$$

Les résultantes supplémentaires $B(x_1)$ et $H(x_1)$ sont dues à l'introduction de $f(x_3)$ dans l'expression du champ de déplacement (1). Tel que $B(x_1)$ est la dimension d'un moment, et $H(x_1)$ dimension d'une force.

$$B(x_1) = \int_s f(x_3) \sigma_{11} dS = \int_{-h/2}^{h/2} f(x_3) \bar{Q}_{11} \varepsilon_{11} b dx_3 \quad (18)$$

$$H(x_1) = \int_s f(x_3)_{,3} \sigma_{13} dS = \int_{-h/2}^{h/2} f^2(x_3)_{,3} \bar{Q}_{55} \gamma_{13}^0(x_1) b dx_3 \quad (19)$$

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11} \{l, x_3, x_3^2\} dx_3$$

On pose $\{B_{11}^a, D_{11}^a, F_{11}^a\} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11} f(x_3) \{l, x_3, f(x_3)\} dx_3 \quad (20)$

$$A_{55}^a = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{55} (f_{,3}(x_3))^2 dx_3$$

L'intégration de ces termes dans les équations (16), (17), (18) et (19) donne les expressions suivantes

$$N(x_1) = u_{1,1}^0(x_1) b A_{11} - u_{3,11}^0(x_1) b B_{11} + \gamma_{13,1}^0(x_1) b B_{11}^a \quad (21)$$

$$M(x_1) = -u_{1,1}^0(x_1) b B_{11} + u_{3,11}^0(x_1) b D_{11} - \gamma_{13,1}^0(x_1) b D_{11}^a \quad (22)$$

$$B(x_1) = u_{1,1}^0(x_1) b B_{11}^a - u_{3,11}^0(x_1) b D_{11}^a + \gamma_{13,1}^0(x_1) b F_{11}^a \quad (23)$$

$$H(x_1) = \gamma_{13}^0(x_1) b A_{55}^a \quad (24)$$

En appliquant le principe des travaux virtuel dans les expressions des travaux virtuels intérieurs (14) et extérieurs (15), nous obtenons après intégration par parties l'expression suivante

$$- \int_0^l \left(N_{,1} \delta u_1^0 + \left(((M+B)_{,1} - H)_{,1} - p \right) \delta u_3^0 + (B_{,1} - H) \delta \varphi^0 \right) dx_1 + \left[-N \delta u_1^0 + ((M+B)_{,1} - H) \delta u_3^0 - (M+B) \delta u_{3,1}^0 + B \delta \varphi^0 \right]_0^l \quad (25)$$

$$+ F_3(l) \delta u_3^0(l) + F_1(l) \delta u_1^0(l) + M_2(l) \delta \varphi^0(l) = 0 \quad \forall (\delta u_1^0, \delta u_3^0, \delta \varphi^0)$$

Comme l'égalité $\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0$ est valable quel que soient les déplacements virtuels $\delta u_1^0, \delta u_3^0$ et $\delta \varphi^0$, nous déduisons les équations d'équilibres suivantes

$$\begin{cases} N_{,1} = 0, \\ B_{,1} - H = 0, \\ -((M+B)_{,1} - H)_{,1} + p = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Les conditions aux limites en $x_1 = 0$ et $x_1 = l$ peuvent être exprimées soit en déplacement soit en force

$$\begin{cases} \delta u_1^0 = 0 \\ \delta \phi^0 = 0 \\ \delta u_{3,1}^0 = 0 \\ \delta u_3^0 = 0 \end{cases} \quad \text{Où} \quad \begin{cases} -N + F_1 = 0 \\ B + M_2 = 0 \\ M + B = 0 \\ (M + B)_{,1} - H + F_3 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

3 Résolution associée avec la configuration de la flexion trois points

La poutre (Figure3), est sollicitée en flexion trois points, par symétrie de géométrie et de chargement, nous allons utiliser le segment $0 \leq x_1 \leq L/2$ pour traiter le problème c'est à dire F_3 sera prise à moitié.

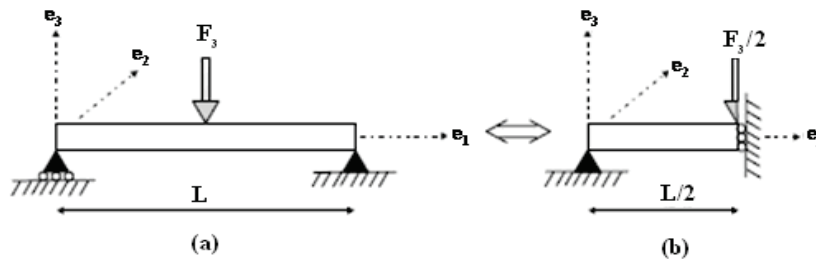


Figure 3. Poutre sollicitée en flexion trois points

3.1 Conditions aux limites

Pour $x_1 = 0$, le déplacement est nul selon e_3 , et la symétrie impose une rotation nulle de la section en $x_1 = \frac{L}{2}$.

$$\begin{cases} u_3^0(0) = 0 \\ u_{3,1}^0(L/2) = 0 \\ \phi^0(L/2) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Des conditions naturelles supplémentaires sont déduites du système d'équations (26)

$$\begin{cases} M_{,1}(L/2) + B_{,1}(L/2) - H(L/2) + \frac{F_3}{2} = 0 \\ B(0) + M(0) = 0 \\ B(0) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Dans ce travail nous considérons différentes formes de la fonction de gauchissement $f(x_3)$ qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse (Sauf pour la théorie d'Euler Bernoulli), et d'autre part, d'en approcher la forme de la distribution dans l'épaisseur

$$f(x_3) = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Euler Bernoulli [7]} \quad (30)$$

$$f(x_3) = x_3 \quad \longrightarrow \quad \text{Timoshenko [4]} \quad (31)$$

$$f(x_3) = x_3 \left(1 - \frac{4x_3^2}{3h^2} \right) \quad \longrightarrow \quad \text{Reddy [8]} \quad (32)$$

$$f(x_3) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x_3}{h} \right) \quad \longrightarrow \quad \text{Touratier [9]} \quad (33)$$

$$f(x_3) = x_3 e^{-2 \left(\frac{x_3}{h} \right)^2} \quad \longrightarrow \quad \text{Afaq [10]} \quad (34)$$

4 Application

La poutre étudiée est une poutre en stratifié de composite unidirectionnel symétrique à matrice polymérique et fibres de carbone de type graphite T300/934 . La poutre a une largeur (b) de 30mm, d'épaisseur (h) de 4mm, longueur (L) de 20mm et sous chargement fixé à 5000N. Les plis ont la même épaisseur (t) de 0.250mm et les mêmes propriétés matérielles

$$E_{11} = 141.2 \text{ Gpa} ; E_{22} = 9.72 \text{ Gpa} ; G_{13} = 5.53 \text{ Gpa} ; G_{23} = 3.74 \text{ Gpa} ; \nu_{12} = 0.30 ; \nu_{21} = \frac{\nu_{12} \cdot E_{22}}{E_{11}} = 0.020.$$

A partir des équations (26), on obtiendra

$$\begin{cases} u_{1,11}^0(x_1) A_{11} = 0 \\ -u_{3,111}^0(x_1) D_{11}^a + \gamma_{13,11}^0(x_1) F_{11}^a - \gamma_{13}^0(x_1) A_{55}^a = 0 \\ (D_{11}^a - D_{11}) u_{3,111}^0(x_1) + (D_{11}^a - F_{11}^a) \gamma_{13,11}^0(x_1) + \gamma_{13}^0(x_1) A_{55}^a - k_1 = 0 \end{cases} \quad (35)$$

La solution du système d'équation deviendra

$$u_{1,11}^0(x_1) = 0 \quad (36)$$

$$u_{3,111}^0(x_1) = -\frac{F_{11}^a k_1 - D_{11}^a \gamma_{13}^0(x_1) A_{55}^a}{F_{11}^a D_{11} - D_{11}^{a^2}} \quad (37)$$

$$\gamma_{13,11}^0(x_1) = \frac{-D_{11}^a k_1 + \gamma_{13}^0(x_1) A_{55}^a D_{11}}{F_{11}^a D_{11} - D_{11}^{a^2}} \quad (38)$$

L'équation différentielle (38) s'écrit sous la forme suivante

$$\gamma_{13,11}^0(x_1) - \left[\frac{D_{11} A_{55}^a}{D_{11} F_{11}^a - D_{11}^{a^2}} \right] \gamma_{13}^0(x_1) = - \left[\frac{D_{11}^a}{D_{11} F_{11}^a - D_{11}^{a^2}} \right] k_1 \quad (39)$$

Avec

$$\begin{cases} D_{11} = c_1, & F_{11}^a = c_3, \\ D_{11}^a = c_2, & A_{55}^a = c_4. \end{cases} \quad (40)$$

Où

$$w_f = \frac{\sqrt{A_{55}^a} \sqrt{D_{11}}}{\sqrt{F_{11}^a D_{11} - D_{11}^2}} = \sqrt{\frac{c_1 c_4}{c_1 c_3 - c_2^2}} \quad (41)$$

La forme réduite de l'équation différentielle est donnée par

$$\gamma_{13}^0(x_1) = \frac{k_1 c_2}{c_1 c_4} + \alpha \sinh(w_f x_1) + \beta \cosh(w_f x_1) \quad (42)$$

A partir de l'équation (37), on aura

$$u_3^0(x_1) = -\frac{1}{6} \frac{k_1 x_1^3}{c_1} + \frac{c_2 (\alpha \cosh(w_f x_1) + \beta \sinh(w_f x_1))}{w_f c_1} + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 + k_3 x_1 + k_4 \quad (43)$$

$$\phi^0(x_1) = -\left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right) (\alpha \sinh(w_f x_1) + \beta \cosh(w_f x_1)) - \frac{1}{2} \frac{k_1 x_1^2}{c_1} + k_2 x_1 + k_3 - \frac{k_1 c_2}{c_1 c_4} \quad (44)$$

Les six constantes α , β , k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , sont obtenues à partir des conditions aux limites écrites en termes de déplacement et de force, la résolution des équations (28) et (29) nous donnent les six expressions suivantes

$$k_1 = \frac{1}{2} F_3, \quad k_4 = 0, \quad (45)$$

$$k_2 = 0, \quad \alpha = 0,$$

$$k_3 = \frac{F_3}{2c_1} \left[\frac{c_2^2}{c_1 c_4} + \frac{L^2}{8} \right], \quad \beta = -\frac{1}{2} \frac{F_3 c_2}{c_1 c_4 \cosh\left(\frac{1}{2} w_f L\right)}.$$

En remplaçant des constantes données par les formules (45), le champ de déplacement s'écrira à nouveau

$$u_1(M) = -\frac{F_3 x_3}{2c_1} \left[-\frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{c_2^2}{c_1 c_4} + \frac{L^2}{8} \right) - \frac{c_2^2}{c_1 c_4} \frac{\cosh(w_f x_1)}{\cosh\left(\frac{1}{2} w_f L\right)} \right] + f(x_3) \frac{F_3 c_2}{2c_1 c_4} \left(1 - \frac{\cosh(w_f x_1)}{\cosh\left(\frac{1}{2} w_f L\right)} \right) \quad (46)$$

$$u_3(M) = \frac{F_3 L^2}{48c_1} \left(-x_1 \left(4 \left(\frac{x_1}{L} \right)^2 - 3 \right) \right) + 2 \frac{c_2^2}{c_1 c_4} \frac{12}{L^2} \left(x_1 - \frac{1}{w_f} \frac{\sinh(w_f x_1)}{\cosh\left(\frac{1}{2} w_f L\right)} \right) \quad (47)$$

On pose

$$\Theta(x_1) = -x_1 \left(4 \left(\frac{x_1}{L} \right)^2 - 3 \right) \quad (48)$$

$$S_f = \frac{12}{L^2} \frac{c_2^2}{c_1 c_4} \quad (49)$$

$$\psi_f(x_1) = x_1 - \frac{1}{w_f} \frac{\sinh(w_f x_1)}{\cosh\left(\frac{1}{2} w_f L\right)} \quad (50)$$

Finalement, on obtiendra les champs de déplacement et de déformation suivants

$$\begin{cases} u_1(M) = -\frac{x_3 F_3 L^2}{48 c_1} [\Theta_{,1}(x_1) + 2 S_f \psi_{f,1}(x_1)] + \left[f(x_3) \frac{F_3 L^2}{2 c_2} S_f \psi_{f,1}(x_1) \right] \\ u_3(x_1) = \frac{F_3 L^2}{48 c_1} [\Theta(x_1) + 2 S_f \psi_f(x_1)] \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(M) = -\frac{x_3 F_3 L^2}{48 c_1} [\Theta_{,11}(x_1) + 2 S_f \psi_{f,11}(x_1)] + \left[f(x_3) \frac{F_3 L^2}{2 c_2} S_f \psi_{f,11}(x_1) \right] \\ \gamma_{13}(M) = f(x_3) \frac{F_3 L^2}{24 c_2'} S_f \psi_{f,1}(x_1) \end{cases} \quad (52)$$

5 Résultats

5.1 La flèche

L'expression obtenue dans le cadre de la théorie d'Euler Bernoulli ne traite que de la flexion simple sans prendre en compte le cisaillement transverse. Dans la théorie classique de Timoshenko apparaît un coefficient s sans dimension qui prend en compte la part de cisaillement. Pour les théories d'ordre élevé, la fonction f initialement introduite amène une dépendance supplémentaire non linéaire de la flèche par rapport à la coordonnée x_1 via l'expression de $\psi_f(x_1)$ (figure4). Le recours à des coefficients de correction ne s'avère plus nécessaire, par conséquent son introduction dans la théorie de Timoshenko permet de recoller à l'expression cubique sauf lorsque l'on tend vers $\frac{L}{2}$, ou l'influence de $\psi_f(x_1)$ devient importante. Négliger ce facteur dans le cas où $k = 1$, entraîne des écarts avec la déformée obtenue à partir d'une fonction cubique de l'ordre de 10%.

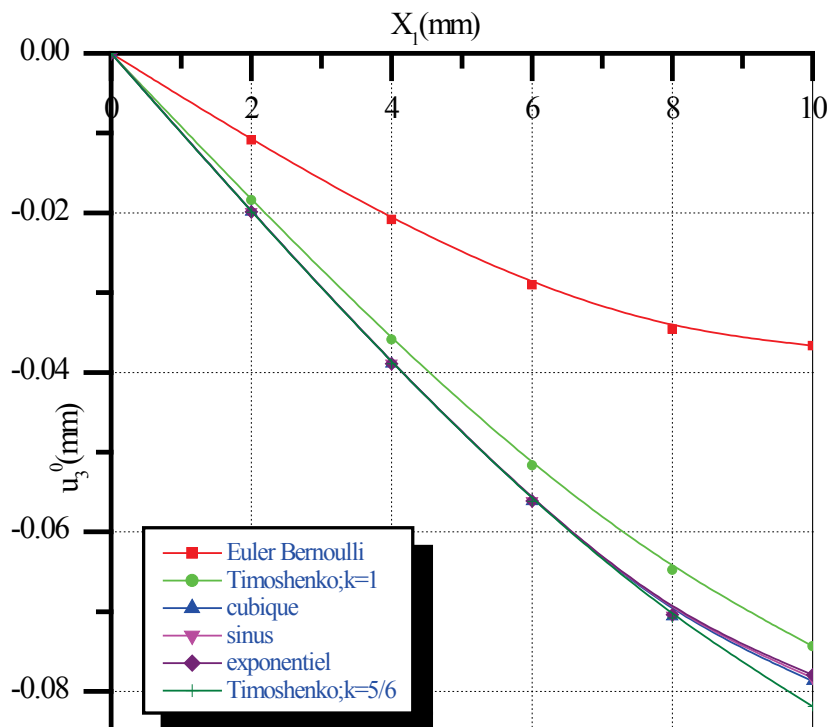


Figure 4. Evolution de la déformée pour différentes formes de $f(x_3)$

5.2 Le déplacement longitudinal

Les théories d'ordre élevé donnent un profil de déplacement dans l'épaisseur qui est issu d'une distribution cubique superposée à une distribution linéaire de type Euler Bernoulli. Les termes supplémentaires introduits par la fonction $f(x_3)$ représentent le glissement et produisent un déplacement dans le sens opposé à celui entraîné par la flexion d'une part, et d'autre part la contribution de l'effet de gauchissement de la section de la poutre qui apparaît clairement dans la figure (5).

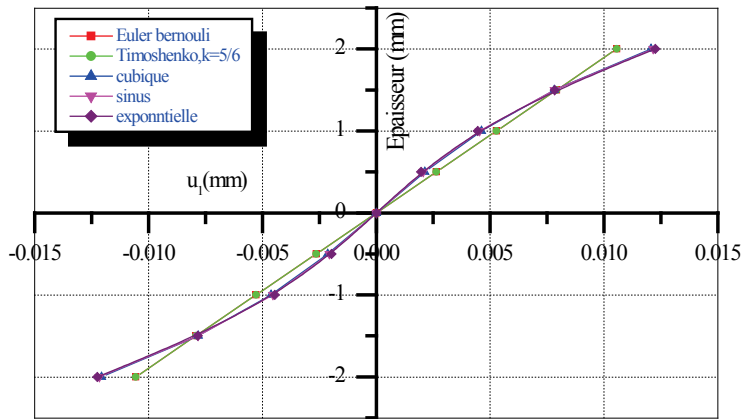


Figure 5. Profil de déplacement $u_1(M)$ dans l'épaisseur en $x_1 = \frac{L}{4}$ et $\frac{L}{h} = 5$

5.3 Déformation de cisaillement

La répartition de la déformation de cisaillement $\gamma_{13}(M)$ pour la théorie de Timoshenko est une constante à travers l'épaisseur de la poutre quelque soit la variable x_1 , puisque le déplacement associé est une fonction linéaire de x_3 . Par conséquent les théories d'ordre élevé, donnent une répartition parabolique ou sinusoidale des déformations dans l'épaisseur qui satisfont les conditions de nullités des contraintes de cisaillement sur les bords inférieurs et supérieur de la poutre. Le terme supplémentaire représenté par la dérivée de la fonction de modulation du cisaillement $\psi_f(x_1)$ permet d'assurer la nullité du glissement au centre de la poutre ainsi qu'une répartition correcte sur la ligne moyenne (voir figure7).

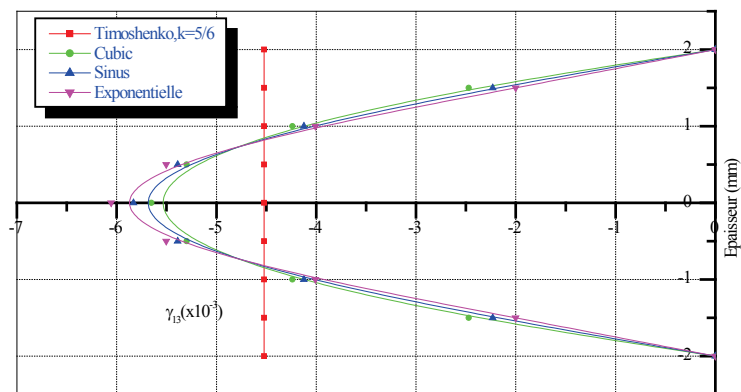


Figure 6. Déformation de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la poutre en $x_1 = \frac{L}{4}$ et $\frac{L}{h} = 5$

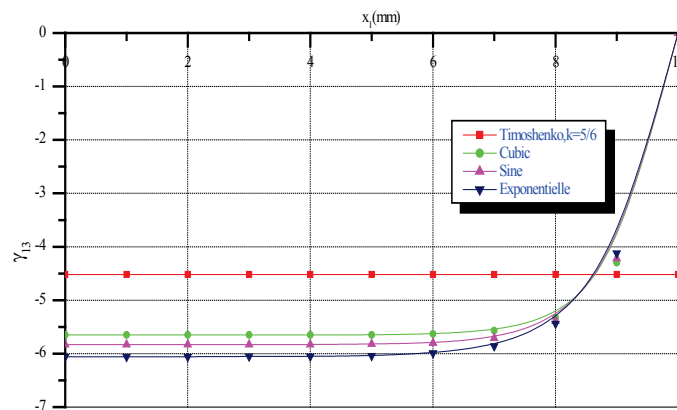


Figure 7. Evolution du glissement sur la ligne moyenne en fonction de x_1

6 Conclusion

Dans le cadre de ce travail, on a développé une méthode analytique qui utilise les champs de déplacement et de déformation des poutres, prenant en compte les effets de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Ils sont pour la plupart basés sur des théories d'ordre élevés qui permettent en effet de modéliser des structures composites stratifiées ou sandwichs sans recourir aux facteurs k_i de correction de cisaillement. Rappelons que la théorie linéaire du premier ordre, communément associée à Timoshenko pour le cas des poutres, mène à une déformation de cisaillement transversale constante dans l'épaisseur et nécessite de ce fait l'utilisation de ces facteurs correctifs de cisaillement. La présente méthode offre la possibilité de mettre en évidence l'effet de cisaillement sur l'apparition du gauchissement des sections transversales des poutres, et qui respecte bien l'annulation de celui-ci dans la zone centrale de la poutre. Un autre point abordé porte sur la dépendance en x_1 du gauchissement, dont la vérification analytique de cette évolution et notamment de son annulation en $\frac{L}{2}$ permet de valider cette hypothèse. L'approximation du profil du déplacement par une courbe polynomiale de degré 3 permet une parfaite corrélation. Le passage à un ordre supérieur n'apportant pas dans les cas étudiés de précision supplémentaire. Il semblerait que l'ordre 3 pour la fonction de gauchissement soit largement suffisant pour prendre en compte convenablement l'effet de cisaillement. Pour ce qui est des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur, on retrouve un profil de forme à peu près parabolique qui dérive bien d'un champ de déplacement cubique.

REFERENCES

- [1]- L. Dufort, Etude du cisaillement transverse dans des poutres stratifiées et sandwich : Aspects théoriques et expérimentaux. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal-Clermont 2, 2000.
- [2]- L. Dufort, S. Drapier, M. Grédiac, Closed-form solution for the cross-section warping in short beams under three point bending. *Compos. Struct.* 52(2) (2001) 233-246. doi:10.1016/S0263-8223(00)00171-9
- [3]- P.F. Pai, A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates. *Int. J. solids struct.* 32(16) (1995) 2295-2313. doi:10.1016/0020-7683(94)00258-X
- [4]- S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Mechanics of Materials*, New York: D.Van Nostrand Company, 1972.
- [5]- E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.* 12 (1945) 69-77.
- [6]- C.T. Herakovich, *Mechanics of fibrous composites*. John Wiley & Sons, Inc, 1998.
- [7]- R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.* 18 (1951) 31-38.
- [8]- J.N. Reddy, A simple higher order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 51(4) (1984) 745-752.
- [9]- M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Eng. Sci.* 29(8) (1991) 901-916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-Y
- [10]- K.S. Afaq, M. Karama, S. Mistou, Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In: *Comptes-rendus des 13èmes journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, mars 2003.