

MODELISATION HYDRAULIQUE DES ECOULEMENTS LIQUIDES AU VOISINAGE DE LA PROFONDEUR CRITIQUE

Riabenko A *, Kravets S *, Kojouchko L *, Hassane M **

**Université Nationale de l'aménagement hydraulique et de l'utilisation des ressources naturelles, rue Soborna, 11, Rivne, 33000, UKRAINE*

Tel: (0362) 221-086, fax: (0362) 222-197, E-mail: mail@USUWM.RV.UA

***Ecole Nationale Supérieure de l'Hydraulique- B.P. 31- Blida, Algérie*

Tel : +213 (0)25.39.94.47, Fax : +213 (0)25.39.94.46, E-mail : hassanemed@yahoo.fr

RESUME

Le problème de la modélisation hydraulique des écoulements du liquide au voisinage de la profondeur critique a ses particularités. Pour le cas des courants à forte turbulence, on a analysé l'apport des tourbillons : grands, moyens et petits dans le nombre de Karman pour la composante longitudinale de la vitesse de pulsation aux points semblables des courants dans le prototype et dans le modèle. Il a été démontré que les caractéristiques de la turbulence des courants avec les paramètres de modélisation par le nombre de Reynolds sont parfaitement semblables, tandis que dans le cas de la modélisation par le nombre de Froude les caractéristiques adimensionnelles des courants du prototype sont plus grandes que celles des courants du modèle, c'est-à-dire on observe un effet d'échelle. Les études exécutées permettent d'établir que pour le cas de la modélisation des écoulements à surface ondulée au voisinage de la profondeur critique, la profondeur minimale du courant doit être plus grande qu'une valeur de 0,56 cm.

Mots clés: écoulements au voisinage de la profondeur critique, modélisation, turbulence, nombres : de Karman, de Reynolds, de Froude.

ABSTRACT

The problem of hydraulic modelling of liquid near-critical flows has its peculiarities. For instances of flows with increased turbulence we have analysed the contribution of large, medium and small vortexes into Karman number for the elongated component of pulsating speed in similar points of natural and modelled flows. It is shown that characteristics of flow turbulence with parameters modelled by Reynolds number are similar completely and in the case of modelling by Froude number dimensionless characteristics of natural flow are larger than characteristics of modelled flow, i.e. there is observed a scale effect.

Research carried out allowed determining that for an instance of modelling near-critical flows with wavelike surface the minimum flow depth is to exceed the value of 0,56 cm.

Key words: near-critical flows, modelling, turbulence, Karman, Reynolds, Froude numbers.

INTRODUCTION

Les nombreuses recherches théoriques et expérimentales témoignent d'une manière convaincante qu'il existe dans la nature une zone particulière des écoulements du liquide à surface libre, dits écoulements au voisinage de la profondeur critique, c'est-à-dire les écoulements stables ou instables, qui sont caractérisés par les paramètres (de profondeurs, de vitesses ou d'autres) proches des valeurs critiques [1,2]. De tels écoulements se distinguent essentiellement de l'écoulement fluvial et torrentiel ordinaire par un nombre de particularités distinctives : la répartition de la pression non hydrostatique selon la profondeur dans la plupart des sections de l'écoulements, à la surface libre il y a formation de rides et ainsi de suite. Ces particularités ne donnent pas la possibilité d'utiliser la théorie classique du mouvement graduellement varié pour la description de ces courants.

L'insuffisance des études des écoulements au voisinage de la profondeur critique, les complications sérieuses pendant le processus d'exploitation, le faible niveau de sécurité des résultats de calcul, les nombreux cas de ruines et d'accidents, qui ont lieu lors de tels écoulements, sont dus au fait que les régimes au voisinage de la profondeur critique pendant le fonctionnement des ouvrages hydrotechniques n'ont été pas recommandés ou bien ne sont pas admis dans les documents normatives [3]. Pour éviter la possibilité de formation des écoulements au voisinage de la profondeur critique on applique la modélisation hydraulique des régimes formés dans les ouvrages hydrotechniques.

La négligence des particularités des écoulements au voisinage de la profondeur critique pendant le processus de leur modélisation peut mener à une évaluation erronée des résultats. D'après les recherches en laboratoires effectuées par O.M. Ajvazian sur les résistances hydrauliques des courants à surface libre, on indique que dans le domaine de l'existence des écoulements au voisinage de la profondeur critique, la répétition des mesures laboratoires ne donne pas des résultats de sens unique [4].

Parmi les différents problèmes de modélisation des écoulements au voisinage de la profondeur critique, il faut distinguer quatre principes:

- les particularités de modélisation des courants avec un niveau élevé de turbulence,
- détermination de la profondeur minimale pour la modélisation des

courants ondulés,

- possibilité de modélisation des écoulements au voisinage de la profondeur critique sur les modèles à différentes échelles d'après les axes diverses,
- existence ou absence de l'effet de l'échelle.

1. METHODE D'ETUDE DE LA SIMILITUDE DES ECOULEMENTS NATURELS ET DANS LE MODELE, BASEE SUR LA COMPARAISON DES NOMBRES DE KARMAN AVEC LA REPARTITION SPECTRALE DE LA VITESSE DE PULSATION

L'analyse des équations différentielles de Reynolds du mouvement de l'écoulements turbulent du liquide parfait montre que les courants comparés seront similaires mécaniquement si les nombres d'Euler, de Reynolds, de Froude, de Strouhal et de Karman sont égaux aux points homologues [5]. Suite à la différence des échelles dans le modèle et dans le prototype il est impossible d'assurer l'égalité de tous ces critères lors de la modélisation des phénomènes hydrauliques. Dans ces conditions on utilise la similitude approximative en prenant les nombres de Reynolds ou de Froude comme critère défini et on prend les paramètres du courant de telle manière qu'ils assurent l'autosimilitude des phénomènes comparés d'après d'autres critères.

Le nombre de Karman, qui caractérise les mouvements de pulsation, occupe une place particulière parmi les critères (indiqués). En général pour n'importe quel point du courant on peut composer six nombres de Karman, qui sont définis par les composants de la vitesse de pulsation u' , v' , w' selon les axes de coordonnées x , y , z [5]. Pour l'étude de l'aspect qualitative du problème de la modélisation des courants turbulents, nous allons prendre en considération que le nombre de Karman, inscrit pour la composante longitudinale u' de la vitesse de pulsation, est :

$$K = K_{xx} = \frac{\sqrt{u'^2}}{U} = \frac{\sigma_u}{U} = \frac{\sqrt{D_u}}{U}, \tag{1}$$

Où : σ_u et D_u sont respectivement, la déviation quadratique moyenne et la dispersion de la composante longitudinale de la vitesse de pulsation, u – la valeur moyenne de la vitesse longitudinale.

La méthode utilisée dans ce travail est basée sur la répartition spectrale des fonctions stationnaires. En conformité de cela on peut représenter la dispersion D_u dans un point quelconque du courant turbulent stationnaire comme une intégrale des valeurs de densité spectrale $E(k)$ sur tout le diapason du nombre d'onde k (c'est à dire sur toutes les fréquences):

$$D_u = \int_0^{\infty} E(k)dk, \tag{2}$$

Où

- $k=2\pi\omega/U$ – nombre d’onde,
- ω – fréquence harmonique correspondante.

Conformément aux formules (1) et (2) on peut présenter le carré du nombre de Karman au point donné du courant turbulent comme une intégrale des valeurs de densité spectrale $M(k)$ sur tout le diapason du nombre d’onde k :

$$K^2 = \int_0^{\infty} \frac{E(k)}{U^2} dk = \int_0^{\infty} M(k)dk. \tag{3}$$

L’analyse détaillée de l’information rassemblée du spectre de vitesse longitudinale des courants turbulents effectuée dans [6] a montré que tous les spectres normés, ayant de petits écartements, s’allongent sur une courbe universelle représentée sur la figure 1. Pour obtenir les coordonnées adimensionnelles sur cette figure, on utilise la dissipation moyenne spécifique de l’énergie $\bar{\varepsilon}$, l’échelle intérieure de la turbulence $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\bar{\varepsilon}}\right)^{1/4}$ et le coefficient de la viscosité cinématique ν .

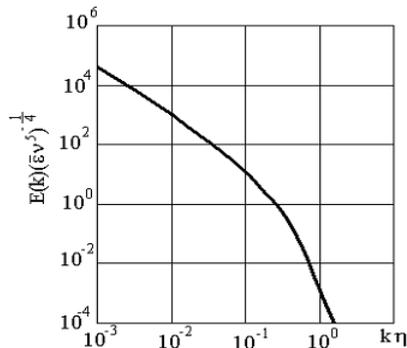


Fig. 1. Spectre normé de la composante longitudinale de la vitesse de pulsation des courants turbulents

Tenant compte que la densité spectrale de dispersion $E(k_f)$ avec la valeur fixée du nombre d’onde, k_f se différencie de la densité spectrale ou du carré du nombre de Karman $M(k_f)$ par une constante. On peut conclure que le graphique de la figure 1 montre aussi le changement de la densité spectrale $M(k)$ par le nombre d’onde, c’est-à-dire le nombre de Karman pour le point donné du courant.

Pour déterminer le nombre de Karman d’après l’équation (3), nous allons

diviser tous les tourbillons qui passent par les points semblables des courants du prototype et du modèle, en : grands, moyens et petits [6]. On va considérer comme grands, ceux dont le mouvement et les dimensions sont déterminés par les formes et les dimensions de la section transversale moyenne ainsi que par les caractéristiques du mouvement moyen. Les tourbillons sur lesquels il n'y a pas d'influence du mouvement moyen et où le nombre local de Reynolds $Re_\lambda = u_\lambda \lambda / \nu$ est plus grand que la valeur critique Re_{cr} , sont considérés comme moyens. Les tourbillons analogues pour lesquels $Re_\lambda < Re_{cr}$, sont considérés petits.

Le nombre critique de Reynolds a la valeur $Re_{cr} = u_\eta \eta / \nu$. Ce nombre est inscrit pour les tourbillons qui obtiennent l'échelle intérieure η de turbulence, quand la viscosité du liquide devient considérable [6]. Les trois parties composantes du tourbillon sont divisées par les valeurs du nombre d'onde k_1 et k_2 avec k_1 correspondant à la frontière entre les grands et moyens, et k_2 – entre les moyens et petits tourbillons.

En conformité de la répartition des tourbillons on peut présenter les carrés de nombre de Karman dans les points semblables des courants naturels (n) et du modèle (m) comme les sommes d'apport des tourbillons grands (g), moyens (m) et petits (p):

$$K_n^2 = \int_0^{k_1^n} M(k)_{n.g.t.} dk + \int_{k_1^n}^{k_2^n} M(k)_{n.m.t.} dk + \int_{k_2^n}^{\infty} M(k)_{n.p.t.} dk, \tag{4}$$

$$K_m^2 = \int_0^{k_1^m} M(k)_{m.g.t.} dk + \int_{k_1^m}^{k_2^m} M(k)_{m.m.t.} dk + \int_{k_2^m}^{\infty} M(k)_{m.p.t.} dk. \tag{5}$$

**2. ETUDES DE LA SIMILITUDE DES COURANTS TURBULENTS
MODELES D'APRES LE CRITERE DE REYNOLDS**

Dans le cas de modélisation des phénomènes hydrauliques d'après le critère de Reynolds pour les paramètres qui caractérisent le mouvement moyen des courants naturels et du modèle (avec $v_n = v_m = v$) les formules suivantes sont plus justes:

$$\left. \begin{aligned} \ell^n &= \ell^m \alpha_\ell, \\ U^n &= U^m \alpha_\ell^{-1}, \\ \text{Re}^n &= \frac{U^n \ell^n}{\nu} = \frac{U^m \alpha_\ell^{-1} \ell^m \alpha_\ell}{\nu} = \text{Re}^m, \\ Fr^n &= \frac{(U^n)^2}{g \ell^n} = \frac{(U^m)^2 \alpha_\ell^{-2}}{g \ell^m \alpha_\ell} = Fr^m \alpha_\ell^{-3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Où :

$$\alpha_\ell = l^n / l^m \text{ – échelle linéaire du modèle.}$$

Tenant compte du fait que, la similitude de la configuration et les dimensions des frontières rigides et les caractéristiques du mouvement moyen des courants naturels et du modèle sont exécutés précieusement pendant la modélisation, on peut considérer que le mouvement des couples correspondants des grands tourbillons des courants comparés, lequel est distingué par les facteurs modelés, est aussi modelé. Ainsi l'apport des grands tourbillons dans les carrés des nombres de Karman, sera égal pour les points semblables des courants naturels et du modèle:

$$\int_0^{k_1^n} M(k)_{n.g.t.} dk = \int_0^{k_1^m} M(k)_{m.g.t.} dk, \quad (7)$$

C'est-à-dire que les surfaces ABCD et A'B'C'D' sur la figure 2, qui représente cet apport, seront égales entre elles.

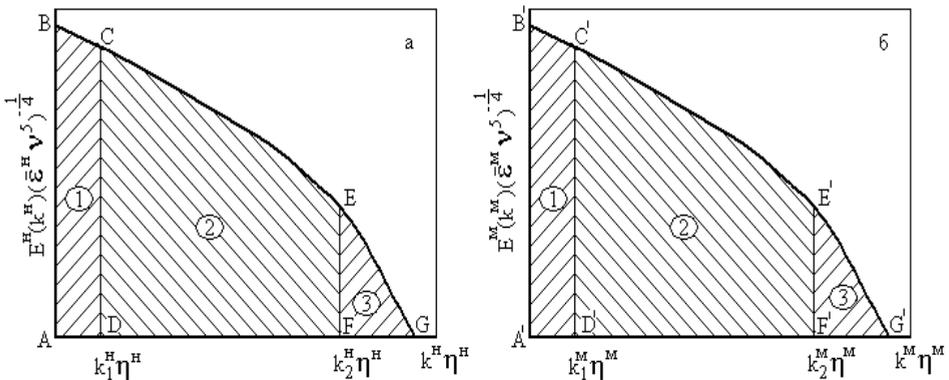


Fig. 2 Spectres normés de la composante longitudinale de la vitesse de pulsation dans les points semblables des courants naturels (a) et du modèle (b) qui sont modélisés d'après le critère de Reynolds: 1,2,3 – zones des tourbillons : grands, moyens et petits

Les formules qui unissent les paramètres des couples des tourbillons semblables des courants qui sont modélisés d'après le critère de Reynolds, sont données dans la référence [7]. En examinant et comparant les tourbillons moyens et petits dans les points semblables des courants naturels et du modèle, on va passer des tourbillons de grandes échelles aux tourbillons de petites échelles.

Les tourbillons moyens de dimensions maximales qui passent par les points semblables des courants naturels et du modèle, sont simulés. En outre les lois statistiques de changement des caractéristiques de leur mouvement sont universels et en conformité de la deuxième hypothèse de Kolmogorov [8]. Ils sont définis uniquement par la dissipation moyenne spécifique de l'énergie $\bar{\varepsilon}$ et ne dépendent pas de la viscosité du liquide ν . De ce cas on peut conclure que, les couples correspondants des tourbillons moyens à de plus petites échelles seront aussi simulés. Ainsi l'apport sommaire des tourbillons moyens dans le carré du nombre de Karman qui est exprimé dans une certaine échelle par les superficies correspondantes $DCEF$ et $D'CE'F'$ sur la figure 2, est égal pour les points semblables des courants naturels et du modèle, c'est-à-dire:

$$\int_{k_1^n}^{k_2^n} M(k)_{n.m.t.} dk = \int_{k_1^m}^{k_2^m} M(k)_{m.m.t.} dk . \tag{8}$$

Le changement des caractéristiques de mouvement de petits tourbillons passe d'après les lois statistiques universelles, qui, en conformité de la première hypothèse de similitude de Kolmogorov [8] sont exprimés uniquement par la dissipation moyenne spécifique de l'énergie $\bar{\varepsilon}$ et par la viscosité ν . De cela on peut conclure que, tous les couples conformes de petits tourbillons qui passent par les points semblables des courants naturels et du modèle, sont aussi simulés. A cet effet l'apport sommaire des tourbillons considérés dans le carré de nombre de Karman, qui est exprimé à une certaine échelle par les superficies FEG et $F'E'G'$ sur la figure 2, est égale c'est-à-dire:

$$\int_{k_2^n}^{\infty} M(k)_{n.p.t.} dk = \int_{k_2^m}^{\infty} M(k)_{m.p.t.} dk . \tag{9}$$

Des formules (4)-(9) on peut écrire l'expression très importante pour les points semblables des courants comparés qui sont modélisés d'après le critère de Reynolds:

$$K_n = K_m . \tag{10}$$

3. ETUDE DE LA SIMILITUDE DES COURANTS TURBULENTS, MODELISES D'APRES LE CRITERE DE FROUDE

Pendant la modélisation des phénomènes hydrauliques d'après le critère de Froude,, pour les valeurs qui caractérisent le mouvement moyen des courants naturels et du modèle, avec $\nu^n = \nu^m = \nu$, les formules suivantes sont justes:

$$\left. \begin{aligned} \ell^n &= \ell^m \alpha_\ell, \\ U^n &= U^m \alpha_\ell^{1/2}, \\ Fr^n &= \frac{(U^n)^2}{g \ell^n} = \frac{(U^m)^2 \alpha_\ell}{g \ell^m \alpha_\ell} = Fr^m, \\ Re^n &= \frac{U^n \ell^n}{\nu} = \frac{U^m \alpha_\ell^{1/2} \ell^m \alpha_\ell}{\nu} = Re^m \alpha_\ell^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Tout ce qui est dit dans le paragraphe précédent à propos de la similitude des grands tourbillons correspond aussi complètement à ce cas examiné, c'est-à-dire la formule (7) est juste aussi pour les courants tourbillons du modèle d'après le critère de Froude et les superficie $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sur la figure 3, qui expriment l'apport des grands tourbillons dans le carré du nombre de Karman, sont égales.

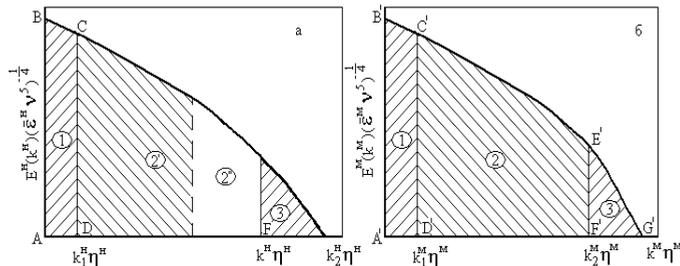


Fig. 3 Spectres normés de la composante longitudinale de vitesse de pulsation dans les points semblables des courants naturels (a) et du modèle (b), qui sont modélisés d'après le critère de Froude: (1,2,3 – zones des tourbillons grands, moyens et petits).

Les formules qui lient les caractéristiques des couples de tourbillons semblables des courants naturels et du modèle pour le cas de la modélisation caractéristique moyenne de ces courants d'après le critère de Froude, sont données dans la référence [7].

La similitude des couples correspondants des tourbillons moyens sera observée seulement jusqu'au moment, quand les dimensions caractéristiques des tourbillons du courant modélisé (comme un courant avec de plus petites

dimensions) atteindront l'échelle intérieure de la turbulence η^M pour laquelle le nombre de Reynolds atteindra la valeur d'ordre Re_{cr} .. Pour ceux-là et pour les plus petits tourbillons, la viscosité du liquide devient déjà importante, à cause de quoi le changement des caractéristiques statistiques de leur mouvement est soumis à d'autres lois universelles, lesquelles en conformité de la première hypothèse de similitude de Kolmogorov est déterminée uniquement par les valeurs $\bar{\varepsilon}$ et ν [8].

Les tourbillons du courant modélisé à l'échelle intérieure de turbulence η^M , avec le nombre d'ondes k_2^M et le nombre de Reynolds $Re_{\eta}^m \approx Re_{cr}$ en conformité de l'apport dans le carré du nombre de Karman, correspondent aux tourbillons semblables du courant naturel avec les caractéristiques suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_s^n &= \eta^M \alpha_{\ell} > \eta^n, \\ k_s^n &= k_2^M \alpha_{\ell}^{-1} < k_2^n, \\ Re_{\lambda_s}^n &= Re_{\eta}^M \alpha_{\ell}^{3/2} = Re_{cr} \alpha_{\ell}^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Tenant compte que dans le diapason des nombres d'onde $k_1^m - k_2^m$ pour le courant modélisé et $k_1^n - k_s^n$ pour le courant naturel, les tourbillons moyens sont semblables, on peut conclure que l'apport sommaire de ces tourbillons dans le carré du nombre de Karman, exprimé à une certaine échelle par les superficies *DCMN* et *D'C'M'N'* sur la figure 3, est identique pour les points semblables des courants comparés, c'est-à-dire:

$$\int_{k_1^n}^{k_s^n} M(k)_{n.m.t.} dk = \int_{k_1^M}^{k_2^M} M(k)_{m.p.t.} dk. \quad (13)$$

Ainsi l'apport d'une partie des tourbillons moyens aux dimensions $\lambda_s^n > \eta^n$ dans le carré du nombre de Karman au point donné du courant naturel et qui est exprimé par les valeurs :

$$\int_{k_s^n}^{k_2^n} M(k)_{n.m.t.} dk,$$

et, auquel correspond la superficie *NMEF* sur la figure 3, est non modélisé.

Les recherches théoriques et expérimentales du spectre énergétique des courants turbulents, réalisées par A.M. Kolmogorov, T. Karman, G. Batchelor, A. Townsend, C. Lin et d'autres auteurs montrent que les petits tourbillons ont

l'énergie moindre en comparaison avec les tourbillons grands et moyens [6]. Tenant compte de cette circonstance ainsi que le diapason étroit des nombres d'onde, qui correspondent aux petits tourbillons, on peut négliger la différence entre l'apport dans les carrés des nombres de Karman de petits tourbillons dans les points semblables des courants naturels et du modèle, c'est-à-dire on peut admettre l'égalité suivante:

$$\int_{k_2^n}^{\infty} M(k)_{n.p.t} dk = \int_{k_2^m}^{\infty} M(k)_{m.p.t} dk . \tag{14}$$

En se basant sur les formules (4), (5), (7), (13), (14) on obtient, pour les courants turbulents avec les caractéristiques du mouvement moyen, qui sont modélisés d'après le critère de Froude, une expressions très importantes:

$$K_n^2 = K_m^2 + \int_{k_s^n}^{k_2^n} M(k)_{n.m.t} dk . \tag{15}$$

Alors dans ce cas, les nombres de Karman dans les points semblables des courants naturels et du modèle sont différents et par conséquent, les valeurs de ce nombre du courant naturels sont toujours plus grandes que celles du courant du modèle:

$$K_n > K_m . \tag{16}$$

1. DEFINITION DE LA PROFONDEUR MINIMALE SUR UN MODELE ET DE LA POSSIBILITE DE LA MODELISATION AFFINEE DANS LES RECHERCHES EXPERIMENTALES DES ECOULEMENTS AU VOISINAGE DE LA PROFONDEUR CRITIQUE

Pour les écoulements au voisinage de la profondeur critique avec surface ondulée, la question de la définition de l'échelle minimale du modèle, pour lequel les forces de tension superficielle et la viscosité du liquide commencent à jouer un grand rôle, a une grande importance. Dans ces conditions les résultats, obtenus sur ces modèles, cessent de répondre aux données naturelles. Pour trouver la profondeur minimale du courant au cours de la modélisation des ondes de gravité, auxquelles se rapportent aussi les écoulements ondulés au voisinage de la profondeur critique, on considère la formule de Lagrange pour la célérité du mouvement c pour de petites perturbations sur la surface de liquide au repos:

$$c = \sqrt{gh} , \tag{17}$$

Où :

h – profondeur du courant imperturbable.

La vitesse minimale de mouvement de telles perturbations pour l'eau

d'après G. Holtorff [9] est égale à $23,4 \frac{cm}{s}$ et d'après J. Lighthill [10] – $23,0 \frac{cm}{s}$. En substituant dans la formule (17) le plus grand nombre, on obtient avec une certaine réserve la valeur $h_{min}=5,6mm$. On peut recommander cette valeur comme la limite inférieure de la profondeur du courant au cours de la modélisation hydraulique des ondes de gravité, y compris les écoulements ondulés au voisinage de la profondeur critique.

Dans certain cas on fait des recherches en laboratoire de divers phénomènes hydrauliques en utilisant une soi-disant modélisation affinée dans laquelle les échelles du modèle sur divers axes de coordonnées sont différentes. Pour ce moyen de modélisation les proportions géométriques des éléments du courant sont différentes dans la nature et sur le modèle, qui peut être admis seulement pour certains problèmes.

Comme il est indiqué [11] les conditions de l'existence et les caractéristiques essentielles de divers types des écoulements au voisinage de la profondeur critique ne sont pas distingués uniquement par le nombre de Froude dans leur section initiale, mais ils dépendent encore du degré de courbure du courant dans le plan vertical dans une même section. En raison de ce, que l'échelle verticale du modèle se distingue de l'échelle horizontale les proportions géométriques du courant et son degré de courbure dans la section verticale seront différents sur le modèle et en nature. Tenant compte que dans ce cas les caractéristiques géométriques et aussi les caractéristiques dynamiques et cinématiques du courant ne se modélisent pas complètement. On conclue donc que, la modélisation affinée des écoulements ondulés au voisinage de la profondeur critique ne peut pas être utilisée.

CONCLUSION

1. Au cours de la modélisation des courants au niveau élevé de turbulence, d'après le critère de Reynolds, les caractéristiques du mouvement moyen et de pulsation sont modélisées totalement.

2. Au cours de la modélisation des courants au niveau élevé de turbulence, d'après le critère de Froude, on observe l'effet d'échelle par conséquent, les caractéristiques de turbulence du courant naturel sont plus grandes que celles du courant du modèle.

3. La profondeur minimale du courant du modèle, au cours des recherches en laboratoire des écoulements ondulés au voisinage de la profondeur critique, doit être plus grandes qu'une valeur de 5,6 mm.

4. Les études des caractéristiques des écoulements au voisinage de la

profondeur critique avec la surface ondulée ne peuvent pas être exécutées sur les modèles avec des échelles distordues.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Serre F. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche. - 1953. - №3. - P.374 - 388, №6. - P.830 - 872.
- [2] Ryabenko A.A. Types, Characteristics and Conditions of Existence of Near - Critical Flows // Hydrotechnical Construction. Translated from russian. - Consultants Bureau, New - York. - May - November 1992. - Vol.26, №5. - P.269 - 275.
- [3] NCEB.2.4-1-99. Systèmes et ouvrages des irrigations et du drainage. Kiev. – 176 p.
- [4] Ayvazian O.M. Recherches des courants fluviaux et torrentiels // Hydrotechnical construction. № 2, 1984. – pp. 43-47.
- [5] Levi I.I. Modélisation des phénomènes hydrauliques. Leningrad, 1967. – 235 p.
- [6] Monin A.S., Jaglom A.M. Hydromécanique statistique. Moscou, 1967. – 1160 p.
- [7] Ryabenko A.A. Similitude des courants turbulents modelés d'après Reynolds ou Froude //Hydromécanique. Kiev, V. 63, 1991. – pp.20-28.
- [8] Kolmogorov A.N. Structure locale de la turbulence // RAS URSS, Serie neuve, T. 30, №4, 1941. – pp.299-303.
- [9] Holtorff G. Eine exakte Theorie stationarer und fortschreitender wirbelfreier Schwerewellen // Die Wasserwirtschaft. - 1966. - №11. - S.349 - 356.
- [10] Lighthill J. Waves in fluids. Cambridge university press, 1978.
- [11] Ryabenko A.A. Free Surface Profil of Wavelike Near-Critical Flows and Solitary Solutions of some Differential Equations//Int. Journ. Fluid Mech. Research. – 2001. – Vol. 28, No 6. – P.834-856.