Les coniques en 4ième année de l'enseignement secondaire tunisienne : Etudes historique et praxéologique dans les deux aspects synthétique et analytique.

Conics in the fourth year of Tunisian secondary education: Historical and praxeological studies in both synthetic and analytical aspects

Ben Ali Yasmina benalijasmin@gmail.com
Université virtuelle de Tunis / ISEFC, Unité de recherches Education, Cognition, Tice et Didactiques (ECOTIDI) / ISEFC.

Received:11/2/2023 Accepted:20/8/2023 Published:.31/3/2024

Résumé:

Le présent article présente un résumé de la recherche menée dans le cadre de notre mémoire en didactique des mathématiques qui a pour objectif d'étudier le concept des coniques[1] à la fin de l'enseignement secondaire en Tunisie. Notre travail rend compte d'une étude historique et d'une étude praxéologique suivant les aspects synthétique et analytique. Une investigation historique sur le concept des coniques dont l'intérêt porte sur les aspects géométriques auxquels se réfère cette étude à savoir les aspects synthétiques, algébriques ou analytiques. Une étude didactique qui se compose de deux sections. La première section est basée essentiellement sur une étude des deux réformes : 1993 et 2002, et des deux programmes éventuels : 1993 et 2006, suivie des analyses praxéologiques des manuels relatifs à ces deux programmes. La deuxième section est un questionnaire auprès des enseignants de mathématiques du lycée, autour de l'enseignement des coniques.

Mots clés coniques-praxéologies-didactiques des mathématiques.

Abstract This article presents a summary of the research carried carried out as part of our dissertation in mathematics éducation which aims to study the concept of conics at the end of secondary education in Tunisia. Our work reports on a historial study and a praxeological study following the synthetic and analytical aspects. A historical investigation on the concept of conics whose interest lies in the geometric aspects to which this study refers, namely the synthetic, algebraic or analytical aspects. A didactic study that consists of two sections. The first section is essentially based on a study of the two reforms : 1993 and 2002, and of the two programs related to them : 1993 and 2006, followed by praxeological analyzes of the textbooks relating to these two programs. The second section is a questionnaire for high school mathematics teachers, around the teaching of conics.

Keywords Conics-praxeologie- mathematics education.

Les coniques sont les sections d'un cône avec un plan : hyperbole, parabole et ellipse.

Introduction

En Tunisie, le concept des coniques occupe une place importante dans le cursus scolaire. Les élèves rencontrent les objets qui le composent dès l'école primaire (cercles, points, droites…), mais ils ne les conçoivent d'une façon proprement dite qu'à la fin de l'enseignement secondaire.

Il nous semble que le souci majeur de l'enseignement des mathématiques est de permettre une bonne construction des savoirs en transmettant aux élèves la majorité des contenus qui existent dans le savoir savant à propos n'importe quelle notion mathématique enseignée. En particulier, dans le cadre de notre travail de recherche, la notion conique paraît riche en tant que définitions et propriétés géométriques. Mais les réformes établies en Tunisie dans les dernières décennies ont réduit de plus en plus le contenu géométrique relatif à cette notion. Il existe un écart important entre le savoir savant et le savoir à enseigner d'une part et une réduction même signifiante de la géométrie pure dans l'étude de cet objet en Tunisie d'autre part. D'autant plus, le choix institutionnel favorise l'aspect analytique dans l'étude des coniques bien qu'une bonne conceptualisation de cette notion nécessite son enseignement dans les deux approches synthétiques et analytiques.

1-Les coniques dans l'histoire

Notre étude historique se concentre sur les aspects auxquels se réfèrent l'étude des coniques à savoir l'aspect analytique et l'aspect algébrique ou synthétique (géométrique) dans les différentes étapes de l'évolution de ce concept. Nous entendons par géométrie synthétique, une branche de la géométrie qui est fondue sur une approche axiomatique où on utilise des constructions géométriques à la règle et au compas et des transformations des objets géométriques sans faire appel à un repère. Cette approche a un caractère hypothético-déductif dont les démonstrations sont basées sur un raisonnement bien argumenté. Nous parlons de la géométrie algébrique ou de l'algèbre géométrique lorsque nous associons des équations à des courbes géométriques et des figures géométriques à des équations. La géométrie analytique est une branche de la géométrie qui utilise les résultats de calcul différentiel et de l'intégral, nécessite un système de coordonnées pour repérer les objets géométriques. Nous pouvons attribuer cette dernière approche à la géométrie algébrique qui n'est pas nécessairement analytique.

2-1-Les coniques sous l'aspect synthétique

Dès leurs apparitions chez les Grecs avec Ménechme, Aristée, Euclide et Pappus (300 av. J.-C), les coniques ont été étudiées dans la géométrie synthétique. Premièrement, elles sont définies comme sections d'un cône de révolution par des plans perpendiculaires aux génératrices des cônes. Ensuite, Apollonius (200 av. J.-C) les a considérées comme des sections planes d'un cône quelconque par un plan dont on change la position relative avec le cône.

Il a donné une grande importance aux constructions géométriques et aux démonstrations afin de dégager chaque fois d'autres propriétés relatives à ces éléments. Là, se voit clairement son projet synthétique. Apollonius a proposé également les propriétés fondamentales liées aux diamètres. Ces propriétés sont équivalentes aux équations cartésiennes des coniques dans un plan rapporté à deux axes en langage moderne (au 19ième siècle avec le repère cartésien de Descartes).

Apollonius a rassemblé les résultats de ses prédécesseurs comme Ménechme, Euclide et Aristée l'ancien et les utilisa. En ajoutant des nouveaux résultats propres à lui, il a écrit un livre très important en mathématiques vis-à-vis les résultats géométriques qu'ils contiennent. Les ouvrages sur les coniques sont écrits selon le modèle des éléments d'Euclide.

> « Le traité d'Apollonios appartient à la tradition de la géométrie grecque classique dont les éléments d'Euclide ont pérennisé le modèle formel. L'ouvrage des Coniques se présente donc comme un enchaînement de propositions validant les résultats formulés. Aucune note explicative ne vient rompre la succession des propositions dont la chaîne se construit selon les exigences logiques d'une science démonstrative, en excluant tout ce qui n'est pas essentiel. » (Foulquier, 1999, P.63).

Ces livres contiennent des définitions, des propositions, des exemples, des propriétés, des constructions géométriques, des figures et des démonstrations. Ces derniers sont, selon Foulquier, du type synthétique. Foulquier dit également à propos le traité entier sur les coniques d'Apollonius :

> « Ce que le traité écrit nous transmet, c'est un état achevé du raisonnement. Tout le parcours qui a précédé ne fait pas l'objet d'une formulation écrite. On a devant les yeux le parcours déductif qui part des données pour aboutir au résultat cherché. » (Foulquier, 1999, p 64).

Nous semble que les problèmes des constructions confirment bien le projet synthétique d'Apollonius dans ses travaux sur les coniques.

La dernière partie du livre I sur les coniques est consacrée aux problèmes de construction. Les propositions 52 et 53 traitent la construction d'une parabole. Les propositions 54 et 55 sont consacrées à la construction de l'hyperbole et les trois qui le suivent sont consacrées à la construction de l'ellipse. Nous choisissons de donner un exemple de l'un des problèmes de construction extrait de ce livre et nous expliquons la méthode utilisée par Apollonius pour le résoudre.

Dans la proposition 56, Apollonius cherche à déterminer dans un plan Π donné une parabole dont on connait le sommet A, le diamètre AB, le côté droit GΔ et l'angle α des ordonnés avec le diamètre. Étant donné que le cône est l'origine de toute section conique, Apollonius cherche dans cette proposition à définir un cône de révolution dont la section par le plan donnée est la parabole cherchée. Pour résoudre ce problème, Apollonius considère d'abord le cas où α est un angle droit. La droite AB est alors l'axe de la parabole. Il prolonge BA d'une longueur AE supérieur à $\frac{1}{4}$ $\Lambda\Delta$. Puis, il définit un segment de longueur $\frac{\Theta}{\Lambda\Delta} = \frac{AE}{\Theta}$. Il trouve $\Theta^2 = EA.\Lambda\Delta$ qui est inférieur à $4AE^2$. D'où, il conclut que Θ est inférieur à 2AE. Dans le plan Π' perpendiculaire à Π, on prend le point Z tel que $AZ = AE\ et\ EZ = \Theta$ ce qui n'est pas possible car Θ<2AE. Ensuite, il prend le point K tels que (ZK) soit parallèle à (EA) et (AK) soit parallèle à (EZ). On aura donc ZA=ZK et AK=EZ=Θ. Le cône de révolution de sommet Z et de base le cercle de diamètre AK dans le plan Q perpendiculaire au plan Π'suivant AK est le cône cherché. Puisque sa génératrice (ZK) est parallèle au planΠ, la section trouvée est une parabole de diamètre AB et de sommet A. La section obtenue en coupant le cône par un plan parallèle au plan Q est un cercle de diamètre MN parallèle à AK. Le plan Π coupe ce cercle suivant la corde EΛ qui est perpendiculaire à Π' donc EΛ ⊥ AB et EΛ ⊥ MN qui sont le diamètre conjugué de la direction de EΛ par rapport au cercle et B est le milieu de EΛ. On a la relation $\frac{AK}{AZ} = \frac{\Theta}{EA} = \frac{\Lambda\Delta}{AK}$ ce qui donne $\frac{AK^2}{AZ^2} = \frac{AK.\Lambda\Delta}{AZ.AK} = \frac{\Lambda\Delta}{AK}$ et puisque ZA=ZK alors

$\frac{AK^2}{AZ.ZK} = \frac{\Lambda\Delta}{AZ}$ qui est la propriété fondamentale de la parabole établie dans la proposition11.

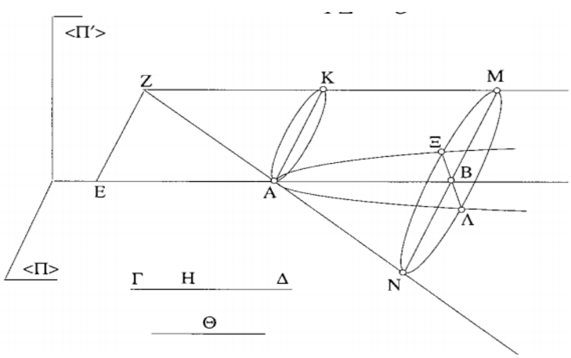

Figure 1 Extrait du livre *" Apollonius : Les Coniques, tome 1 : Livre I, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe* "de Roshdi Rashed, 2008, p 195.

Après les grecs, l'ouvrage de Pappus d'Alexandrie (fin de IVième siècle) « La collection mathématique» présente une bonne référence vue les renseignements précieux qu'ils le contiennent à propos les ouvrages des coniques. C'est Pappus qui cita que les géomètres grecs ont classé les constructions géométriques selon les méthodes qu'on pouvait utiliser pour les résoudre. Les problèmes qui peuvent être résolus à la règle et au compas sont dits problèmes plans. Ceux qui se résolvaient à l'aide d'intersections de coniques ou de neusis s'appellent problèmes solides. Les géomètres grecs utilisaient surtout les neusis pour résoudre les problèmes solides. La contribution majeure de Pappus d'Alexandrie consiste à nous faire connaitre la caractérisation monofocale des coniques dans le livre VII des coniques d'Apollonius.

En inspirant des travaux d'Archimède et d'Apollonius, vers 400 après. J. -C, Sérenus a écrit un œuvre qui se compose de deux livres « de la section du cylindre » et « de la section du cône ».

Face à l'idée qui dominait à l'époque que la section du cylindre par un plan est différente de celle d'un cône par un plan, Sérenus voyait qu'il est nécessaire de prouver géométriquement que les deux sections sont les mêmes.

> « Considérant, ami Cyrus, que beaucoup de ceux qui s'adonnent à la géométrie s'imaginent que la section transversale du cylindre est différente de celle du cône qu' on appelle ellipse , j'ai cru qu'il ne fallait laisser dans cette erreur ni eux ni ceux qu'ils ont persuadés d'être du même avis. » (Ver Eecke, 1969, p.1).

Après les grecs, nous citons encore le travail d'Anthémis de Tralles (vers la fin de cinquième siècle) et son œuvre « Sur les miroirs brûlants ». Cet œuvre n'est pas entièrement conservé. Anthémis y utilise les propriétés focales des coniques pour résoudre des problèmes de réflexion des rayons lumineux. Pour montrer que dans le cas d'un miroir ellipsoïdal, tous les rayons émis d'un foyer se réfléchissent dans l'autre, il utilise la méthode de construction d'une ellipse à l'aide d'une ficelle dont les deux extrémités sont fixées aux foyers et déplace le crayon à l'intérieur de la ficelle de telle manière que cette dernière soit tout le temps tendue. Ensuite Anthémis aura étudié le cas du miroir parabolique.

Aux IXième et Xième siècle, la nécessité des constructions des astrolabes a incité plusieurs mathématiciens arabes comme Al-Farghânî, Al-Kindi, Ibn Sinan, Al-Sijzi, Ibn-Sahl et Al-Qūhi à s'intéresser à l'étude des transformations géométriques et essentiellement aux projections qui seraient utiles pour l'étude des coniques. Cette étude était présente pour la première fois dans les travaux d'Al-Farghânî et précisément dans son livre « Introduction aux propositions géométriques par lesquelles on démontre la figure de l'astrolabe ». Son discipline, Thābit-Ibn-Qurra fait intervenir les transformations géométriques (Projections, affinités orthogonales et homothéties) pour démontrer certains résultats sur les coniques. Il a utilisé les affinités pour transformer les propriétés de cercle à l'ellipse ou l'hyperbole et les projections pour construire les coniques points par points.

Ibrahim-Ibn Sinan- Ibn-Thābit (909-946), petit-fils de Thābit-Ibn-Qurra, a rédigé un livre sur la construction des trois sections " Māqāla fi rasm al-qutūt al-thalātha" où il construit des paraboles (comme Al-Fârâbî et Abū-Al-wafā (940.998)) des ellipses et des hyperboles par la détermination graphique des quelques points.

Dans la deuxième moitié de X$^{\text{ième}}$ siècle, les mathématiciens arabes comme Al-Qūhi et Ibn-Sahl Continuaient à s'occuper des sections coniques. Les travaux d'Al-Qūhi se présentent en réalité comme des solutions aux certains problèmes des constructions géométriques. Ce mathématicien a déterminé les lieux des centres des cercles qui vérifient certaines conditions (le centre d'un cercle tangent à deux éléments donnés, pris parmi des points, des droites ou des cercles) en utilisant la méthode d'analyse et de synthèse qui a pris son origine des travaux d'Ibn Sinān et plus tard fondue par Ibn Al-Haytham. Par exemple il cherche à trouver l'ensemble des centres des cercles tangents à une droite donnée passant par un point connu qui est la parabole. Vu que la parabole n'est pas encore définie par sa propriété foyer et directrice, ce mathématicien a montré la relation qui existe entre ce qui a établi et la définition d'Apollonius.

Dans son traité intitulé « Traité sur les compas parfait » (Al-birkār-al-tāmm), Al-Qūhi conçoit un instrument servant au tracé continu des coniques. Il a repris à résoudre les problèmes de construction des sections coniques dont Apollonius l'examinait dans les propositions 52 jusqu'au 56 du livre 1. Il cherche à montrer comment on peut les tracer avec le compas parfait. Il les a consacrées les propositions 4, 5 et 6 du second livre sur le compas parfait. L'étude de la continuité de ces courbes serait très utile à la résolution des problèmes d'intersections de ces courbes. Son contemporain Ibn-Sahl entreprit les recherches sur les miroirs ardents en s'appuyant sur les connaissances de ses prédécesseurs afin d'étudier les propriétés focales des coniques. Il aurait réussi à mettre au point des procédés mécaniques pour tracer continument les coniques à l'aide des systèmes constitués des deux composants, une partie rigide (règle pivotant autour d'un point, carré rigide coulissant le long d'une règle) et une partie flexible (corde ou courroie) de longueur constante tournant autour d'un cercle mobile qui joue le rôle d'une poulie et est censé éviter la rupture de la corde et faciliter le mouvement. Le centre du cercle mobile est équipé d'un stylet qui trace l'arc de conique souhaité.

Ibn Al-Haytham (908-946) a poursuivi les recherches sur les miroirs ardents et continuait l'étude systématique des propriétés optiques des coniques élaborées par Ibn Sahl. Il a fait une innovation dans l'étude de l'optique. Dans son ouvrage « L'optique » qui a existé en 7 livres, il a élaboré la théorie des visions et de la lumière. Les constructions géométriques de ce traité sont faites à l'aide des sections coniques. Les reformulations dans le domaine d'optique faites par Ibn-Al-Haytham ont amené à l'apparition des problèmes nouveaux comme celui connu par "le problème d'Alhazen" qui consiste à trouver le point de réflexion d'un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle donnée et aboutissant à un observateur donné sur un miroir circulaire. Ce problème était résolu par Ibn-Al-Haytham en utilisant l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole. D'après Roshdi Rashed, Ibn-Al-Haytham s'est intéressé dans son traité « sur l'achèvement des coniques » des problèmes géométriques et solides.

Dans son traité l'art de l'analyse et de synthèse, Ibn Al-Haytham reprit l'étude du problème d'Apollonius posé dans son traité les points des contacts. Ce problème consiste à construire un cercle tangent à trois cercles donnés. Pour le résoudre, il cherche à savoir si deux branches d'hyperboles peuvent se rencontrer ou non.

Dans son ouvrage la description des sections coniques, Al-Sijzi s'est servi des mêmes instruments des constructions de ses prédécesseurs comme Al-Qūhi et Ibn Sinān. Son objectif est de trouver un instrument qui permet de construire les trois coniques. Il propose trois manières pour les constructions du compas. Il semble que ses travaux représentent des initiations aux travaux de la géométrie projective qui seraient élaborés par Desargues et Pascal au dix-septième siècle. Il a réussi également à résoudre le problème de la trisection de l'angle en utilisant le cercle et l'hyperbole.

Dès l'apparition de la géométrie projective avec Desargues au 17ième siècle, les coniques sont vues comme perspectives des cercles ce qui a amené ce mathématicien à étendre les propriétés des cercles vers les coniques propres (hyperbole, parabole et ellipse) et là, l'étude se fait synthétiquement. Descartes et Fermat (au 17ième siècle) ont introduit les principes de la géométrie analytique ce qui leur a permis d'étudier les coniques dans le plan indépendamment des cônes. Ils ont exprimé les propriétés des courbes sous formes des équations. En 1748, Euler a proposé une équation commune aux différentes sections coniques. La géométrie synthétique et analytique dans l'étude des coniques semblent être complémentaires. A la fin du XIXe siècle, Dandelin a réussi à faire la liaison des deux définitions des coniques: définition par foyer et directrice et section d'un cône de révolution par un plan.

Dans son article «les coniques dans l'enseignement secondaire» publié dans l'enseignement scientifique en 1933, Lebesgue a donné une définition commune aux coniques, soit par foyer et directrice, soit en tant que courbes planes tracées sur des cônes de révolution.

En 1935, Leconte propose une nouvelle définition commune aux trois courbes .Il définit les coniques comme lieux géométriques des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui sont tangents à une droite ou un cercle donné.

1-2 Les coniques en géométrie algébrique et analytique

Les arabes se sont servis des sections coniques pour résoudre quelques équations algébriques en utilisant des outils géométriques.

Omar Al-Khayyâm (1048-1131) était le premier mathématicien à avoir traité rigoureusement des équations cubiques, en utilisant les coniques dans son traité « Traité d'Algèbre ». Ses prédécesseurs ont étudié des cas particuliers donc le travail de ce mathématicien consiste à donner une généralisation de la théorie déjà développée par Al-Khawarizmi et Abū-Kāmil. Chez lui, tous les types d'equations du troisième degré sont classifiés selon la répartition des termes constants, du premier degré, du second degré ou du troisième degré, entre les deux membres de l'équation. Il trouvait les solutions de ces équations du second degré en utilisant l'intersection des deux coniques bien choisies parmi le cercle, hyperbole parabole ou ellipse. Un siècle plus tard, Sharaf-Al-Dīn-Al-Tūsi (1201-1274) a classé les équations cubiques suivant l'existence des racines strictement positives et non pas comme Omar Al-Khayyâm qui, suivait le signe des coefficients.

Après Al-Khayyâm et Al-Tūsi, plusieurs mathématiciens arabes se sont intéressés à la théorie géométrique pour résoudre les équations de degré supérieur. Au quinzième siècle, Al Kashi a réussi à résoudre les équations du quatrième degré des formes différentes.

Au 17ième siècle, l'apparition de la géométrie analytique qui a connu son origine avec Descartes et Fermat a permis de définir les coniques par des équations du second degré. Euler a réussi à donner une équation cartésienne commune aux trois coniques.

Mais malgré la richesse culturelle des sections coniques qui peuvent être étudiées dans les deux aspects synthétiques et analytiques, les choix institutionnels tunisiens ont réduit de plus en plus l'étude géométrique des coniques et ont favorisé l'aspect analytique dans cette étude.

2-Problématique et questions de recherche

Les coniques font parties du programme officiel de mathématiques en Tunisie, d'une manière purement analytique, Bien que son enseignement nécessite des connaissances de différentes notions géométriques comme les notions géométriques de base telles que les cercles, les droites, les projections et les médiatrices et un établissement d'un lien entre les différents résultats de la géométrie étudiés en terminale ou d'une manière générale dans le cursus scolaire. Une chose qui peut être réalisée lors de l'étude des coniques sous l'aspect synthétique. La plupart des travaux de recherches en didactiques des mathématiques sur les coniques (Trgalova, 1995, Bongiovanni, Al Mouloud et Campos, 1998, Belghith, 2008, Bahamon, 2011) évoquent et pointent un écart important entre le savoir savant et le savoir à enseigner. Dans cette perspective, Belghith (2008) a remarqué que l'étude des coniques dans l'enseignement tunisien est de plus en plus réduite. Ce concept est enseigné uniquement en géométrie cartésienne. Elle se pose la question à savoir si la niche écologique des coniques deviendra uniquement culturelle et si l'importance des coniques dans l'histoire de la géométrie qui justifie –seule leur enseignement.

Etant donné que le chapitre "coniques" fait partie de la géométrie, dont l'un des principaux objectifs de son enseignement est le développement des compétences de preuves et de démonstrations chez les élèves. Ces compétences sont liées aux enchainements cohérents entre les données des exercices et des problèmes avec des formules et des théorèmes rencontrés et nécessaires d'une façon bien argumentée. Ceci étant, nous avançons l'hypothèse que cet objectif ne peut être atteint en utilisant que les résultats de la géométrie analytique dans laquelle les solutions sont réduites à des applications directes des connaissances introduisant des formules et des théorèmes des cours. Nous nous sommes posé les questions suivantes :

Q_1 : Dans l'enseignement des coniques, quels sont les apports et les effets de la modification de l'aspect géométrique à l'aspect analytique dans l'organisation mathématique ?

Q_2 : Quelle place accorde le nouveau programme aux constructions géométriques et aux raisonnements mathématiques en lien avec les coniques ?

Q_3 :Est-ce que l'enseignement / apprentissage de la notion des coniques suivant l'aspect analytique/algorithmique favorise une meilleure compréhension de cette notion ?

$Q_{4.}$: L'enseignement des coniques sous l'aspect analytique/algorithmique apporte –t- il une compréhension adéquate et gestion de concept chez les enseignants et les élèves.

A la lumière des questions posées, nous adoptons l'hypothèse suivante :

H : Le programme actuel en Tunisie (choix institutionnel) favorise l'approche analytique dans l'enseignement /apprentissage des coniques. Or cette approche ne donne pas une grande importance aux preuves et au raisonnement déductif de la géométrie mais favorise des tâches algorithmiques et cela ne peut pas développer les compétences des preuves et des démonstrations géométriques. Par conséquent, certains apprenants ne maîtrisent pas les concepts géométriques fondus sur les constructions et les démonstrations géométriques.

Afin de répondre à notre problématique, nous avons réalisé une étude expérimentale qui comporte deux parties. La première est l'étude de deux derniers programmes 1998 et 2006 et réformes (19993 et 2002) en analysant les deux manuels officiels (1999 et 2008) que lui ont associées. La deuxième partie consiste à la mise en place d'un questionnaire adressé aux enseignants qui vise à dégager les impacts des modifications faites de l'aspect analytique /synthétique à l'aspect analytique sur la conceptualisation des élèves.

3-Cadre théorique de recherche

Afin de répondre aux questions de recherche déjà citées et de confirmer notre point de vue selon laquelle il y a des modifications dans les organisations mathématiques et didactiques dans deux périodes différentes, nous avons premièrement effectué une analyse praxéologique de deux manuels (Chevallard 1999) relatifs aux ces deux périodes en termes des praxéologies (Tâches, techniques, technologie, théorie). Il s'avère nécessaire de donner une vision synthétique de la théorie praxéologique développée par Chevallard (1999) modélisant une connaissance par le quadruplet [T, τ, ϴ, Θ] où T désigne le type de tâche T, τ la technique, ϴ la technologie et Θ la théorie.

Type de tâche T : C'est un problème posé relatif à une institution donnée (il est évoqué généralement par un verbe d'action). On peut distinguer entre genre des tâches et types des tâches par exemple : calculer, démontrer, construire sont des genres des tâches mais par contre calculer une valeur d'une fonction en un point donné est un type des tâche.

Technique τ : Face à un problème donné, on cherche une manière de le résoudre. Donc à un type de tâche ou une tâche, on doit préciser une manière de l'accomplir. C'est ce qu'on appelle technique.

Technologie ϴ : Selon Chevallard, une technologie est un discours rationnel (logos) sur la technique. Il distingue trois fonctions de la technologie. La première, est Justifier rationnellement la technique. Cette fonction consiste à assurer que la technique donne bien le résultat prétendu. La deuxième est expliquer, rendre intelligible, éclairer la technique. Et la troisième est la production de la technique.

Théorie Θ : Est un niveau plus supérieur de justification, d'explication et de production des techniques. La théorie peut réaliser leurs fonctions pour une ou plusieurs techniques mais la technologie peut être d'aucune technique ou peu des techniques. Ce qui caractérise la théorie des technologies.

Les techniques et les tâches sont relatives aux institutions. Certaines tâches et techniques disparaissent avec les éléments théoriques d'où ils émergent. D'autres techniques mènent à l'algorithmisation favorisée par l'automatisation de ce qu'on travaille. Ceci est au cœur de notre questionnement sur les modifications apportées aux organisations mathématiques et didactiques relativement aux coniques dans les deux manuels (1999 et 2008). Pour évaluer les organisations mathématiques et didactiques, nous adoptons les mêmes critères développés par Chevallard (1999). Dans la suite, nous proposons une évaluation des types de tâches, des techniques et des technologies.

- **Evaluation des types de tâches.**

Trois critères font l'objet de cette évaluation :

1) Critère d'identification où Chevallard insiste sur la clarté, la représentation des types de tâches.

> « Les types de tâches sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ? En particulier, sont-ils représentés par des corpus effectivement disponibles de spécimens suffisamment nombreux et adéquatement calibrés ? Ou au contraire ne sont-ils connus que par quelques spécimens peu représentatifs. » (Chevallard, 1999, p25).

2) Critère des raisons d'être : selon lesquelles les raisons d'être des types de tâches sont explicitées ou au contraire immotivées.

3) Critère de pertinence : Selon laquelle, Chevallard propose si les types des tâches considérés fournissent un bon découpage des situations mathématiques et s'ils sont toujours pertinents aux besoins mathématiques des élèves ou au contraire apparaissent isolés sans aucun lien avec l'activité mathématique et extra mathématique.

- **Evaluation des techniques** : L'évaluation des techniques selon Chevallard, porte essentiellement sur les points suivants :
  - L'efficacité de leurs élaborations.
  - Le degré de facilité.
  - La satisfaction de leurs portées.
  - leur fiabilité.
  - La satisfaction de leur intelligibilité.
- **Evaluation des technologies** :

> « Etant donné un énoncé, le problème de sa justification est-il seulement posé ? Ou bien cet énoncé est-il considéré tacitement comme allant de soi, évident, naturel, ou encore bien connu (« folklorique ») ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes Canoniques en mathématiques ? Sont-elles adaptées à leurs conditions d'utilisation ? Les Justifications explicatives sont-elles favorisées? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement et optimalement exploités. » Chevallard, 1999, p 26).

4-Etude Expérimentale

4-1Analyse des manuels

En Tunisie, il y a un seul manuel officiel dans tous les niveaux. Notre intérêt porte sur les deux manuels des deux dernières réformes (1993 et 2002) respectives de baccalauréat section : Mathématiques (1998 et 2007). Nous faisons les analyses des versions que nous disposons (éditions 1999 et 2008).

4-1-1 Analyse du manuel de baccalauréat, section: Mathématiques, 1999

Dans ce manuel, la partie concernant les coniques se décline suivant trois chapitres consécutifs parmi les douze chapitres du manuel. Ces chapitres sont numérotés : 8, 9 et 10, intitulés respectivement : Ellipse, Hyperboles et Paraboles, ils sont précédés du chapitre 7 intitulé 'Les similitudes' et suivis du dernier chapitre concernant des problèmes de révision. Les organisations mathématiques et didactiques dans ces trois chapitres sont très semblables.

4-1-1-1 Analyse praxéologique des exercices de chaque chapitre

> L'organisation mathématique décrit les types de tâches existants dans la partie exercices.

Les analyses praxéologiques des trois chapitres sur les coniques, nous ont permis d'identifier les types des tâches présents qui sont analogues pour l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Ces types des tâches nécessitent souvent, lors de leurs exécutions, des techniques semblables pour les trois coniques comme montre les analyses praxéologiques des trois chapitres (voir l'exemple dans l'annexe 2). Nous récapitulons ces types des tâches comme suit :

- T_1 : Construire une conique connaissant l'une des ses éléments caractéristiques.
- T_2 : Donner une construction géométrique d'une tangente à une conique.
- T_3 : Construire l'un des éléments caractéristiques d'une conique.
- T_4 : Donner l'équation d'une conique connaissant l'un des ses éléments caractéristiques.
- T_5 : Donner les éléments caractéristiques d'une conique à partir de son équation réduite.
- T_6 : Reconnaitre une conique à partir de son équation réduite.
- T_7 : Déterminer l'équation réduite de la tangente à une conique connaissant son équation réduite.
- T_8 : Déterminer l'équation paramétrique d'une conique.
- T_9 : Montrer qu'une représentation paramétrique définie une conique.

Cette analyse nous permettra de confirmer ou infirmer le fait que cette réforme a accordé une grande importance aux preuves géométriques. A chaque type de tâche, nous associons la technique et la technologie qui lui est correspond. Nous choisissons de catégoriser l'analyse des exercices proposés suivant deux théories à savoir la théorie de la géométrie synthétique et la théorie de la géométrie analytique que nous désignons par Θ_1 et Θ_2. Nous donnerons des exemples de l'analyse praxéologique de ces chapitres dans l'annexe[2]. L'organisation mathématique relative à la théorie de la géométrie synthétique choisie dans les trois chapitres permet d'établir des résultats essentiels qui sont conformes aux intentions des concepteurs du programme. Nous pouvons résumer ces résultats comme suit :

1) La construction d'un point d'une ellipse ou de la tangente en l'un de ses points.
2) La reconnaissance ou la détermination d'un ensemble des points définis comme ensembles des lieux des points qui vérifient certaines conditions est une ellipse, hyperbole ou parabole
3) La reconnaissance d'une tangente à une conique.
4) La démonstration ou la déduction d'une telle assertion.
5) Construction d'une hyperbole connaissant l'un des ses éléments caractéristiques
6) La construction ou la détermination des quelques éléments caractéristiques de l'hyperbole.

Ces résultats répondent aux objectifs de la géométrie synthétique qui s'articulent autour des constructions géométriques et des démonstrations hypothético –déductives. La réalisation du premier et du quatrième résultat présente une bonne occasion pour les élèves pour exercer les techniques des preuves et des démonstrations et de comprendre les stratégies des résolutions des problèmes des constructions. Les types des tâches répondent aux objectifs de la géométrie synthétique. Leurs résolutions nécessitent un niveau de conceptualisation des certaines notions géométriques supposées acquises très important. Nous pouvons constater de cette analyse praxéologique que les concepteurs du programme favorisent l'aspect synthétique en liant le concept conique aux autres notions du programme. Les exercices proposés sont des problèmes géométriques qui nécessitent dans leurs exécutions un niveau de conceptualisation des autres concepts mathématiques vus durant tout le cursus scolaire très important. Ce qui peut créer des difficultés chez les bacheliers vu que beaucoup des connaissances géométriques supposées acquises peuvent être oubliées ou mal connues.

Les principaux résultats que l'organisation mathématique autour de la théorie de la géométrie analytique permet de les réaliser sont résumés comme suit :

1) La détermination d'une équation réduite ou une représentation paramétrique d'une conique.
2) La détermination d'une équation réduite de la tangente ou de la normale à l'une des trois coniques en l'un de ses points.

Les types des tâches proposées dans les trois chapitres pour réaliser les résultats déjà cité permettent de faire une conversion entre le registre numérique et géométrique d'une part et le registre algébrique et géométrique d'autre part. Nous pouvons constater de l'analyse praxéologique déjà faite

[2] Voir tableau 1, 2 et 3 dans l'annexe 2

que les types des tâches s'articulent autour de la géométrie analytique sont routiniers. Ils permettent de déterminer les équations réduites des trois coniques ou celles des éléments qui les caractérisent en appliquant directement les définitions par équations réduites de ces objets et les théorèmes relatifs aux éléments caractéristiques institutionnalisés dans le cours. Ce qui rend les types des tâches algorithmiques.

4-1-1-2 Evaluation des organisations mathématiques

- **Evaluation des types de tâches**

1) Critère d'identification : les types des tâches sont bien identifiés. Ils sont nombreux, ce qui ouvre devant les élèves un champ vaste des savoirs - faire pour appliquer les différents théorèmes et définitions relatifs aux coniques.

2) Critère des raisons d'être : La raison d'être des types des tâches sur les trois coniques est explicitée. C'est un outil pour résoudre des problèmes spécifiques à la géométrie pure comme les démonstrations géométriques et la résolution des problèmes des constructions ou la construction d'un point d'une conique.

3) Critères de pertinence : Les types des tâches sont pertinents si on considère qu'ils développent chez les élèves la capacité de faire un raisonnement géométrique déductif bien argumenté. Mais, si on considère que les élèves n'ont pas besoin de ces types des tâches au supérieur, nous constatons que ces types de tâches n'ont aucune pertinence.

- **Evaluation des techniques** :

Les techniques sont bien élaborées étant donné la diversité des exercices mis en pratique. Elles sont parfois difficiles à utiliser. Les élèves dans plusieurs cas, cherchent la technique convenable pour résoudre une tâche. Nous voyons que parfois, les techniques sont hors de leurs portées car ils ont besoins d'articuler les résultats du cours avec des résultats de la géométrie euclidienne précédemment vus qui peuvent être oubliés ou mal connus. Les techniques qui consistent à appliquer les théorèmes des cours directement sont suffisamment travaillées comme les techniques utilisées pour l'identification des coniques. Certains types des tâches sont résolus en appliquant directement les théorèmes ou à l'aide des techniques institutionnalisées dans les exercices corrigés. Ces types de techniques semblent avoir une portée satisfaisante et une fiabilité acceptable car elles sont employées d'une façon claire et intelligible.

- **Evaluation des technologies** :

Les technologies relatives au chapitre coniques comprennent toutes les définitions théorèmes et propriétés spécifiques à ce concept. Ils permettent aux élèves de les concevoir des différentes manières (comme lieux géométriques d'ensemble des points qui vérifient certaines conditions comme ensembles des cercles tangents à une droite donnée et passant par un point fixe et comme courbes algébriques qui vérifient certaines équations).Ces résultats technologiques sont effectivement et optimalement exploités dans les exercices et les problèmes proposés dans ce chapitre. Les justifications des technologies ne sont pas demandées car ils sont généralement démontrées et le cours propose parfois comment ils peuvent être utilisées lors de l'institutionnalisation des techniques dans le cours. Ils ne nécessitent que l'application directe des théorèmes et des définitions institutionnalisés dans les cours dans leurs exécutions afin de déterminer les équations réduites des coniques et celles des éléments qui les caractérisent ou à identifier les coniques à partir des équations.

4-1-2-Analyse du manuel de baccalauréat, section : Mathématiques, 2008 :

Nous pouvons constater d'après cette analyse praxéologique que les types des tâches sont algorithmiques et routiniers. Ils ne nécessitent que l'application directe des théorèmes et des définitions institutionnalisés dans les cours dans leurs exécutions afin de déterminer les équations réduites des coniques et celles des éléments qui les caractérisent ou à identifier les coniques à partir des équations données.

4-1-2-1 Evaluation de l'organisation mathématique :

- **Evaluation des types de tâches**

1) Critère d'identification : les types de tâches sont bien identifiés. Ceux qui concernent spécifiquement l'identification des types des coniques à partir de leurs équations ou la détermination de leurs équations réduites ou de celles de leurs tangentes ou des asymptotes pour l'hyperbole.

2) Critère des raisons d'être : La raison d'être des types des tâches sur les trois coniques est explicitée. C'est un outil pour résoudre des problèmes spécifiques à la géométrie analytique ou pour tracer des coniques.

3) Critères de pertinence : Les types de tâches sont pertinents si on le lie avec les objectifs du chapitre et l'activité mathématique elle-même et n'ont aucun lien avec d'autres disciplines voire des activités extra mathématiques. Leur pertinence autre qu'interne ne pourrait pas apparaître.

- **Evaluation des techniques** : Les techniques proposées sont généralement à la portée des élèves. Les élèves utilisent des techniques qui sont institutionnalisées dans les exercices résolus ou des techniques qui sont réduites à des applications directes des résultats du cours. Ces techniques sont bien élaborées vu la diversification des applications et des exercices où elles sont utilisées. Elles semblent avoir une portée satisfaisante et une fiabilité acceptable puisqu'elles sont clairement employées. Les techniques qui peuvent être utilisées pour résoudre des tâches problématiques autour de la géométrie synthétique ne sont pas bien élaborées : leurs existences sont rares. Certaines techniques sont utiles dans d'autres leçons. Pensons-nous aux transformations algébriques ou des formes canoniques dans les leçons d'algèbre et d'analyse

- **Evaluation des technologies** : Les coniques sont définies par foyer et directrice et excentricité. Les technologies relatives au chapitre comprennent essentiellement les théorèmes relatifs à la géométrie analytique qui sont effectivement exploités dans les exercices et les applications. Ces technologies ne nécessitent aucune justification car la majorité des techniques qui lui sont associées sont institutionnalisées. Les définitions géométriques, s'ils existent, sont simplement énoncées sans aucune application dans les exercices. La réduction du contenu géométrique des coniques a affaiblit le bloc techno-logico-théorique en supprimant plusieurs définitions et théorème qui existent dans le savoir savant. Toutefois, les technologies de la construction ou de la détermination d'un point, des tangentes d'une conique ou des asymptotes d'une hyperbole sont dissociées à des manipulations algébriques. Les technologies qui aident à la recherche d'ensemble des points et des problèmes de construction sont relativement absentes.

Nous avons constaté que cette réforme n'accordait aucune importance à la géométrie synthétique. Les choix institutionnels ont favorisé l'aspect analytique en proposant des tâches qui ne nécessitent que des simples procédures pour les résoudre. Mais, cela ne peut pas nier qu'ils offrent aux élèves l'occasion de construire eux-mêmes leurs savoirs au cours des activités préliminaires qui précédent chaque théorème où les élèves ont les charges de construire les nouvelles connaissances à condition que ces activités soient travaillées par les élèves eux-mêmes. Les seules définitions géométriques proposées sont les définitions par foyer et directrice ou par foyer, directrice et excentricité sans donner des démonstrations aux équivalences de ces définitions avec les définitions par équations cartésiennes ou réduites ce qui crée une incohérence et par conséquent les élèves sont incapables de relier les définitions géométriques et algébriques des coniques. De plus aucune application à ces définitions géométriques n'est proposée.

4-1-3-comparaison de deux manuels

Nous proposons dans cette partie de réaliser une étude comparative de deux manuels en vue de l'identification des modifications dans les praxéologies à enseigner.

Le manuel de 1999 contient suffisamment des savoirs et de savoir–faire à propos du concept coniques en proposant son enseignement dans deux aspects différents analytique et synthétique bien qu'il existe un écart important entre le savoir savant et le savoir à enseigner. En fait, beaucoup des connaissances à propos de ce concept sont absentes comme la définition des coniques comme section d'un cône de révolution par un plan dont on varie la direction.

Vu que le bloc technologique- théorique joue un rôle très important dans les organisations mathématiques, les technologies présentes dans les deux manuels ont favorisé une étude analytique dans le manuel de 2007(version2008) et une étude à la fois synthétique analytique dans le manuel de 1998 (version 1999). L'approche adoptée dans le manuel actuel (2008) présente beaucoup de faiblesses. Nous constatons qu'il y a beaucoup de théorèmes et de définitions spécifiques à la géométrie des coniques qui sont manquants. Ce qui empêche le développement des aptitudes de raisonnements géométriques chez les futurs bacheliers en réduisant les tâches à des tâches algorithmiques. Les choix dans le manuel ne rendent pas compte des relations qui peuvent exister entre cette notion et les autres notions géométriques.

Les deux manuels négligent une grande partie du savoir savant qui permettra aux élèves de construire des connaissances riches et bien précises à propos du concept conique.

L'étude des organisations mathématiques du manuel de 1998 (édition 1999) a confirmé notre idée selon laquelle l'enseignement des coniques peut se faire d'une manière purement géométrique en retournant sur les différentes notions géométriques précédemment vues dans le cursus scolaire. Cette étude apporte aux élèves beaucoup des savoirs riches à propos du concept coniques. Ils acquièrent, lors de leur manipulation de cet objet, la majorité des définitions qui existe dans le savoir savant et les utilisent pour résoudre des problèmes spécifiques à la géométrie synthétique et analytique à la fois. Donc leurs conceptions sur les coniques ne sont pas restreintes à des équations algébriques mais plutôt, ils peuvent le concevoir comme des lieux géométriques d'ensemble des points qui vérifient certaines propriétés. Les élèves ont l'occasion de voir cette notion dans des différentes cadres et registres de représentations sémiotiques ce qui le rend plus accessible. Contrairement au manuel de 2007 (édition 2008), qui favorise l'aspect analytique. Les élèves ne retiennent que les équations réduites des trois coniques et celles de leurs éléments caractéristiques ce qui a un impact sur les types des tâches proposés qui sont réduites à des simples applications des définitions et des théorèmes des cours sans donner aucune importance aux démonstrations géométriques. Les exercices sont parfois dépourvus de sens et ne préparent pas les élèves à la recherche mathématique. Ils ne développent chez eux ni les compétences des preuves ni des démonstrations.

4-2 Questionnaire[3]

Cette expérimentation s'est déroulée au cours de l'année scolaire 2017/2018. Le questionnaire (Annexe1) a pour objectif de faire apparaître les impacts des modifications introduites lors de l'étude des coniques. Nous avons essayé de faire participer un certain nombre d'enseignants du lycée de différentes régions de la Tunisie, en soumettant le questionnaire sous forme papiers, ceci en nous déplaçant à certains lycées de Sidi Bouzid, Gafsa,

---

[3] Voir annexe 1

Tunis ou bien sous forme électronique à travers les e-mails qui ont été envoyés à des enseignants de Bizerte et de Kairouan. Les parties de questionnaire sont développées suivant des questions qui portent sur l'importance accordée aux chapitres sur les coniques, l'enseignement des coniques dans deux différentes périodes et sur les connaissances nécessaires, supposées acquises, pour l'apprentissage des coniques ainsi que les difficultés que peuvent rencontrer les élèves dans la classe

A l'issu des réponses recueillies par les enseignants, nous avons dégagé quelques raisons des modifications introduites dans l'étude des coniques que nous résumons comme suit :

- L'aspect analytique des coniques est plus simple à maitriser.
- l'allègement du programme de 7ème année secondaire.
- Résoudre les difficultés que peuvent rencontrer les élèves lors de manipulation du concept conique sous l'aspect synthétique à cause des diversités des cadres, des registres et l'incapacité des élèves à faire une conversion entre les différents registres des représentations sémiotiques de ce concept, sans oublier les difficultés que peut rencontrer l'élève lors des résolutions des problèmes de construction.
- Créer une adéquation entre les différentes parties du programme.

Le nouveau programme ne prend pas en compte l'étude synthétique des coniques qui semble compliquée à cause des diversités des propriétés et des définitions géométriques qui exigent beaucoup des savoirs et savoir-faire et particulièrement des démonstrations et des constructions géométriques pour résoudre les tâches qu'ils ont associées. Cette accumulation des connaissances présente une des sources des difficultés qui peuvent rencontrer les élèves. Donc les modifications sont faites dans l'objectif de rendre plus accessible cette notion et pour faciliter les démonstrations. La réforme propose également d'améliorer la cohérence structurelle du programme en relation avec la géométrie analytique et cartésienne et l'étude fonctionnelle.

5-Résultats de la recherche

Nous avons avancée l'hypothèse qu'il y a des changements dans les organisations mathématiques et didactiques lors de l'introduction de la nouvelle réforme de 2002 dans notre système éducatif tunisien. L'étude du programme officiel (1993 et 2006) et l'étude des manuels (1999 et 2008) suivant la théorie anthropologique des didactiques (Chevallard1998, 1999) ont confirmé cela. Cette étude nous a permis d'apporter des éléments des réponses aux deux premières questions qui ont guidé notre recherche. Pour la première et la deuxième question :

Q1 : Dans l'enseignement des coniques, quel sont les apports et les effets de la modification de l'aspect géométrique à l'aspect analytique dans l'organisation mathématique ?

Q_2 : Quelle place accorde le nouveau programme aux constructions géométriques et aux raisonnements mathématiques en lien avec les coniques ?

Les modifications de l'étude des coniques de l'aspect synthétique /analytique à l'aspect analytique ont affaiblit le bloc techno-logico-théorique par la suppression de plusieurs théorèmes et définitions relatifs à cette notion. Les choix institutionnels actuels ont favorisé l'aspect analytique. Ce qui rend la majorité des tâches proposées algorithmiques et routinières qui ne nécessitent que des procédures simples pour les accomplir. Les élèves appliquent directement les théorèmes du cours pour répondre aux questions relatives à la géométrie analytique comme la détermination des équations réduites ou cartésiennes des trois coniques et des équations réduites de leurs éléments caractéristiques. Ces choix n'accordent aucune importance aux raisonnements déductifs de la géométrie. Les liaisons entre cette notion et les autres concepts géométriques dans les exercices proposés sont rares. Les problèmes des constructions qui présentent une occasion pour les raisonnements géométriques sont complètement absents. Nous constatons que les cours et les exercices proposés dans les manuels ont réalisé les objectifs du programme.

Concernant la troisième question : Q_3 :Est-ce que l'enseignement / apprentissage de la notion des coniques suivant l'aspect analytique/algorithmique favorise une meilleure compréhension de cette notion ?

A la fin de l'étude des coniques, les élèves ne conçoivent qu'une conique est une courbe algébrique du second degré dont ils cherchent à déterminer ses équations réduites et celles de ses éléments caractéristiques ou bien les reconnaitre à partir des équations réduites et cartésiennes données d'une façon algébrique en dehors de tout raisonnement géométrique. Cette étude qui privilégie le registre algébrique ne permet pas de convertir les différents registres des représentations sémiotiques, la chose qui est nécessaire pour une bonne conceptualisation des concepts mathématiques d'après Duval. Les élèves ne peuvent pas construire des connaissances précises et riches à propos de ce concept. Pour faire apparaître les impacts des changements introduits lors de l'étude des coniques, nous avons choisi de terminer notre travail par un questionnaire adressé aux enseignants des mathématiques. Le questionnaire nous a permis d'apporter quelques éléments de réponse à la question suivante :

Q_4 :L'enseignement des coniques sous l'aspect analytique/algorithmique apporte –t-il une compréhension adéquate et gestion du concept chez les enseignants et les élèves ?

Les réponses recueillies aux questionnaires proposés aux enseignants montrent que l'enseignement des coniques sous l'aspect analytique rend cette notion plus accessible aux élèves. Il est plus simple à maitriser. Cette étude (sous l'aspect analytique) a permis de résoudre les difficultés que les élèves peuvent rencontrer lors de manipulation de ce concept sous l'aspect synthétique à cause des diversités des cadres et des registres sémiotiques dont les élèves sont incapables de faire la conversion entre eux quoique ces conversions leur permettent de construire des connaissances bien précises et riches à propos cette notion. Selon les enseignants, ces modifications permettent l'allègement du programme de 7^{ieme} année secondaire ce qui est à leur faveur, car certains d'entre eux désapprouvent la charge horaire trop importante attribuée pour ce niveau.

6-Conclusion et perspectives

Afin que les élèves construisent des connaissances riches et bien précises sur les coniques, nous estimons qu'il serait nécessaire qu'elles doivent être enseignées dans les deux aspects synthétique et analytique. L'enseignement des coniques sous l'aspect synthétique permet aux élèves d'acquérir la majorité des connaissances qui existent dans le savoir savant. Cette approche d'étude des coniques présente également une bonne occasion aux élèves pour apprendre les aptitudes des preuves et des démonstrations lors d'apprentissage des propriétés géométriques des coniques. Ces aptitudes seront exercées lors des résolutions des problèmes géométriques et des problèmes des constructions. Ce qui prépare les élèves aux recherches mathématiques.

L'approche analytique ou géométrique dans l'étude des coniques n'est pas accessible aux élèves du niveau de collège où les concepts géométriques sont introduits comme des objets sensibles. Il nous semble qu'à ce niveau, l'introduction des coniques comme sections d'un cône de révolution par un plan peut être effectuée en faisant des expériences avec eux pour introduire ces notions géométriques.

Notre travail ouvre des perspectives de recherche basées sur les questions suivantes :

Est–il possible d'organiser l'enseignement des coniques et des courbes algébriques généralement autour d'une problématique qui rend compte des articulations épistémologiques entre les différentes définitions des coniques ou des courbes algébriques ?

Bibliographie

Belghith, H. (2008). *Etude historique et épistémologique des coniques et leur évolution curriculaire dans l'enseignement secondaire tunisien*, Mémoire de master en didactique des mathématiques de l'université virtuelle de Tunis.

Bongiovanni, V, Ag Al-mouloud & Campos.T.M (1998). *Les coniques et cabri géomètre une expérimentation Sao Paulo*. Bulletin de l'APMEP, n°419.

Bongiovanni. V(2007), *Etude historiques de premières caractérisations des coniques*. Revue d'histoire des mathématiques, p. 61–82.

Chevallard Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : La notion d'organisation praxéologique, *Acte de l'université d'été de la Rochelle*.

Chevallard. Y. (1999). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique*, Acte de l'Université d'été de la Rochelle.

Decorps Foulquier. M(1999), Sur les figures du traité des coniques d'Apollonius de Pergé édité par Eutocius d'Ascalon. *Revue d'histoire de mathématique, 5p 61-82.*

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée', *Annales de didactique et de science cognitive, 5, IREM de Strasbourg.*

Ver Eecke, P. (1923). *Les Coniques d'Apollonius de Perge. Ouvrages traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke*. La Fondation Universitaire de Belgique.

Perrin. D, *Archimède et la quadrature de la parabole ou les cinq sources du tiers [en ligne*],[15.11.2018], consultable sur internet

https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ArchimedeIREM.pdf .

Quételet, A. (1822). Une nouvelle théorie des sections coniques considérées dans le solide. *Nouveaux mémoires de l'Académie de Bruxelles, volume 2, 1822, pp. 124-153.*Copié et numérisé par Google.

Rashed, R. (2008), *Apollonius : Les Coniques, tome 3 : Livre V, commentaire historique et mathématique* Walter de Grutera.

Rashed, R. *(2009), Apollonius : Les Coniques, tome 4 : Livres VI et VII commentaire historique et mathématique*, Walter de Gruyter.

Rashed, R (2008) *Apollonius : Les Coniques, tome 1 : Livre I, commentaire historique et mathématique* Walter de Gruyter.

Rashed, R. (2009) Apollonius : *Les Coniques, tome 2 : Livre IV, commentaire historique et - mathématique* Walter de Gruyter.

Rincon. B(2011), *Démonstrations des propriétés métriques sur les coniques avec un outil de géométrie dynamique*, mémoire de master en didactique de mathématique de l'université du Québec à Montréal.

Trgalova, J, (1995). *Etude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel cabri-géomètre*, Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourrier, Grenoble.

Ver Eecke, P. (1923). *Les Coniques d'Apollonius de Perge. Ouvrages traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke*. La Fondation Universitaire de Belgique.

Programmes & Manuels tunisiens

Manuel Tunisien. (1999), Mathématiques, *7ème année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 2, République Tunisienne, ministère de l'éducation CNP, code 222734.*

Manuel Tunisien. (2008), Mathématiques, *7ème année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 2, République Tunisienne, ministère de l'éducation CNP, code 232446.*

Programmes officiels dans les lycées secondaires. (1993), *Mathématiques, République Tunisienne, Ministère de l'éducation et des sciences, Direction générale des programmes et de la formation, (Décret n° 930-670 du 29 mars 1993).* Nationale, Centre nationale pédagogique(CNP).

Programmes officiels dans les lycées secondaires. (1998), *Mathématiques, République Tunisienne, Ministère de l'Education et des Sciences, Direction générale des programmes et de la formation, (Décret n° 98-1280 du 15 juin 1998).*

Programmes officiels de mathématiques. *3ème et 4ème année de l'enseignement secondaire. République Tunisienne, Ministère de l'éducation et des sciences Ministère de l'éducation et de la formation continue, Direction des Programmes et des manuels scolaires .Septembre 2006.*

Annexe1 : QUESTIONNAIRE

Ce questionnaire s'inscrit dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques. Son objectif est de recueillir des informations sur l'enseignement des coniques dans le système éducatif tunisien.
Votre institution : Nous vous demandons de bien vouloir prendre le temps nécessaire pour répondre aux questions.

Nous vous remercions vivement de votre participation et de votre contribution.

Informations générales

Ville :

Nombre d'années d'expérience professionnelle :

Votre grade :

Avant l'année scolaire en cours, avez-vous assuré un enseignement de baccalauréat (4èmeannée actuelle ou 7ème année de l'ancien régime) section Mathématiques ou section Maths-Sciences. Oui ☐ Non Si, oui, merci de cocher au moins une case

- Enseignement de baccalauréat avant 1997 ☐
- Enseignement de baccalauréat dans la période 1997 – 2007 ☐
- Enseignement de baccalauréat après 2008 ☐

Informations sur l'enseignement des chapitres en lien avec la géométrie

Dans les situations d'enseignement, quelle importance accordez-vous aux chapitres suivants en lien avec la géométrie.

Chapitres	Très important	Assez important	Peu important	Relativement sans importance	Aucune importance
Calcul dans le corps des nombres complexes					
Formes trigonométriques d'un nombre complexe.					
Equations à coefficients complexes					
Isométrie du plan					
Déplacements et antidéplacement.					

Similitudes planes

Ellipse

Hyperbole.

Parabole.

Géométries dans l'espace

Informations sur l'enseignement des coniques

1/ Concernant les coniques, le manuel de 1998 propose trois chapitres qui sont dans l'ordre : *Ellipse, Hyperboles, Paraboles*. Le manuel de 2008propose un seul chapitre : *Les coniques*.

Quel manuel vous semble le mieux par rapport à l'enseignement de cette notion ? Pourquoi ? :

Manuel de 1998 ☐

Manuel de 2008

Votre réponse est appuyée sur votre expérience professionnelle ? Oui ☐ Non

Ou autres (à préciser) ?

2/ Le manuel de 1998 propose une étude géométrique et analytique, basée sur les constructions à la règle et au compas, aux interprétations géométriques, recherche d'ensemble des points, détermination des éléments caractéristiques d'une conique.

Quelle importance accordez-vous aux choix institutionnels des manuels 1998 et de 2008 par rapport à l'enseignement de cette notion en lien avec la géométrie ? :

Manuels	**Très important**	**Assez important**	**Peu important**	**Relativement sans importance**	**Aucune importance**
1998					
2008					

3/A Votre avis dans quel objectif, la nouvelle réforme apporte-t-elle des modifications à propos la notion des coniques en passant d'un côté synthétique (géométrique) à un coté purement analytique ? Est –ce pertinent ?

4/ Selon vous, quelles sont les connaissances antérieures (connaissances supposées acquises) nécessaires pour enseigner les coniques ?

5/ Selon vous, quels sont les objectifs qu'on pourrait atteindre à travers l'enseignement des coniques ?

Informations sur les difficultés que pourraient rencontrer les élèves

1/ Selon vous, les élèves rencontrent-ils certaines difficultés lors de l'apprentissage des coniques ?

Oui ☐ Non

Si oui, en citez quelques-unes :

2) On propose ci-joint un exercice extrait du manuel de 1999 (exercice n°2 page 216) :

« On connait la directrice d'une parabole ainsi que deux de ses points. Construire son foyer »

Selon vous, y a-t-il des difficultés pour certains élèves lors de la résolution de cet exercice ?

Oui ☐ Non

Si oui, citez quelques difficultés : définition géométrique de la parabole

Selon vous, comment surmonter et dépasser ces difficultés ?

Annexe 2 : Exemples des analyses praxéologiques des exercices des deux manuels autour de la géométrie synthétiques et analytique

Types des tâches	Techniques	Technologies	Exercices
Montrer que la distance entre deux points symétriques d'une ellipse est inférieur au grand axe	Utiliser l'inégalité triangulaire dans le triangle MM'F on aura : $MM' \leq MF' + M'F'$ Donc $MM' \leq MF' + MF$ Ainsi $MM' \leq 2a$	θ_1 : Une ellipse est l'ensemble des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est constante donnée strictement supérieur à FF'.	n°1)1)a)p 166
Déduisez que la distance entre le centre de l'ellipse et un point est inférieure au grand axe.	Utiliser la question précédente : $OM = \frac{MM'}{2} \leq \frac{2a}{2}$ Donc $OM \leq a$	θ_1	n°1)1)b) p166
Montrer que la distance entre deux points de l'ellipse est inférieure au grand axe.	$on\ aMN \leq MO + ON \leq a + a$ Donc$MN \leq 2a.$	θ_1	n°1) 3) p166

Déterminer les trois sommets d'une ellipse connaissant un sommet et un foyer.	Appliquer θ_1.	θ_1	n°2 p166
Construire les sommets d'une ellipse dont on connait les foyers F et F' et un point.	Déterminer précisément le grand axe 2a.	θ_2: Tout ellipse de foyers F et F' admet deux axes de symétrie et un centre de symétrie Les deux axes sont la droite (FF') et la médiatrice du segment [FF'].	n°3 p166
Déterminer le grand axe 2a d'une ellipse dont on connait les foyers F et F' et une tangente.	Déterminer la longueur 2a en appliquant θ_3.	θ_3 : Le symétrique d'un foyer par rapport à une tangente à l'ellipse appartient au cercle directeur relatif à l'autre foyer.	n°4 p166
Construire le second foyer d'une ellipse dont on connait un foyer et deux points ainsi que le grand axe2a.	Appliquer θ_1 pour déterminer le second foyer.	θ_1	n°5 p166

Tableau n°1 : Analyse praxéologique des quelques questions de la partie *exercices du chapitre ellipse* autour de la théorie de la géométrie synthétique.

Type de tâches	**Techniques**	**Technologies**	**Exercices**
Donner une équation d'une ellipse connaissant quelques-uns de ses éléments caractéristiques.	Déterminer avec précision a, b et c de théorème.	θ_{11} : Soit E une ellipse de centre O, de grand axe AA'=2a et de petit axe BB'=2bet de distance focale FF'=2c On rapporte le plan d'un repère orthonormé$(O,\vec{I},\vec{J})$ tels que les vecteurs$\vec{I}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont colinéaires M(x, y)$\in E \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$-1=0 est une ellipse.	n °7 P166/18p 169

Trouver les éléments caractéristiques d'une ellipse à partir de la donnée d'une équation réduite.	Déterminer précisément les réels a et b.	θ_{11}	n°8/9/10/ 14/11)b) P166/17
Montrer qu'une courbe dont on connait son équation réduite dans un repère orthonormé est une ellipse.	Effectuer des Transformations algébriques convenables pour transformer l'équation donnée en une équation réduite d'une ellipse puis appliquer θ_{11} .	θ_{11}	n°11 p167
Déterminer les équations réduites des tangentes à une ellipse ayant pour vecteur directeur un vecteur donnée.	Déterminer l'équation générale de la tangente à cette ellipse. puis chercher x_0 et y_0 de telle sorte que $\vec{u}$ soit un vecteur directeur de cette tangente.	θ_{12} : L'équation de la tangente à E en un point M' (x_0, y_0), est donnée par $$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$	
Montrer qu'un ensemble des points décrit une ellipse	Remplacer les coordonnées de point M et vérifier l'équation d'une ellipse.	θ_{11}	
Reconnaitre un ensemble donné par son équation réduite.	Trouver l'équation de E dans un nouveau repère puis déterminer sa nature dans le repère.	θ_{11}	14p167/1 68

Tableau n° 2 : Analyse praxéologique des quelques questions de la partie *exercices du chapitre ellipse* autour de la théorie de la géométrie analytique.

1) Montrer qu'un point donné est le foyer d'une parabole connaissant son équation réduite.	Déterminer le foyer en appliquant θ_2 .	θ_2: Dans un repère orthonormé$(O, \vec{I}, \vec{J})$, l'ensemble des points M(x, y) tels que $y^2=2px$ (p>0) est la parabole de foyer F $(\frac{p}{2}, 0)$ et de directrice la droite d'équation	3/4 p 118

		x=$\frac{-p}{2}$ de paramètre p et de sommet O.	
Déterminer l'équation de la directrice D d'une parabole P d'équation donnée	Déterminer l'équation de la directrice en appliquant θ_2	θ_2	3 et4et 5 p 118
Soit P'' la parabole d'équation Y^2=8x+8 a)Monter que P' a pour foyer F.	Y^2=8x+8=8(x+1)² soitΩ'' (-1,0) Dans le repère$(\Omega'',\vec{I},\vec{J})$ P'' a pour équation y^2=8x^2 et F(2,0) Donc le foyer de P'' est F(1,0) dans le repère original	θ_1	3p118

Tableau n °3 : Analyse praxéologiques des quelques questions *des exercices du chapitre conique* autour de la théorie de la géométrie analytique